

Eugeniusz Rosołowski

Podstawy regulacji automatycznej

Wrocław 2021

Skład komputerowy
Eugeniusz ROSOŁOWSKI

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część niniejszej książki, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Eugeniusz Rosołowski, Wrocław 2021

SPIS TREŚCI

OD AUTORA	9
1. WPROWADZENIE	11
1.1. Pojęcia podstawowe	11
1.2. Zadania układów regulacji i sterowania	16
1.3. Rozwój układów automatycznego sterowania	19
2. OPIS CIĄGŁYCH SYSTEMÓW LINIOWYCH W DZIEDZINIE CZASU	21
2.1. Opis dynamiki systemu	21
2.2. Modele wymuszeń	25
2.3. Rozwiązywanie równań różniczkowych	28
2.3.1. Równania liniowe o stałych współczynnikach	28
2.3.2. Zastosowanie do analizy systemów	34
2.4. Analiza systemów opisanych równaniami różniczkowymi	34
2.4.1. Wprowadzenie	34
2.4.2. Odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne	39
2.4.3. Odpowiedź szeregowo połączonych układów	40
Zadania	41
3. ANALIZA SYSTEMÓW ZA POMOCĄ METOD OPERATOROWYCH	43
3.1. Przekształcenie Fouriera	43
3.2. Przekształcenie Laplace'a	52
3.2.1. Wprowadzenie	52
3.2.2. Transmitancja układu	56
3.2.3. Transformata odwrotna	60
Zadania	71
4. TYPOWE ELEMENTY SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH	73
4.1. Wprowadzenie: element bezinercyjny	73
4.2. Elementy I-go rzędu	76
4.2.1. Element inercyjny I-go rzędu	76
4.2.2. Idealny element całkujący	79
4.2.3. Idealny element różniczkujący	81
4.2.4. Element różniczkujący rzeczywisty	84
4.3. Elementy II-go rzędu	86
4.3.1. Element całkujący z inercją	87
4.3.2. Element inercyjny II-go rzędu	89
4.3.3. Element oscylacyjny	92
4.4. Element opóźniający	97
4.5. Układy złożone	100
4.5.1. Algebra schematów blokowych	100
4.5.2. Elementy wyższych rzędów	105
Zadania	114

5. STABILNOŚĆ LINIOWYCH SYSTEMÓW CIĄGŁYCH.....	117
5.1. Wprowadzenie.....	117
5.2. Kryterium Routha-Hurwitza.....	123
5.3. Kryterium Michajłowa	128
5.4. Kryterium Nyquista.....	131
5.5. Zapas fazy i zapas wzmocnienia	142
5.6. Kryterium logarytmiczne	145
5.7. Stabilność układów ze zwłoką czasową	148
Zadania	149
6. LINIOWE SYSTEMY DYSKRETNE	151
6.1. Wprowadzenie.....	151
6.2. Przekształcenie Z	153
6.3. Odwrotna transformata Z	161
6.3.3. Rozkład transformaty w szereg potęgowy	162
6.3.4. Rozkład transformaty na ułamki proste	163
6.3.5. Metoda residuów	166
6.4. Transmitancja układu dyskretnego.....	169
6.5. Równania różnicowe.....	177
6.6. Algebra przekształcenia Z	179
6.7. Ekstrapolacja impulsów	181
6.8. Modelownie cyfrowe systemów ciągłych	185
6.8.1. Ekwiwalent ekstrapolacji.....	185
6.8.2. Ekwiwalent całkowania	187
6.9. Próbkowanie sygnałów ciągłych	192
Zadania	197
7. STABILNOŚĆ LINIOWYCH SYSTEMÓW DYSKRETNYCH.....	199
7.1. Wprowadzenie.....	199
7.2. Kryteria stabilności układów dyskretnych	202
7.2.1. Kryterium Jury'ego.....	203
7.2.2. Kryterium Routha-Hurwitza na płaszczyźnie 'w'	205
7.2.3. Kryterium Nyquista	208
7.3. Zastosowanie transformacji układów	217
7.4. Właściwości dynamiczne systemów dyskretnych	222
Zadania	225
8. OPIS LINIOWYCH SYSTEMÓW W PRZESTRZENI STANÓW	227
8.1. Wprowadzenie.....	227
8.2. Opis dynamiki systemu za pomocą równań stanu	228
8.2.1. Struktura równań zmiennych stanu.....	228
8.2.2. Rozwiązywanie równań stanu.....	231
8.3. Operatorowy zapis równań zmiennych stanu	239
8.3.1. Równania zmiennych stanu w postaci operatorowej.....	239
8.3.2. Zamiana transmitancji układu na równania zmiennych stanu	241
8.3.3. Transmitancja układów opisanych równaniami stanu.....	247
8.3.4. Sterowalność i obserwowalność układów dynamicznych.....	248

8.4.	Stabilność układów liniowych ciągłych w przestrzeni stanów.....	252
8.5.	Zmienne stanu w układach dyskretnych.....	253
8.5.1.	Opis układu dyskretnego w przestrzeni stanów	253
8.5.2.	Określenie zmiennych stanu układu o znanej transmitancji.....	256
8.6.	Stabilność stanowych układów dyskretnych	259
	Zadania	259
9.	KOREKCJA LINIOWYCH CIĄGŁYCH UKŁADÓW REGULACJI.....	261
9.1.	Jakość liniowych ciągłych układów regulacji	261
9.1.1.	Właściwości statyczne układów ze sprzężeniem zwrotnym	261
9.1.2.	Badanie właściwości dynamicznych układów ze sprzężeniem zwrotnym	266
9.1.3.	Wskaźniki jakości regulacji	267
9.2.	Zasady korekcji układów regulacji.....	269
9.3.	Korekcja szeregową	270
9.3.1.	Korektor przyspieszający.....	272
9.3.2.	Korektor opóźniający.....	275
9.3.3.	Korektor przyspieszająco-opóźniający	279
9.4.	Dobór korektora za pomocą wykresu Nicholasa.....	283
9.4.1.	Wprowadzenie	283
9.4.2.	Karta Nicholasa	290
9.4.3.	Projektowanie układów za pomocą karty Nicholasa	293
9.5.	Regulatory PID.....	310
9.5.1.	Rodzaje regulatorów	310
9.5.2.	Dobór rodzaju regulatora	315
9.5.3.	Określenie nastawień regulatora	316
9.5.4.	Nasycenie regulatora.....	324
9.6.	Korekcja w sprzężeniu zwrotnym	328
9.7.	Korekcja addytywna.....	330
9.8.	Korekcja predykcyjna	333
9.9.	Regulacja z modelem wewnętrznym.....	337
9.10.	Uwagi końcowe.....	342
	Zadania	343
10.	KOREKCJA LINIOWYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH	345
10.1.	Wprowadzenie.....	345
10.2.	Błędy ustalone w układach dyskretnych	345
10.3.	Korekcja szeregową	347
10.3.1.	Projektowanie korektora analogowego.	348
10.3.2.	Projektowanie korektora dyskretnego.....	351
10.4.	Cyfrowe regulatory PID	353
10.4.1.	Dyskretna postać regulatora PID	354
10.4.2.	Nastawianie cyfrowych regulatorów PID	357
10.5.	Bezpośrednie projektowanie korektorów dyskretnych.....	363
10.5.1.	Algorytm Dahlina	364
10.5.2.	Algorytm Vogela-Edgara.....	370
10.5.3.	Korekcja ze skończonym czasem odpowiedzi	373
	Zadania	376

11. NIELINIOWE UKŁADY REGULACJI	379
11.1. Wprowadzenie.....	379
11.2. Stabilność układów nieliniowych.....	385
11.2.1. Definicje stabilności	385
11.2.2. Stabilność lokalna.....	387
11.2.3. Bezpośrednia metoda Lapunowa	402
11.2.4. Metoda Popova	406
11.2.5. Rozszerzona metoda Nyquista	413
11.3. Metoda funkcji opisującej	418
11.4. Metoda płaszczyzny fazowej w regulacji przekaźnikowej.....	428
Zadania	433
DODATKI	437
D.1. Alfabet grecki	437
D.2. Podstawowe funkcje programu MATLAB w bloku CONTROL SYSTEM....	439
LITERATURA	441
SKOROWIDZ.....	445

OD AUTORA

Książka ta jest pomyślana jako wprowadzenie do zagadnień teorii regulacji automatycznej, co tradycyjnie składa się na podstawy automatyki. Kurs taki, z pewnym zróżnicowaniem co do stopnia zaawansowania, jest prowadzony niemal na wszystkich kierunkach związanych z naukami technicznymi.

Pierwsza część książki, na którą składają się rozdziały 1-8, zawiera opis narzędzi matematycznych, które są stosowane w odniesieniu do klasycznego ujęcia automatyki. W części drugiej (rozdziały 9-10) zawarty jest materiał związany z projektowaniem układów sterowania i automatycznej regulacji wraz z opisem podstawowych metod korekcji takich układów. Obie części odnoszą się do ciągłych i dyskretnych układów liniowych, reprezentowanych za pomocą transmitancji lub opisu w przestrzeni stanów. W ostatnim, 11-tym rozdziale, przedstawione są także metody stosowane w odniesieniu do układów nieliniowych.

Wykład jest ilustrowany dużą liczbą przykładów rachunkowych, w których, w większości przypadków, stosowany jest program MATLAB [41], jako wygodne narzędzie do obliczeń i sporządzania wykresów. Mam nadzieję, że Czytelnik nie będzie miał problemów z ich zrozumieniem i samodzielnym rozwiązaniem.

Będę wdzięczny za wszelkie uwagi dotyczące proponowanego w tej książce materiału, jego układu i zawartych ilustracji w postaci przykładów. Można je przesyłać na mój adres e-mailowy: eugeniusz.rosolowski@pwr.edu.pl.

Na zakończenie mam przyjemność podziękować moim kolegom z Zespołu Automatyki i Sterowania w Energetyce Katedry Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej, którzy w dużym stopniu kształtowali zawartość tej książki zarówno w zakresie treści podstawowego wykładu, jak również w odniesieniu do przykładów składających się na ćwiczenia laboratoryjne [62], a także rachunkowe [54]. Myślę tu w szczególności o profesorze Andrzeju Wiszniewskim, który z krótką przerwą prowadził wykład Podstawy Automatyki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Wrocławskiej w latach 1967 – 1999 (ponad 30 lat). Profil tej książki w dużej mierze odpowiada materiałowi, który został opracowany właśnie przez profesora A. Wiszniewskiego. Jestem wdzięczny także profesorowi Mirosławowi Łukowiczowi, który zgodził się przejrzeć wstępną wersję tej pracy, okazując się niezrównanym tropicielem licznych moich błędów.

1. WPROWADZENIE

1.1. Pojęcia podstawowe

Automatyka, jeśli pominąć popularne znaczenie tego terminu, jest najczęściej rozumiana jako dyscyplina wiedzy, zajmująca się samoczynnym działaniem. To działanie ma zazwyczaj jakiś określony cel, który jest osiągany automatycznie (samoczynnie). Bliskie znaczeniowo, a niekiedy wymiennie stosowane pojęcia, to sterowanie (automatyczne), regulacja, kontrola (ang. *automatic control*, *control engineering*).

Człowiek od dawna był świadomy różnych form samoczynnego działania, które podglądał w przyrodzie (podążanie kwiatów za słońcem, przyśpieszanie oddechu przy ucieczce) lub sam tworzył (wymyślne wnyki, czy też zapadnie). Jednak automatyka, jako samodzielna dziedzina wiedzy ukształtowała się stosunkowo późno - na początku XX wieku. Potrzebny był wcześniejszy rozwój innych gałęzi wiedzy (przede wszystkim matematyki) oraz powstanie niektórych ważnych pojęć o uniwersalnym charakterze, jak sygnał, system, czy też model matematyczny. Wiele z tych pojęć było inspirowanych przez nową dziedzinę, stając się z czasem częścią języka potocznego, jak chociażby sprzężenie zwrotne, wymuszenie, odpowiedź i inne.

Charakterystyczną cechą automatyki (teorii sterowania) jest uniwersalność języka, którym się posługuje. Opis, który odnosi się do systemów technicznych, może być – bez potrzeby jakichkolwiek zmian – stosowany w odniesieniu do systemów biologicznych, ekonomicznych, społecznych, ekologicznych, czy jeszcze innych. Modele tych systemów (odzwierciedlenie struktury, funkcji poszczególnych elementów i zachodzących między nimi relacji) są w zakresie automatyki (teorii systemów) reprezentowane za pomocą jednolitego języka.

Automatyka w ogólnym sensie jest rozpatrywana w dwóch następujących aspektach:

- Opis (analiza) badanego układu i utworzenie jego modelu. Wymaga to określenia charakteru systemu, dostosowania do niego odpowiednich matematycznych narzędzi służących do opisu jego właściwości (w dziedzinie czasu i częstotliwości). Działania te są przedmiotem zainteresowania teorii systemów. Ten zakres wiedzy w książce składa się na rozdziały 2 – 8 i częściowo 11.

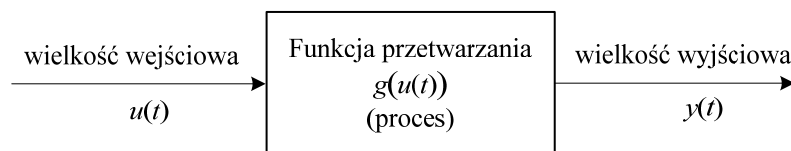
- Projektowanie systemów sterowania (synteza), które ma na celu uzyskanie pożądanego ich zachowania się. Problematyka ta jest przedstawiona w rozdziałach 9 – 11 w podstawowym zakresie, który jest określany mianem korekcji układów regulacji.

Sterowanie automatyczne jest więc samoczynnym działaniem, które ma na celu uzyskanie pożądanego przebiegu określonego procesu w warunkach zmiennego oddziaływania zewnętrznych wymuszeń i zakłóceń. W technice wspomniany proces jest utożsamiany z procesem technologicznym, który jest związany z określonymi przemianami o charakterze elektrycznym, mechanicznym, chemicznym, biologicznym lub innym. Stosowane w tym kontekście pojęcie procesu oznacza przebieg oddziaływań występujących pomiędzy współzależnymi elementami jakiegoś układu, utworzonego ze zbioru tych elementów (obiektów). Użyte tu określenie ‘układ’ jest zazwyczaj wymiennie stosowane z pojęciem ‘system’.

System jest zbiorem obiektów (elementów) o określonych granicach wraz z występującymi między nimi zależnościami. Jest to bardzo pojemne określenie, które bywa stosowane w różnym kontekście. Można więc spotkać odwołania do systemu politycznego, prawnego, społecznego, ekologicznego, filozoficznego i wielu innych. Wspólną cechą tego pojęcia jest zgoda co do występowania w systemie oddziaływań pomiędzy jego elementami, niezależnie od ich charakteru. W dalszej części będziemy się zajmować systemami technicznymi (fizycznymi), w których wzajemne oddziaływania mają charakter zmiennych fizycznych. Z punktu widzenia automatyki, system jest określany za pomocą relacji wejście – wyjście. Chociaż pojęcie to jest często stosowane na równi z określeniem ‘proces’, to jednak sam proces odnosi się zazwyczaj do procesu technologicznego. Do opisu systemu wygodnie jest posługiwać się zapisem matematycznym (modelem). Na przykład, zapis:

$$y(t) = g(u(t)), \quad (1.1)$$

można odczytać, jako odpowiedź procesu (systemu) określonego przez funkcję przetwarzania $g()$ na wymuszenie $u(t)$ (rys. 1.1).



Rys 1.1. Schemat elementarnego układu przetwarzania

W zależności (1.1) występują dwa fundamentalne dla automatyki pojęcia: sygnał oraz model. Sygnał jest uogólnionym sposobem opisu zmiennych występujących w rozpatrywanym systemie. Jeśli przyjmiemy, że automatyka zajmuje się rzeczywistymi systemami technicznymi, to wymuszenia i odpowiedzi są konkretnymi wielkościami fizycznymi, jak prędkość, napięcie elektryczne, poziom płynu i inne. W zależności (1.1) wielkości te są reprezentowane za pomocą funkcji $u(t)$ oraz $y(t)$, które są ogólnie

nazywane sygnałami. *Sygnał* jest zatem modelem przebiegu jakiejś wielkości fizycznej w czasie.

Model matematyczny rozważanego procesu jest określony za pomocą funkcji $g()$ względem wymuszenia (wielkości wejściowej) $u(t)$. Wynikiem tego przetwarzania jest wielkość wyjściowa (odpowiedź) $y(t)$. Różnorodność procesów technologicznych, które są przedmiotem automatycznego sterowania, w pierwszym odruchu rodzi pytanie: sterowanie czym? Regulacja czego? Szybko zdano sobie sprawę z tego, że niezależnie od charakteru obserwowanego procesu, podstawowe zależności zachodzące pomiędzy wymuszeniem (wielkością zadaną), a odpowiedzią tego procesu, którą należy przyjąć jako wielkość regulowaną, są uniwersalne. Platformą tego uogólnienia jest właśnie *model matematyczny procesu* odwzorowujący jego dynamikę, czyli zależności czasowe pomiędzy wybranymi zmiennymi procesu (sygnałami). W ten sposób można stosować język abstrakcyjnego (a więc z pominięciem fizycznego charakteru procesu) opisu występujących oddziaływań. Tworzeniem takich modeli oraz badaniem zachodzących między nimi zależności zajmuje się teoria systemów. Teoria regulacji automatycznej, a bardziej ogólnie – teoria sterowania, jak wspomniano, zajmuje się tworzeniem reguł zapewniających celowe zachowanie się nadzorowanych procesów. Te dwa zagadnienia są właśnie nazywane odpowiednio: *analizą (opisem, badaniem) systemów* oraz *syntezą (projektowaniem) systemów* regulacji (sterowania). W istocie, automatyka zajmuje się analizą oraz syntezą systemów (układów) sterowania [26, 56].

Jeśli nawet ograniczyć rozważania do systemów fizycznych, to łatwo zauważyć, że obserwowane procesy mogą być opisywane w bardzo różny sposób. Czynność takiego opisu jest nazywana modelowaniem (tworzeniem modelu). Przez model należy tu rozumieć pewną reprezentację rzeczywistości (procesu), w której zachowane są istotne (z punktu widzenia celu dokonywanego opisu) cechy tej rzeczywistości z pominięciem drugorzędnych właściwości. Podstawowym obszarem tworzenia modeli w naukach technicznych jest fizyka. Prawa fizyki są ujęte w postaci matematycznych modeli rzeczywistości. Podobne modele są tworzone w obszarze biologii, ekologii i innych dziedzin. Model systemu, na który składa się wiele elementów, powinien także odzwierciedlać powiązania pomiędzy tymi elementami, które są reprezentowane za pomocą odpowiednich sygnałów i obowiązujących je reguł. Struktura modelu oraz jego parametry są określane w drodze, niekiedy złożonych procedur, którymi zajmuje się gałąź modelowania znana jako identyfikacja systemów [53].

Można zauważyć, że model jest bardzo pojemnym określeniem, w którym mieszczą się bardzo różne sposoby opisu rzeczywistości. Ponieważ celem automatyki jest projektowanie odpowiednich systemów sterowania, więc tworzone reguły sterowania (synteza) bazują na utworzonych modelach systemu, które powstały na etapie jego analizy. Wynikają stąd wielostopniowe podziały układów automatyki (systemów sterowania). Ważnym kryterium jest tu sposób reprezentacji zachodzących zdarzeń i relacji w sensie uwzględnienia czynników losowych. Z tego punktu widzenia wprowadza się dwie kategorie układów:

- układy deterministyczne;
- układy probabilistyczne.

Model deterministyczny układu jest wyrażony za pomocą równań (relacji), które mają jednoznaczny charakter z pominięciem czynników lub charakterystyk losowych. Przykładem mogą tu służyć modele wyznaczone przez równania fizyki klasycznej (równania ruchu, obwodu elektrycznego, teorii pola i inne) z założeniem, że ich parametry nie mają charakteru losowego.

W przypadku modeli probabilistycznych, zmienne procesu mają charakter losowy i są opisane za pomocą pojęć rachunku prawdopodobieństwa (np. dystrybuenta, wartość oczekiwana, moment). Modele dynamiczne (zmienne w czasie) takich procesów są wyrażone za pomocą funkcji losowych (uwzględniających zdarzenia przypadkowe), które są nazywane procesami stochastycznymi. Proces stochastyczny dla każdej wybranej wartości czasu jest zmienną losową. W fizyce rachunek prawdopodobieństwa jest stosowany w jednym z dwóch przypadków: - gdy model deterministyczny zjawiska jest znany, jednak ze względu na jego złożoność, trudność dokładnego ustalenia warunków początkowych i dużą wrażliwość wyniku na ich zmiany, podejście deterministyczne nie prowadzi do rozwiązania (opis toru kuli bilardowej, opis zjawisk pogodowych itp.); - gdy znany jest tylko model probabilistyczny (zagadnienia fizyki kwantowej). W książce nie zajmujemy się procesami stochastycznymi – zarówno do opisu systemów, jak i syntezy układów sterowania.

W obu powyższych przypadkach model może mieć charakter liniowy lub nieliniowy. W przypadku modelu liniowego obowiązuje zasada superpozycji, co oznacza, że odpowiedź układu na sumę kilku wymuszeń jest równa sumie odpowiedzi na każde z tych wymuszeń, co w przypadku dwóch wymuszeń można zapisać następującym równaniem:

$$f(\alpha \cdot u_a + \beta \cdot u_b) = \alpha \cdot f(u_a) + \beta \cdot f(u_b) \quad (1.2)$$

Zależność tę spełniają, na przykład, następujące równania:

$$y_1 = 5u_1 - 4, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

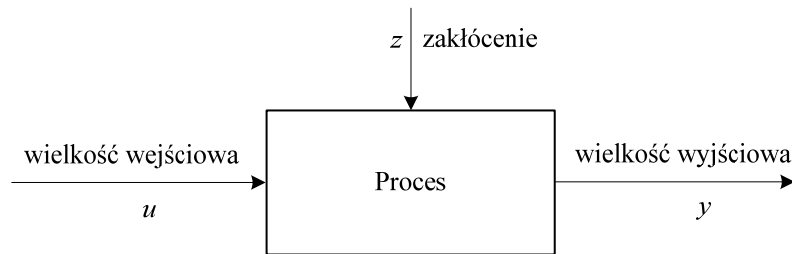
Drugie równanie odnosi się do układu o dwóch wejściach i dwóch wyjściach.

Rzeczywiste układy zazwyczaj nie spełniają warunku (1.2), zwłaszcza jeśli rozważania dotyczą szerokich zmian ich parametrów (temperatury, szybkości, napięcia elektrycznego itp.). Często jednak drobne odchylenia od tej zasady są pomijane i badany proces zastępuje się modelem liniowym w celu uproszczenia jego opisu (zazwyczaj dotyczy to tylko ograniczonego zakresu zmian wartości sygnałów). Wówczas te pominięte odchylenia stają się zakłóceniami procesu. Problem ten jest związany z formułowaniem matematycznego modelu obiektu. Nie powinien on być nadmiernie skomplikowany, gdyż utrudnia to jego dalsze wykorzystanie. Pominięte lub nieznane relacje wpływające na wartość sygnału wejściowego stają się zakłóceniami (rys. 1.2).

W niektórych jednak przypadkach warunek (1.2) wyraźnie nie jest spełniony i wówczas mamy do czynienia z układem nieliniowym. Typowym przykładem układu nieliniowego jest przekaźnik elektromagnetyczny, w którym wielkością wejściową jest napięcie na cewce wyzwalającej, a wyjściową – położenie zestyku. Zmiana wielkości wejściowej tylko w obszarze wyzwalania powoduje zmianę na wyjściu. Układy nieliniowe będą analizowane w końcowej części wykładu.

W układach nieliniowych zasada superpozycji nie jest spełniona, a ich modele są reprezentowane za pomocą funkcji nieliniowych, na przykład:

$$y = 5u^2 - 4, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & u_1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Rys 1.2. Schemat układu z uwzględnieniem zakłócenia

Kolejny podział systemów uwzględnia sposób ich zachowania się w czasie. System niezależny od czasu ma tę właściwość, że przesunięcie w czasie sygnału wymuszenia (wyprzedzenie lub opóźnienie) powoduje podobne przesunięcie w czasie jego odpowiedzi:

$$y(t - \tau) = g(u(t - \tau)) \quad (1.3)$$

Mówi się wówczas, że układ jest inwariantny względem czasu. W innym przypadku mamy do czynienia z układem zależnym od czasu (zmiennym w czasie). Niekiedy w miejsce określeń zależny/niezależny od czasu używa się określeń stacjonarny/niestacjonarny. Należy jednak pamiętać, że te ostatnie określenia odnoszą się do charakterystyk procesów stochastycznych [29].

Zależność (1.3) można także sformułować następująco: jeśli $y(t)$ jest odpowiedzią układu na wymuszenie $u(t)$, to dla wymuszenia: $u(t - \tau)$ odpowiedź powinna być określona przez $y(t - \tau)$. Na przykład, łatwo sprawdzić, że równania:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4ty(t) = u(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \sin(at) + y(t) = 5,$$

przedstawiają układy, które są zależne od czasu.

Inny ważny podział systemów jest związany z charakterem występujących w nich sygnałów jako funkcji czasu. Jeśli sygnały są ciągłymi funkcjami czasu, to mamy do czynienia z systemem ciągłym (w czasie). W innym przypadku mówimy o systemie dyskretnym, w którym sygnały przyjmują określone wartości tylko dla ściśle określonych wartości czasu.

Wymienione kategorie systemów mogą się wzajemnie przenikać, definiując ściśle określone ich rodzaje na przykład model dyskretny, liniowy, niezależny od czasu lub model nieliniowy dyskretny, zależny od czasu. Waga tych definicji wynika stąd, że do opisu określonych układów i projektowania stosownych reguł ich sterowania, zostały wypracowane odpowiednie narzędzia matematyczne i zasady posługiwania się nimi.

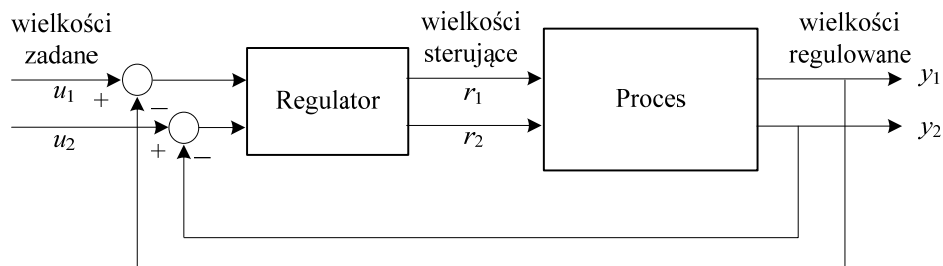
Zasadnicza część książki odnosi się do układów liniowych, niezależnych od czasu (ang. *LTI* – *Linear Time-invariant*). Są to układy ciągłe oraz dyskretne. Modele dynamiki układów ciągłych są reprezentowane za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach (w odniesieniu do układów o parametrach skupionych) lub cząstkowych (w odniesieniu do układów o parametrach rozłożonych). Dynamika układów liniowych niezależnych od czasu jest reprezentowana w postaci równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Podstawowym narzędziem opisu i projektowania takich układów jest przekształcenie Laplace’a. W przypadku układów zależnych od czasu współczynniki ich równań zmieniają się w czasie. Analogicznie, układy dyskretne są opisywane za pomocą równań różnicowych, a do ich analizy używane jest przekształcenie *Z*. Stosowane tu pojęcia są bliżej wyjaśnione w dalszych rozdziałach książki.

Ważną cechą systemu jest jego stabilność. Ponieważ z punktu widzenia sterowania użyteczne mogą być tylko systemy stabilne, więc prace w tym zakresie zostały podjęte już w drugiej połowie XIX wieku. Łączą się one z takimi nazwiskami, jak J.C. Maxwell, E.J. Routh, czy A.M. Lapunow. Praca doktorska tego ostatniego stała się podstawą współczesnego podejścia do teorii stabilności [7, 20]. W latach trzydziestych XX wieku podstawowe prace w tym zakresie sformułowali H.S. Bode oraz H. Nyquist [44].

1.2. Zadania układów regulacji i sterowania

Układ regulacji automatycznej (URA) jest projektowany z myślą o takim automatycznym (samoczynnym) oddziaływaniu na rozpatrywany proces, aby uzyskać pożądane jego zachowanie się. To ogólne zadanie zazwyczaj wymaga bliższego określenia w zależności od charakteru systemu i szczegółowych oczekiwań, które są definiowane w języku automatyki.

Niech wprowadzeniem do tego języka będzie schemat blokowy z rys. 1.3. Przedmiotem sterowania jest proces technologiczny, w którym zostały wybrane dwie wielkości (zmienne procesu), podlegające regulacji (sterowaniu).



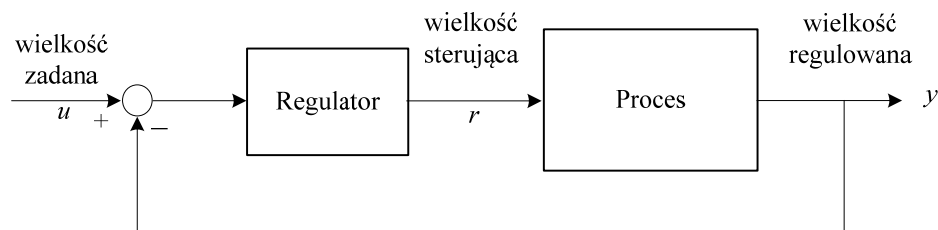
Rys. 1.3. Ogólny schemat układu regulacji

Aby zrealizować określony algorytm (sposób) sterowania, spośród różnych zmiennych, definiujących model procesu, należy wybrać takie wielkości, których zmiana da możliwość wpływania na wielkości regulowane (wielkości zadane). W rozważanym przykładzie układ sterowania powinien zapewnić realizację następujących funkcji:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(u_1, u_2) = h_1(r_1, r_2) \\ y_2 &= f_2(u_1, u_2) = h_2(r_1, r_2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

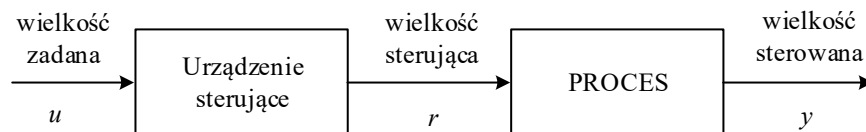
Zauważmy, że w torze głównym układu regulacji znajduje się regulator, którego zadaniem jest określenie odpowiednich sygnałów sterujących na podstawie wartości błędów regulacji, aby zrealizować cele regulacji. Ważne jest, aby spośród na ogół różnych funkcji wybrać te, które zapewniają najlepsze sterowanie w sensie określonych wskaźników jakości regulacji jak: czas uzyskania odpowiedzi, wrażliwość na zakłócenia i inne. Regulator (korektor) może być umieszczony także w innych częściach układu sterowania (np. w torze sprzężenia zwrotnego), co umożliwia elastyczny dobór strategii sterowania.

Jeśli każda z wielkości regulowanych zależy od szeregu wielkości zadanych, to mówimy o układzie wielowejsciowym. Jeśli każda z wielkości regulowanych zależy tylko od jednej wielkości zadanej, mówimy o (wielu – lub jednym) układzie jednowejsciowym. Ze względu na sposób opisu wyróżnia się układy o jednym wejściu i jednym wyjściu (ang.: *SISO* – *Single Input Single Output*) oraz układy o wielu wejściach i wielu wyjściach (ang.: *MIMO* – *Multi Input Multi Output*). W dalszym ciągu będziemy się zajmować głównie układami o jednym wejściu i jednym wyjściu (rys. 1.4).



Rys 1.4. Schemat układu o jednym wejściu i jednym wyjściu

Cel sterowania może być osiągnięty na wiele różnych sposobów. W historii rozwoju automatyki wykształciły się dwa sposoby realizacji zadania sterowania: sterowanie w układzie otwartym i w układzie zamkniętym. Schemat sterowania w układzie otwartym jest pokazany na rys. 1.5. Przykładem takiej struktury może być prosty układ nagrzewania pomieszczenia za pomocą pieca gazowego. Wielkością zadaną u jest oczekiwana temperatura pomieszczenia, sterowanie odbywa się za pomocą zmiany położenia r zaworu dopływu gazu, natomiast wielkością regulowaną y jest aktualna temperatura w pomieszczeniu.

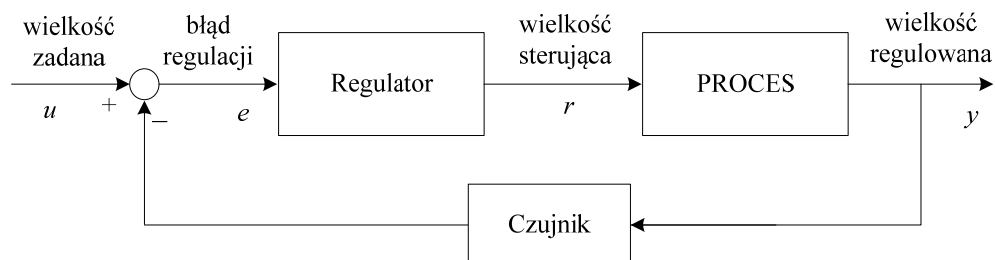


Rys 1.5. Schemat sterowania w układzie otwartym

W przyjmowanej w takim przypadku strategii sterowania zakłada się, że oczekiwana temperatura pomieszczenia jest bezpośrednio związana z przepływem czynnika grzewczego, którym w tym przypadku jest palny gaz. Funkcja sterownika w najprostszym wykonaniu sprowadza się do zamiany nastawionej (zadanej) temperatury na położenie zaworu. W takim układzie nie występuje pomiar efektów sterowania: nie jest bezpośrednio wiadome, jaka jest aktualna wartość wielkości regulowanej. Jej wartość jest bezpośrednio ustalana przez wielkość zadaną.

Łatwo zauważyć, że taki układ ma prostą strukturę, jednak dokładność sterowania wielkością regulowaną będzie z pewnością niewielka. Jest to związane z obecnością zakłóceń, spośród których największy wpływ ma zmiana temperatury otoczenia oraz ciśnienie zasilającego gazu. Te czynniki nie są korygowane w układzie otwartym.

Redukcja wpływu zakłóceń na proces regulacji istnieje natomiast w systemie sterowania ze sprzężeniem zwrotnym (rys. 1.6). W tym przypadku, dzięki pomiarowi wielkości regulowanej, regulator otrzymuje informację o wartości odchyłki pomiędzy wielkością zadaną i wielkością regulowaną; $e = q(u - y)$.



Rys 1.6. Schemat sterowania ze sprzężeniem zwrotnym

W praktyce wykorzystuje się informację nie tylko o wartości tego błędu regulacji, ale także o innych jego parametrach, np. o szybkości jego zmiany. Regulator ma na celu zmniejszanie błędu regulacji. W ten sposób zapewniona zostaje znacznie dokładniejsza regulacja, a oddziaływanie zakłóceń może zostać znacznie zredukowane.

Historia idei sprzężenia zwrotnego (ang. *feedback*) sięga starożytności. Pierwsze szerokie zastosowanie takiego rozwiązania w technice jest łączone z nazwiskiem Jamesa Watta, który zaproponował znaną konstrukcję regulatora do stabilizacji prędkości obrotowej maszyny parowej. Matematyczny opis tego rozwiązania podał J.C. Maxwell w 1868 r. [15].

1.3. Rozwój układów automatycznego sterowania

Układy automatycznego sterowania w dalszym ciągu podlegają szybkiemu rozwojowi. Jest to wynikiem coraz większych wymagań kierowanych w odniesieniu do wskaźników jakości sterowania, ale dużą rolę odgrywają tu także postępy w zakresie nowych zasad (algorytmów) sterowania i rozwój technologii mikroprocesorowej.

W początku lat 50-tych XX wieku pojawiły się układy komputerowe zdolne do wypełniania funkcji kontrolnych. Ich zastosowanie w układach automatyki stało się możliwe dzięki burzliwemu rozwojowi teorii układów dyskretnych [24]. Dostępność łatwego wykonania operacji macierzowych spowodowało także w tym czasie rozwój teorii zmiennych stanu z macierzowym zapisem równań różniczkowych. Na tej bazie sformułowane zostały następnie zasady optymalnego sterowania z koncepcją optymalnego obserwatora w postaci filtru Kalmana [29, 36]. Rozwój tych metod doprowadził w latach 80-tych do sformułowania zasad tzw. sterowania odpornego, które pozwalają określić reguły sterowania zapewniające utrzymanie błędów regulacji w założonych granicach, niezależnie od niepewności, co do wybranych zmiennych procesu [7].

W latach 90-tych zostały sformułowane koncepcje zastosowania do sterowania metod sztucznej inteligencji. Najbardziej obiecujące postępy uzyskano w wyniku zastosowania teorii zbiorów rozmytych (ang. *fuzzy logic*) (sterowanie rozmyte, regulatory rozmyte) oraz Sztucznych Sieci Neuronowych (SSN) (ang. *ANNs - Artificial Neural Networks*). Opracowane w tym zakresie metody zapewniają odporne sterowanie bez potrzeby rygorystycznego odtwarzania modeli dynamiki procesu. W przypadku stosowania logiki rozmytej zasady sterowania opierają się na heurystycznych regułach typu: „jeśli błąd sterowania jest dodatni, to zmniejsz wartość sterującą” lub: „jeśli ujemny błąd sterowania narasta szybko, to wprowadź duży dodatni sygnał sterujący” itp. Projektowanie takiego systemu sterującego polega na utworzeniu stosownej bazy reguł postępowania. Znanych jest kilka sposobów ich definiowania [50].

Z punktu widzenia informatyki neuron można traktować jako specyficzny przetwornik sygnałów. Złożona struktura sztucznych neuronów, jaką jest SSN, pozwala na tworzenie efektywnych układów obliczeniowych z rozwiniętymi właściwościami adaptacyjnymi [32]. W przypadku stosowania SSN do sterowania odpowiednie bazy

reguł (algorytmy postępowania) są tworzone w procesie uczenia sieci, który poprzedza etap sterowania. Możliwe jest także uczenie sieci na bieżąco w trakcie pracy układu sterowania. Wymaga to poprawnego sformułowania celu sterowania. Proces ‘uczenia’ sieci polega na doborze wartości współczynników występujących w strukturze sieci [48, 50].

W ostatnim czasie pojawiła się także bardzo obiecująca koncepcja sterowania o zmiennej strukturze (sterowanie ślizgowe) (ang. *sliding mode control* – *SMC*) w myśl której, algorytm sterowania zmienia się w zależności od bieżącej sytuacji [66]. Dzięki takiemu podejściu, przy tworzeniu odcinkowego (lokalnego) algorytmu, nie trzeba uwzględniać wszystkich możliwych stanów i warunków pracy systemu (redukcja rzędu systemu). Odpowiedni układ logiczny powinien natomiast zapewnić poprawne przejście do innego odcinka sterowania. Systemy takie są przede wszystkim przeznaczone do sterowania procesami nieliniowymi.

Niniejsza książka ma na celu zapoznanie Czytelnika z podstawowymi regułami i narzędziami stosowanymi w analizie i projektowaniu współczesnych układów automatyki. Powyższy pobieżny przegląd historii tej dziedziny uświadamia, że jest to obszerna wiedza, która bardzo intensywnie się rozwija, czerpiąc obficie z pokrewnych gałęzi nauki, jak informatyka, teoria systemów, technologia mikroprocesorowa, a także matematyka.

Proces analizy i projektowania systemów sterowania bazuje zarówno na wiedzy, dotyczącej odpowiednich narzędzi matematycznych i sposobów ich zastosowania, jak również na doświadczeniu i twórczej inwencji projektanta. Jak wspomniano, książka powinna zainspirować Czytelnika do pogłębiania wiedzy, natomiast doświadczenie oraz inwencja są pożądanymi atrybutami inżyniera.

2. OPIS CIĄGLYCH SYSTEMÓW LINIOWYCH W DZIEDZINIE CZASU

2.1. Opis dynamiki systemu

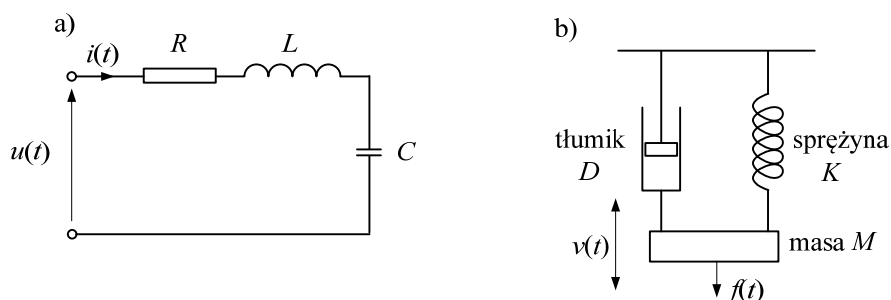
Rozważmy dwa układy fizyczne, których schematy są pokazane na rys. 2.1. Pierwszy z nich (rys. 2.1a) przedstawia szeregowy obwód elektryczny RLC, który jest zasilany napięciem $u(t)$. Równanie napięciowe utworzonego oczka ma następującą postać:

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.1)$$

Po obustronnym zróżniczkowaniu, przy założeniu, że napięcie wymuszające jest stałe: $u(t) = U$, otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0 \quad (2.2)$$

Jest to jednorodne równanie drugiego rzędu. Mówimy, że opisuje ono układ drugiego rzędu.



Rys. 2.1. Przykłady układów dynamicznych; a – obwód elektryczny; b – układ mechaniczny

Podobne zależności otrzymamy dla układu mechanicznego (rys. 2.1b):

$$f(t) = Dv(t) + M \frac{dv(t)}{dt} + K \int v(t) dt \quad (2.3)$$

gdzie: $f(t)$ jest siłą wymuszającą zmianę położenia masy M ; $v(t)$ jest prędkością zmiany położenia masy M ; D jest współczynnikiem tłumienia; K – stała sprężyny.

Porównując zależności (2.1) i (2.3), łatwo zauważyć analogie pomiędzy wielkościami elektrycznymi i mechanicznymi, na przykład:

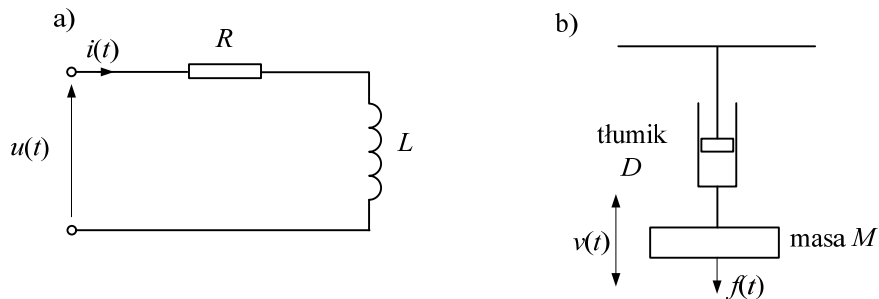
napięcie elektryczne $u(t)$ - siła $f(t)$,
prąd elektryczny $i(t)$ - prędkość $v(t)$

i inne. Widać także, że różne co do charakteru zjawisk fizycznych systemy, mogą mieć jednakowe dynamiczne modele matematyczne. To sprawia, że teoria systemów jest dziedziną uniwersalną, gdyż jej język opisuje właściwości dynamiczne systemów o bardzo różnym charakterze fizycznym.

Wracając do układu mechanicznego z rys. 2.1b, przy założeniu, że siła działająca na ten układ jest stała: $f(t) = F$, równanie (2.3) przybiera następującą postać:

$$M \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + D \frac{dv(t)}{dt} + K v(t) = 0 \quad (2.4)$$

Jeśli w rozpatrywanych układach z rys. 2.1 pominąć kondensator w obwodzie elektrycznym i sprężynę w układzie mechanicznym, to przyjmą one postać jak na rys. 2.2.



Rys. 2.2. Przykłady układów dynamicznych pierwszego rzędu; a – obwód elektryczny; b – układ mechaniczny

W tym przypadku równania dynamiki redukują się do postaci:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = u(t) \quad (2.5)$$

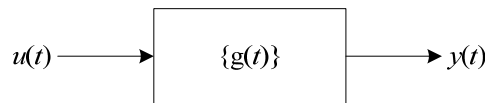
dla obwodu elektrycznego oraz:

$$M \frac{dv(t)}{dt} + D v(t) = f(t) \quad (2.6)$$

dla układu mechanicznego. Są to równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu, niejednorodne (funkcja wymuszająca po prawej stronie równania jest różna od zera).

Związane z nimi układy są także nazywane układami pierwszego rzędu. Występujące tam sygnały mają charakter funkcji ciągłych w czasie (sygnały ciągłe). Dodajmy jeszcze, że model ten odpowiada układom o stałych skupionych.

Z punktu widzenia automatyki (teorii sterowania) wygodnie jest opisywać rozpatrywane powyżej układy za pomocą zależności wejście – wyjście. Na przykład, jeśli w (2.5) w charakterze wejścia (wymuszenia) przyjmimy napięcie $u(t)$, to wyjściem (odpowiedzią) będzie prąd: $y(t) = i(t)$. Niech funkcja przetwarzania (operator przetwarzania) takiego układu będzie oznaczona jako $\{g(t)\}$. Wówczas rozpatrywany układ można określić za pomocą schematu jak na rys. 2.3.



Rys. 2.3. Schemat układu z jednym wejściem i jednym wyjściem

Użyte w tym zapisie nawiasy zewnętrzne służą do zasygnalizowania, że wyjście nie jest bezpośrednio obliczane, jako rezultat funkcji $g(t)$ przy działaniu sygnału $u(t)$. Sposób użycia tego operatora przetwarzania będzie omówiony w dalszej części rozważań.

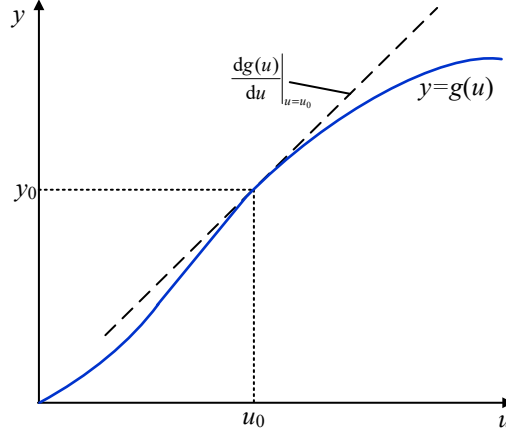
W systemach liniowych funkcja przetwarzania $\{g(u(t))\}$ jest operatorem liniowym, co oznacza, że zachodzi relacja (1.2). Jest to równoważne założeniu, że współczynniki w równaniu różniczkowym opisującym dynamikę systemu nie zależą od zmiennych procesu oraz nie występują w równaniu inne nieliniowe zależności względem tych zmiennych. Oto przykłady równań systemów nieliniowych:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt} + 4u^2(t) = y(t),$$

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt} + 4u(t) = y(t)u(t).$$

Liniowość parametrów systemu reprezentującego fizyczny układ jest zawsze ograniczona do jakiegoś przedziału zmian wielkości opisujących proces. Do określenia wartości parametrów operatora $g(u(t))$ w układzie z rys. 2.3 można posłużyć się przebiegiem funkcji określającej zależność pomiędzy sygnałami na wejściu i na wyjściu rozpatrywanego bloku (rys. 2.4). W celu określenia przybliżonej liniowej zależności pomiędzy oboma sygnałami w rejonie punktu u_0 można się posłużyć rozwinięciem nieliniowej funkcji $g(u)$ w szereg Taylora w pobliżu tego punktu:

$$y = g(u) = g(u_0) + \left. \frac{dg(u)}{du} \right|_{u=u_0} \frac{u - u_0}{1!} + \left. \frac{d^2 g(u)}{du^2} \right|_{u=u_0} \frac{(u - u_0)^2}{2!} + \dots \quad (2.7)$$



Rys. 2.4. Charakterystyka elementu nieliniowego

Liniowe przybliżenie operatora $g(u)$ sprowadza się do ograniczenia rozwinięcia (2.7) do części liniowej, związanej z jego dwoma pierwszymi wyrazami:

$$y = g(u) \approx g(u_0) + \left. \frac{dg(u)}{du} \right|_{u=u_0} \frac{u - u_0}{1!} = y_0 + m(u - u_0) \quad (2.8)$$

gdzie $m = \frac{y - y_0}{u - u_0} = \frac{\Delta y}{\Delta u}$.

W przypadku systemu wielow wejściowego operator przetwarzania jest zależny od wielu zmiennych:

$$y = \{g(u_1, u_2, \dots, u_n)\}, \quad (2.9)$$

a liniowe przybliżenie wokół punktu określonego przez współrzędne $(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0})$ można wyznaczyć przez rozszerzenie rozwinięcia (2.7) na przypadek wielowymiarowy:

$$y = g(u_1, u_2, \dots, u_n) \approx g(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}) + \left. \frac{dg}{du_1} \right|_{u_1=u_{10}} (u_1 - u_{10}) + \left. \frac{dg}{du_2} \right|_{u_2=u_{20}} (u_2 - u_{20}) + \dots + \left. \frac{dg}{du_n} \right|_{u_n=u_{n0}} (u_n - u_{n0}) \quad (2.10)$$

Technikę tą można stosować zarówno do złożonych systemów, jak również do ich pojedynczych elementów.

Systemy liniowe inwariantne względem czasu (ang. *Linear Time-Invariant – LTI*), które spełniają warunek (1.3), stanowią podstawową klasę układów rozważanych w kontekście systemów sterowania. Wynika to stąd, że większość praktycznie analizowa-

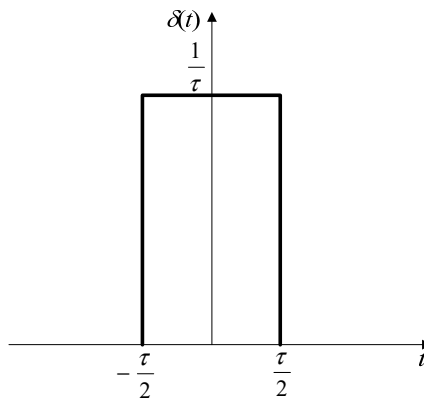
nych systemów z dużym przybliżeniem spełnia warunki liniowości i niezależności od czasu, a ponadto istnieją bardzo wygodne matematyczne narzędzia do analizy takich układów [10, 13]. W podstawowej części niniejszego kursu będą prowadzone rozważania dotyczące właśnie liniowych systemów niezależnych od czasu.

2.2. Modele wymuszeń

Sygnały wejściowe w rozpatrywanych systemach mogą przyjmować różną formę w zależności od tego, czy są one związane z rzeczywistymi procesami, czy też są opisane analitycznymi funkcjami, spełniającymi rolę wymuszeń testowych. W celu porównania właściwości różnych systemów (układów, elementów) wygodnie jest stosować w charakterze wymuszeń pewne standardowe przebiegi.

Najbardziej elementarnym sygnałem testowym stosowanym w teorii systemów jest *impuls* $\delta(t)$, zwany też impulsem (delta) Diraca¹. Pomysł tego sygnału wywodzi się z fizyki kwantowej, ale może także służyć do odwzorowania zjawisk w układach dynamicznych, które charakteryzują się krótkotrwałą, gwałtowną zmianą z równie szybkim jej ustąpieniem (uderzenie). Taki impuls może się odnosić do różnych wielkości fizycznych, jak siła, napięcie elektryczne itp. Intuicyjne podejście do odwzorowania takich procesów pozwala zdefiniować funkcję impulsową (rys. 2.5):

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -\frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{\tau} & \text{dla } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{dla } t > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (2.11)$$



Rys. 2.5. Model impulsu Diraca

¹ Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), inżynier elektryk i fizyk, jeden z twórców mechaniki kwantowej (nagroda Nobla z fizyki w 1933 roku).

Ten intuicyjny opis impulsu Diraca nie spełnia warunku definicji funkcji (jej wartość jest zerowa poza jednym punktem). W miejsce tego stosuje się pojęcie funkcji uogólnionej, jako funkcjonału, którego argumentem jest odpowiednia funkcja próbna, będąca modelem $\delta(t)$ -Diraca. Tego typu funkcje rozszerzone są przedmiotem rozważań teorii dystrybucji [47]. Funkcje próbne (testowe) definiuje się, jako funkcje gładkie (nieskończenie wiele razy różniczkowalne), o tzw. zwartym nośniku, co oznacza, że przyjmują one niezerowe wartości jedynie w ściśle określonym przedziale zmiennej niezależnej. W takim przypadku funkcję Diraca (dystrybucję $\delta(t)$) można reprezentować w następującej postaci:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t, h), \quad (2.12)$$

gdzie $f(t, h)$ jest funkcją modelującą, na przykład:

$$f(t, h) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{dla } -h/2 < t < h/2 \\ 0 & \text{dla } t \leq -h/2, t \geq h/2 \end{cases},$$

$$f(t, h) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-t^2/h^2} \text{ i inne.}$$

Widać, że intuicyjna reprezentacja impulsu Diraca (dystrybucji $\delta(t)$) z rys. 2.5 nie spełnia warunków funkcji próbnej.

Bardziej praktyczna definicja ‘funkcji’ impulsowej jest związana z jej oddziaływaniem na każdą funkcję ciągłą w otoczeniu zera:

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \delta(\tau) d\tau, \quad (2.13)$$

co prowadzi do ogólnego związku:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2.14)$$

Zależność (2.14) jest nazywana formułą kopiowania, co jest związane z ‘wydobyciem’ (próbkowaniem) wartości funkcji w punkcie t przez jej pomnożenie przez funkcję impulsową w tym punkcie. Słuszna jest także następująca zależność:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \delta(0, \tau) d\tau = 1, \quad (2.15)$$

która bezpośrednio łączy się z funkcją jednostkową $1(t)$:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

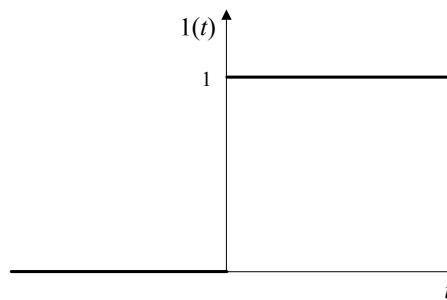
Funkcja $1(t)$ jest nazywana skokiem jednostkowym lub funkcją Heaviside'a². Jej przebieg jest pokazany na rys. 2.6.

Obie przedstawione funkcje łączą się za pomocą następującego związku:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d1(t, \tau)}{dt}, \quad (2.17)$$

przy czym pochodna jest rozumiana jako pochodna dystrybucyjna³ [47].

Z definicji funkcji próbnej wynika, że także impuls Diraca $\delta(t)$ może być nieskończenie wiele razy różniczkowany.



Rys. 2.6. Model funkcji skoku jednostkowego

Funkcja skoku jednostkowego jest wygodnym narzędziem do definicji innych typowych wymuszeń:

- skok prędkości: $u(t) = t1(t)$ - rys. 2.7a;
- skok przyspieszenia: $u(t) = \frac{t^2}{2}1(t)$ - rys. 2.7b.

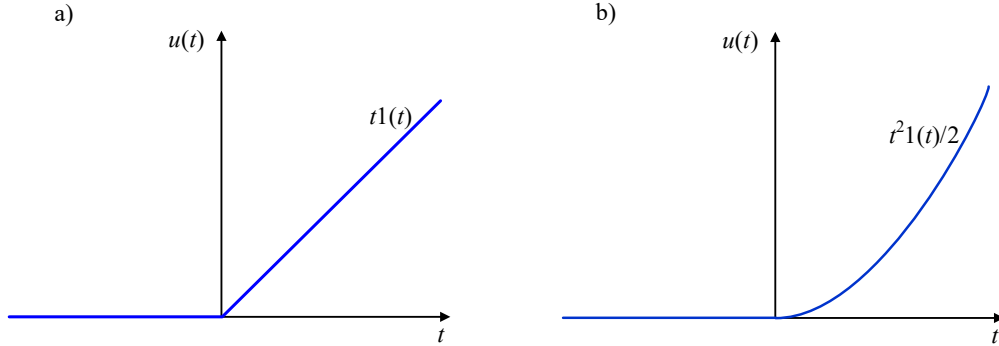
Zauważmy, że: $\frac{d}{dt} \left(\frac{t^2}{2} 1(t) \right) = t1(t)$ oraz: $\frac{d}{dt} (t1(t)) = 1(t)$, co razem z (2.17) daje szereg

reg funkcji testujących, które pozostają w stosunku do siebie w zależności różniczkowej. Ponadto w charakterze typowych wymuszeń stosowane są następujące funkcje:

- funkcja harmoniczna: $u(t) = \cos(\omega_0 t)$, która ma znaną postać zespoloną:
 $u(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$;
- funkcja wykładnicza: $u(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \left(t^2 / 2 \right) + \dots$

² Oliver Heaviside (1850-1925), angielski inżynier elektryk, matematyk, fizyk; sformułował znaną postać równań telegrafistów.

³ W przekształceniach jednostronnych granice w (2.11), (2.17) są jednostronne (prawostronne): $\tau \rightarrow 0^+$.



Rys. 2.7. Przebiegi wymuszeń w postaci: a) skoku prędkości oraz b) skoku przyspieszenia

2.3. Rozwiązanie równań różniczkowych

2.3.1. Równania liniowe o stałych współczynnikach

Rozpatrzmy system liniowy inwariantny względem czasu, rzędu n . Załóżmy ponadto, że jest to system z jednym wejściem i jednym wyjściem. Jego dynamika jest w ogólnym przypadku opisana następującym równaniem różniczkowym o stałych współczynnikach:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t) \quad (2.18)$$

przy czym w ogólnym przypadku:

$$f(t) = b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_2u''(t) + b_1u'(t) + b_0u(t),$$

$$n \geq m,$$

$y(t)$, $u(t)$ - sygnały, odpowiednio, na wyjściu i wejściu systemu (rys. 2.3),

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k y(t)}{dt^k},$$

a_k , b_l - stałe współczynniki (parametry systemu).

Warunkiem realizowalności systemu określonego równaniem (2.18) jest spełnienie tzw. *warunku przyczynowości* (ang. *causality condition*), który wymaga, aby sygnał wyjściowy pojawił się jako rezultat wystąpienia sygnału wejściowego. Jest to spełnione, gdy rząd wymuszenia nie jest większy od rzędu funkcji opisującej dany układ.

Równanie (2.18) jest znane jako *równanie niejednorodne* (ang. *nonhomogeneous*), którego rozwiązanie można zapisać w postaci [13]:

$$y(t) = y_{sw}(t) + y_{wym}(t), \quad (2.19)$$

gdzie: $y_{sw}(t)$ oznacza odpowiedź swobodną, $y_{wym}(t)$ jest odpowiedzią wymuszoną.

Odpowiedź swobodna (przejściowa) jest rozwiązaniem równania jednorodnego, w którym jest zerowe wymuszenie:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0 \quad (2.20)$$

Można sprawdzić, że rozwiązanie tego równania ma następującą postać [57]:

$$y_{\text{sw}}(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \dots + C_ny_n(t), \quad (2.21)$$

gdzie: stałe $C_1, C_2, \dots, C_n$ zależą od warunków początkowych lub od warunków granicznych, natomiast funkcje $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ zależą od pierwiastków algebraicznego równania charakterystycznego o postaci:

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0 \quad (2.22)$$

Równanie (2.22) ma n pierwiastków, wśród których mogą być pojedyncze lub wielokrotne pierwiastki rzeczywiste, czy też zespolone, przy czym pierwiastki zespolone tworzą pary wielkości sprzężonych. Funkcje $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ są przyporządkowane do pierwiastków równania charakterystycznego zgodnie z następującą zasadą:

- jeśli r_k jest pojedynczym pierwiastkiem rzeczywistym, to: $y_k(t) = e^{r_k t}$;
- dla każdego l -krotnego pierwiastka rzeczywistego: $y_k(t) = e^{r_k t}$, $y_{k+1}(t) = te^{r_k t}$,
..., $y_{k+l-1}(t) = t^{l-1}e^{r_k t}$;
- dla każdej pojedynczej pary pierwiastków zespolonych $r_{k,k+1} = a \pm jb$:
 $y_k(t) = e^{at} \cos bt$, $y_{k+1}(t) = e^{at} \sin bt$;
- dla każdej l -krotnej pary pierwiastków zespolonych $r_k = a + jb$:
 $y_k(t) = e^{at} \cos bt$, $y_{k+1}(t) = e^{at} \sin bt$, $y_{k+2}(t) = e^{at} t \cos bt$, $y_{k+3}(t) = e^{at} t \sin bt$,
..., $y_{k+2l-2}(t) = e^{at} t^{l-1} \cos bt$, $y_{k+2l-1}(t) = e^{at} t^{l-1} \sin bt$.

Poniższe przykłady ilustrują sposób zastosowania tych zależności.

Przykład 2.1. Określić odpowiedź swobodną (przejściową) równania jednorodnego:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 0, \text{ przy: } y(0) = 5.$$

Jest to równanie pierwszego rzędu ($n = 1$), więc odpowiedź swobodna ma następującą postać:

$$y_{\text{sw}}(t) = C_1y_1(t).$$

Równanie charakterystyczne jest określone przez wielomian pierwszego stopnia:

$$r + 2 = 0,$$

którego pierwiastek ma wartość: $r = r_1 = -2$.

Pojedynczy pierwiastek jest zawsze rzeczywisty, więc:

$$y_1(t) = e^{r_1 t} = e^{-2t}.$$

Odpowiedź swobodna powinna spełniać warunki początkowe, zatem:

$$y(0) = y_{\text{sw}}(0) = C_1y_1(t)|_{t=0} = 5, \text{ gdzie: } y_1(0) = 1,$$

skąd: $C_1 = 5$.

Ostatecznie odpowiedź układu przy zerowym wymuszeniu i przy zadanych warunkach początkowych jest następująca:

$$y(t) = 5e^{-2t}.$$

Wynik ten można sprawdzić przez podstawienie do zadanego równania:

$$\frac{d}{dt}(5e^{-2t}) + 2(5e^{-2t}) = -10e^{-2t} + 10e^{-2t} = 0.$$

Otrzymane rozwiązanie jest więc poprawne.

Przykład 2.2. Określić odpowiedź swobodną (przejściową) równania jednorodnego:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

Równanie charakterystyczne ma następującą postać:

$$r^3 - 3r - 2 = 0$$

Można je przedstawić w postaci iloczynowej:

$$(r+1)^2(r-2) = 0,$$

skąd: $r_1 = -1$, $r_2 = -1$, $r_3 = 2$.

Zatem swobodna odpowiedź systemu przybiera następującą formę (podwójny pierwiastek rzeczywisty oraz pierwiastek pojedynczy):

$$y_{sw}(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + C_3 e^{2t}.$$

W rozpatrywanym przypadku brak jest wymuszenia (równanie jednorodne), więc odpowiedź układu jest konsekwencją zadanych warunków początkowych. Załóżmy, że są one następujące: $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$. Dla tych warunków można określić współczynniki powyższej odpowiedzi układu (odpowiedzi swobodnej):

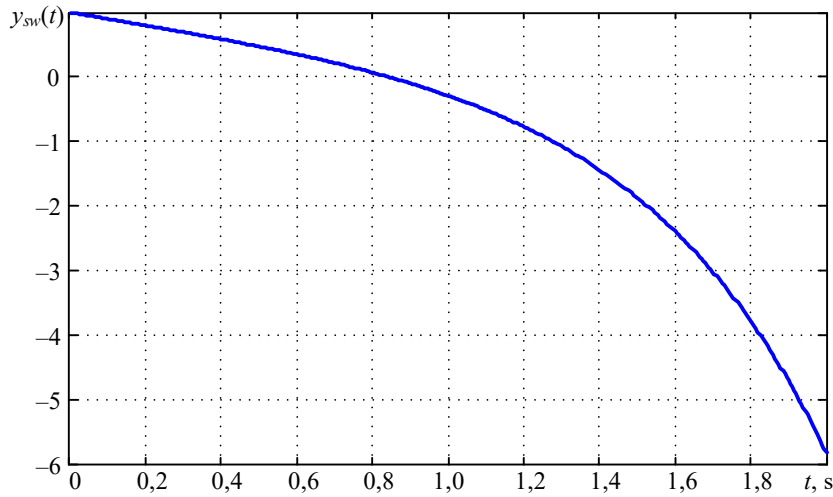
$$y_{sw}(0) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + C_3 e^{2t} \Big|_{t=0} = 1$$

$$y'_{sw}(0) = (C_2 - C_1)e^{-t} - C_2 te^{-t} + 2C_3 e^{2t} \Big|_{t=0} = -1$$

$$y''_{sw}(0) = (C_1 - 2C_2)e^{-t} + C_2 te^{-t} + 4C_3 e^{2t} \Big|_{t=0} = 0$$

skąd: $C_1 = 10/9$, $C_2 = 1/3$, $C_3 = -1/9$.

Ostatecznie odpowiedź układu jest następująca: $y(t) = y_{sw}(t) = \frac{1}{9}((10+3t)e^{-t} - e^{2t})$. Przebieg tej funkcji jest pokazany na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Przebieg odpowiedzi swobodnej rozważanego układu niestabilnego

Widać, że z upływem czasu amplituda odpowiedzi szybko rośnie, o czym decyduje drugi składnik otrzymanej odpowiedzi. Zauważmy, że dzieje się tak przy braku wymuszenia w rozważanym układzie. Jest to charakterystyczna cecha układu niestabilnego. Takie układy nie mogą mieć praktycznego zastosowania. Warto zauważyć, że składnik odpowiedzi, powodujący niestabilność, ma dodatni wykładnik, co jest wynikiem tego, że odpowiadający mu pierwiastek funkcji charakterystycznej jest dodatni. Zagadnienie to jest przedmiotem bliższej analizy w rozdz. 5.

Postać odpowiedzi wymuszonej $y_{\text{wym}}(t)$ w (2.19) zależy od rodzaju funkcji wymuszającej (prawa strona równania niejednorodnego). Może tu wystąpić duża różnorodność funkcji, co utrudnia podanie właściwego rozwiązania. Dla najbardziej typowych funkcji obowiązują następujące zasady:

- $f(t) = Ke^{at}$: $y_{\text{wym}}(t) = Ae^{at}$, jeśli a nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego; $y_{\text{wym}}(t) = At^l e^{at}$, jeśli a jest l -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego;
- $f(t) = K \cos \omega t$ lub $f(t) = K \sin \omega t$: $y_{\text{wym}}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$;
- $f(t) = Kt^k$, $k > 0$: $y_{\text{wym}}(t) = A_0 + A_1 t + \dots + A_k t^k$ - jeśli zero nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego; $y_{\text{wym}}(t) = \int_{t_0}^t (A_0 + A_1 \tau + \dots + A_k \tau^k) d\tau$ - jeśli zero jest pierwiastkiem równania charakterystycznego.

Wartości stałych współczynników w powyższych funkcjach można określić przez ich podstawienie do oryginalnych równań niejednorodnych.

Przykład 2.3. Rozpatrzmy układ z przykładu 2.1, w którym na wejście podane jest wymuszenie w postaci skoku jednostkowego. Zmieniona jest także wartość początkowa odpowiedzi:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 1, \text{ przy: } y(0) = 4.$$

Na podstawie przykładu 2.1, otrzymujemy odpowiedź swobodą tego układu:

$$y_{sw}(t) = y_1(t) = C_1 e^{-2t}.$$

Składowa wymuszona odpowiedzi może być określona na podstawie podanej powyżej analizy. Funkcja wymuszająca $f(t) = 1$ ($f(t) = Ke^{at}$, $a = 0$, $K = 1$), dla której: $y_{wym}(t) = A$.

Po wstawieniu tej funkcji do podanego równania różniczkowego ($y(t) = y_{wym}(t) = A$), otrzymamy:

$$2A = 1, \text{ skąd: } A = 1/2 = y_{wym}(t) \text{ (zauważmy, że w tym przypadku } dy/dt = 0).$$

Zgodnie z (2.19) całkowita odpowiedź układu na zadane wymuszenie ma postać:

$$y(t) = y_{sw}(t) + y_{wym}(t) = C_1 e^{-2t} + 0,5$$

Współczynnik C_1 można określić na podstawie warunku początkowego:

$$y(0) = (C_1 e^{-2t} + 0,5)_{t=0} = 4,$$

$$\text{skąd: } C_1 = 4 - 0,5 = 3,5.$$

Odpowiedź układu jest w tym przypadku równa: $y(t) = 3,5e^{-2t} + 0,5$.

Przykład 2.4. Określić odpowiedź wymuszoną (rozwiązanie szczegółowe), rozwiązanie swobodne i rozwiązanie pełne następującego równania:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = t^3 + t, \text{ przy warunkach początkowych: } y(0) = 0, y'(0) = 20.$$

Wymuszenie jest funkcją wielomianową, więc zakładamy rozwiązanie szczegółowe o postaci:

$$y_{wym}(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3$$

Po wstawieniu tej funkcji do wyjściowego równania otrzymamy:

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + 2(A_1 + 2A_2 t + 3A_3 t^2) + 4A_2 + 12A_3 t = t^3 + t$$

Porządkując obie strony równania względem potęg zmiennej t otrzymamy:

$$A_3 t^3 + (A_2 + 6A_3)t^2 + (A_1 + 4A_2 + 6A_3)t + A_0 + 2A_1 + 2A_2 = t^3 + t,$$

skąd uzyskujemy następujące warunki równości obu stron równania:

$$A_3 = 1, A_2 + 6A_3 = 0, A_1 + 4A_2 + 6A_3 = 1, A_0 + 2A_1 + 2A_2 = 0.$$

Ten układ czterech równań ma następujące rozwiązanie:

$$A_0 = -26, A_1 = 19, A_2 = -6, A_3 = 1.$$

$$\text{A zatem: } y_{wym}(t) = -26 + 19t - 6t^2 + t^3.$$

W celu określenia rozwiązania swobodnego $y_{sw}(t)$ należy określić pierwiastki równania charakterystycznego:

$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$, a więc: $r_1 = r_2 = -1$.

Rozwiązanie swobodne ma zatem następującą postać: $y_{sw}(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$.

Pełne rozwiązanie równania niejednorodnego wyznaczamy według (2.19):

$$y(t) = y_{sw}(t) + y_{wym}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} - 26 + 19t - 6t^2 + t^3.$$

W celu określenia współczynników C_1 , C_2 należy posłużyć się warunkami początkowymi. Są one określone dla $t = 0$. Mamy stąd dwa równania:

$$y(0) = (C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} - 26 + 19t - 6t^2 + t^3)|_{t=0} = 0,$$

$$y'(0) = (-C_1 e^{-t} + C_2 (1-t)e^{-t} + 19 - 12t + 3t^2)|_{t=0} = 20.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy: $C_1 = 26$, zaś z drugiego: $C_2 = 27$.

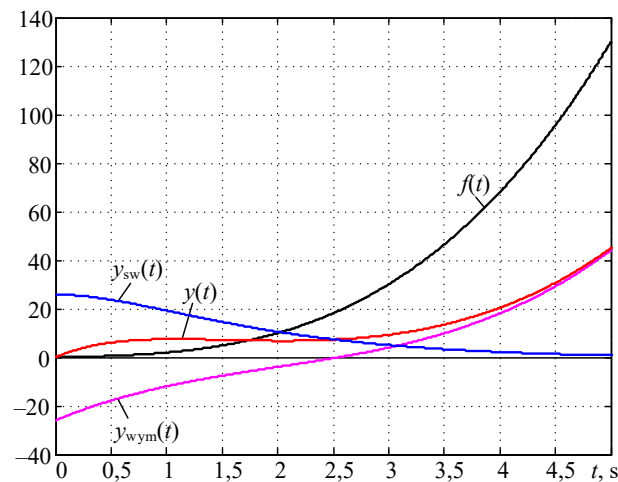
Odpowiedź swobodna jest następująca:

$$y_{sw}(t) = (26 + 27t)e^{-t}.$$

Ostatecznie otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$y(t) = (26 + 27t)e^{-t} - 26 + 19t - 6t^2 + t^3.$$

Jego poprawność można sprawdzić przez podstawienie odpowiednich relacji do zadanego równania. Przebiegi poszczególnych funkcji składowych związanych z rozpatrywanym równaniem są pokazane na rys. 2.9.



Rys. 2.9. Przebiegi funkcji składowych w równaniu różniczkowym

Obserwując przebiegi na rys. 2.9 można zauważyć, że składowa przejściowa $y_{sw}(t)$ z czasem zmierza do zera (układ jest stabilny), przez co pełna odpowiedź układu $y(t)$ zbliża się do odpowiedzi wymuszonej $y_{wym}(t)$.

2.3.2. Zastosowanie do analizy systemów

Na podstawie tego krótkiego przeglądu zagadnień związanych z rozwiązywaniem równań różniczkowych, opisujących dynamikę systemów liniowych inwariantnych, można sformułować następujące wnioski:

1. Odpowiedź systemu na wymuszenie w postaci sygnału wejściowego określonego przez funkcję $f(t)$ jest utworzona z dwóch części: składowej swobodnej - której przebieg zależy od parametrów systemu i jego warunków początkowych oraz składowej wymuszonej, której postać zależy od parametrów systemu i charakteru wymuszenia.
2. Odpowiedź swobodna jest utworzona ze składników o postaci: $y_k(y) = e^{r_k t}$ lub $y_k(t) = e^{at} \cos bt$ z ewentualnym czynnikiem w postaci zmiennej t reprezentującej czas (w odpowiedniej potęgze), przy czym stałe r_k oraz a (jako składniki rzeczywiste zespolonych liczb: $a + jb$) są odpowiednimi pierwiastkami równania charakterystycznego. Można zauważyć, że jeśli pierwiastki rzeczywiste tego równania są ujemne lub – w przypadku pierwiastków zespolonych – mają ujemne części rzeczywiste, to powyższe składniki odpowiedzi z czasem zanikają do zera. Dlatego też odpowiedź swobodna jest także nazywana *przejściową lub zanikającą*. Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to (nawet przy braku wymuszenia) odpowiedź z czasem narasta nieograniczenie. Taki system jest *niestabilny*. W przypadku zerowych pierwiastków rzeczywistych (lub zespolonych z zerową częścią rzeczywistą) mamy do czynienia z sytuacją graniczną (*granica stabilności*).
3. W przypadku stabilnego systemu stan przejściowy (odpowiedź swobodna) z czasem zanika i całkowita odpowiedź zależy wówczas tylko od parametrów systemu i charakteru wymuszenia. System osiąga *stan ustalony*.

2.4. Analiza systemów opisanych równaniami różniczkowymi

2.4.1. Wprowadzenie

W analizie systemów, których dynamika jest opisana za pomocą równań różniczkowych, ważną rolę odgrywa stosowanie wymuszenia w postaci impulsu Diraca. W ogólnym przypadku:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = \delta(t) \quad (2.23)$$

Rozwiązanie tego równania (odpowiedź) jest nazywana funkcją wagi $g(t) = y(t)$:

$$g^{(n)}(t) + a_{n-1}g^{(n-1)}(t) + \dots + a_2g''(t) + a_1g'(t) + a_0g(t) = \delta(t) \quad (2.24)$$

Funkcja wagi jest zatem odpowiedzią impulsową układu.

Równanie (2.24) wymaga ostrożnej analizy występujących tam funkcji. Przede wszystkim z warunku przyczynowości oraz liniowości układu wynika, że funkcja wagi $g(t)$ jest ciągła w czasie dla wszystkich układów opisanych równaniami różniczkowymi rzędu większego niż pierwszy. Stąd wynika, że:

$$g(0) = g_{0-} = g_{0+} = 0, \quad (2.25)$$

gdyż $g(t) = 0$ dla $t < 0$, gdzie g_{0-} , g_{0+} oznaczają odpowiednio, granicę lewostronną i prawostronną (od strony ujemnych lub dodatnich wartości zmiennej t).

Całkując obustronnie (2.24) w przedziale różnej od zera wartości funkcji $\delta(t)$, otrzymamy [13]:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^{(n)}(t)dt + a_{n-1} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^{(n-1)}(t)dt + \dots + a_1 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g'(t)dt + a_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g(t)dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \delta(t)dt, \quad (2.26)$$

gdzie $\tau \rightarrow 0$.

Wskazany przedział całkowania ($\tau \rightarrow 0$) jest uzasadniony ciągłością $g(t)$ oraz tym, że impuls $\delta(t) = 0$ za wyjątkiem $t = 0$. Z prawej strony równania otrzymuje się wartość 1, natomiast wszystkie składniki lewej strony są równe zero za wyjątkiem pierwszego z nich:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^{(n)}(t)dt = \frac{d^{(n-1)}g(t)}{dt^{(n-1)}} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = g_{0+}^{(n-1)} - g_{0-}^{(n-1)} = g_{0+}^{(n-1)}, \quad (2.27)$$

gdyż $g_{0-}^{(n-1)} = 0$.

Można to uzasadnić, rozpatrując układ drugiego rzędu ($n = 2$). Warunek ciągłości nie może dotyczyć pierwszej pochodnej w punkcie $t = 0$, gdyż wówczas:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} (g''(t) + a_1 g'(t) + a_0 g(t))dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (g''(t) + a_1 g'(t))dt + 0 = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \delta(t)dt = 1$$

Zależność tę można przedstawić następująco:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} (g''(t) + a_1 g'(t))dt = g'(\tau/2) - g'(-\tau/2) + a_1 (g(\tau/2) - g(-\tau/2)) = 1, \quad \tau \rightarrow 0,$$

co prowadzi do następującej relacji: $g'(0_+) = 1$.

Powyższą analizę można rozszerzyć na dowolne równanie różniczkowe rzędu $n > 1$. Ostatecznie rezultat całkowania (2.26) wraz z (2.25) dają następujące warunki początkowe dla równania (2.24) [13]:

$$g_{0+}^{(n-1)} = 1, g_{0+}^{(n-2)} = 0, \dots, g(0) = 0 \quad (2.28)$$

Zależności (2.25) oraz (2.28) pozwalają określić odpowiedź impulsową (funkcję wagi) układu na podstawie jego równania różniczkowego. Warto zauważyć, że odpowiedź ta jest obliczana na podstawie równania jednorodnego z powyższymi warunkami, gdyż funkcja wymuszająca $f(t) = \delta(t)$ ma zerową wartość za wyjątkiem punktu $t = 0$.

Przykład 2.5. Określić funkcję wagi układu z poprzedniego przykładu. Równanie jednorodne ma następującą postać: $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 0$.

Miejscami zerowymi funkcji charakterystycznej są dwie jednakowe liczby:

$$r_1 = r_2 = -1.$$

Stan przejściowy jest zatem określony przez następującą funkcję:

$$y_{sw}(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t},$$

którą jest poszukiwana funkcja wagi: $g(t) = y_{sw}(t)$. Współczynniki tego równania można wyznaczyć na podstawie podanych powyżej zależności:

$$g(0) = (C_1 + C_2 t) e^{-t} \Big|_{t=0} = 0, \quad g'(0) = -(C_1 + C_2(t-1)) e^{-t} \Big|_{t=0} = 1.$$

A więc: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, co daje:

$$g(t) = t e^{-t} 1(t).$$

W przypadku równania różniczkowego pierwszego rzędu funkcja wagi $g(t)$ nie jest już funkcją ciągłą dla $t = 0$, natomiast przybiera ona wartość 1: $g(0) = 1$. Stąd też:

$$g(0) = g_{0+} = 1 \quad (2.29)$$

oraz:

$$g(0) = C_1 e^{r t} \Big|_{t=0} = 1, \text{ a zatem: } C_1 = 1.$$

Podane powyżej zasady obliczania funkcji wagi układu liniowego na podstawie jego równania różniczkowego są, na gruncie teorii dystrybucji, ujęte w postaci następującego twierdzenia [59].

Rozwiązanie dystrybucyjne równania (2.23) jest określone wzorem:

$$y(t) = 1(t)z(t) \quad (2.30)$$

gdzie $z(t)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego:

$$z^{(n)}(t) + a_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \dots + a_2z''(t) + a_1z'(t) + a_0z(t) = 0 \quad (2.31)$$

przy następujących warunkach początkowych:

$$z^{(n-1)}(0) = 1, \quad z^{(n-2)}(0) = z^{(n-3)}(0) = \dots = z(0) = 0 \quad (2.32)$$

Widać stąd, że funkcja wagi $g(t) = y(t)$, odpowiadająca równaniu (2.24), jest odpowiedzią przejściową obliczoną przy powyższych warunkach początkowych.

Przykład 2.6. Określić funkcję wagi układu, którego równanie różniczkowe jednorodne ma następującą postać: $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T}y = 0$.

Funkcja charakterystyczna: $r + 1/T = 0$ ma rozwiązanie: $r = -1/T$. Rozwiązanie równania jednorodnego ma zatem następującą postać:

$$y_{\text{sw}}(t) = C_1 e^{rt} = C_1 e^{-t/T}.$$

Na podstawie powyższych rozważań $C_1 = 1$, więc odpowiedź impulsowa jest następująca:

$$g(t) = y_{\text{sw}}(t) = e^{-t/T} l(t).$$

Warto zauważyć, że funkcja skoku jednostkowego w powyższym wyrażeniu ma na celu zerowanie odpowiedzi impulsowej (funkcji wagi) dla czasu $t \leq 0$.

Podsumowując, można podać następujące zasady obliczania odpowiedzi impulsowej (funkcji wagi) układu LTI na podstawie jego równania różniczkowego:

- rozwiązanie ma tylko składową przejściową o postaci (2.30);
- w celu jego wyznaczenia rozpatruje się równanie jednorodne, w którym współczynniki C_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (2.21) są obliczane na podstawie warunków początkowych (2.32).

Znajomość funkcji wagi pozwala określić rozwiązanie równania różniczkowego rozpatrywanego systemu dla dowolnego wymuszenia $u(t)$ przy zerowych warunkach początkowych:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) g(t - \tau) d\tau = u(t) \otimes g(t) \quad (2.33)$$

Powyższy związek jest nazywany splotem dwóch funkcji (sygnałów): $u(t)$ oraz $g(t)$. Splot jest operacją przemenną, więc:

$$u(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau = g(t) \otimes u(t) \quad (2.34)$$

Powyższa operacja tłumaczy również charakter związku, który został w sposób ogólny użyty na rys. 2.3. W przypadku rozważanych tu układów liniowych, niezależnych od czasu związkiem tym jest operacja splotu sygnału wejściowego i funkcji wagi. Bardziej praktyczna operacja splotu zachodzi dla przypadku, gdy spełnione są warunki: dla $t < 0$, $u(t) = 0$ oraz dla $(t - \tau) < 0$, $g(t - \tau) = 0$. Wówczas:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (2.35)$$

Przykład 2.7. Określić odpowiedź układu o funkcji wagi: $g(t) = e^{-t/T} l(t)$ (patrz przykład 2.6) na skok jednostkowy: $u(t) = l(t)$.

Podstawiając poszczególne funkcje do (2.35), otrzymamy:

$$y_1(t) = \int_0^t l(\tau) \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} d\tau = e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T}} d\tau = T e^{-\frac{t}{T}} \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right) l(t) = T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) l(t)$$

Przykład 2.8. W przykładzie 2.5 otrzymaliśmy następującą funkcję wagi:
 $g(t) = te^{-t} l(t)$ analizowanego układu. Określić odpowiedź tego układu na skok jednostkowy.

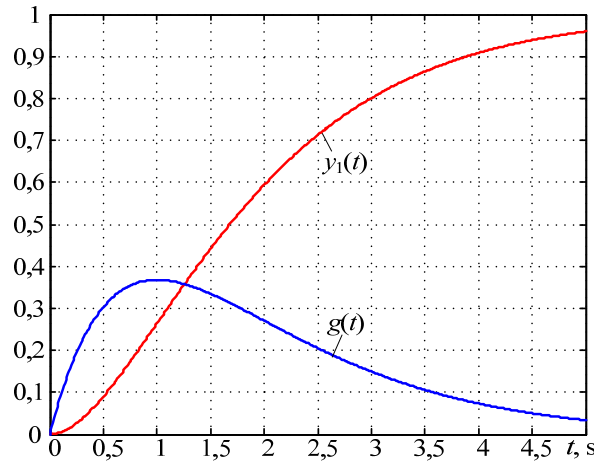
Odpowiedź na skok jednostkowy jest określona za pomocą całki:

$$y_1(t) = \int_0^t l(\tau) \cdot (t - \tau) \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = te^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau - e^{-t} \int_0^t \tau e^{\tau} d\tau.$$

Stosując całkowanie przez części w odniesieniu do drugiej całki, po uproszczeniu otrzymamy:

$$y_1(t) = 1 - (t+1)e^{-t}.$$

Przebiegi funkcji wagi $g(t)$ oraz odpowiedzi na skok jednostkowy $y_1(t)$ dla rozważanego systemu są pokazane na rys. 2.10.



Rys. 2.10. Przebiegi funkcji wagi: $g(t)$ oraz odpowiedzi na skok jednostkowy: $y_1(t)$

Odpowiedź na dowolne wymuszenie $u(t)$ można też wyznaczyć, znając odpowiedź układu na skok jednostkowy $y_1(t)$. Wyznacza to tzw. równanie Duhamel'a⁴:

$$y(t) = u(0)y_1(t) + \int_0^t y_1(t - \tau)u'(\tau)d\tau \quad (2.36)$$

⁴ Jean-Marie-Constant Duhamel (1797-1872), matematyk i fizyk francuski; prace na temat równań różniczkowych cząstkowych i transportu ciepła.

Jest to bardzo użyteczny związek, gdyż z punktu widzenia funkcjonowania układu i fizycznej oceny jego właściwości dynamicznych, najbardziej miarodajną jest odpowiedź na skok jednostkowy $y_1(t)$.

2.4.2. Odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne

Zauważmy, że stan przejściowy systemu na wymuszenie w postaci funkcji impulsowej lub skoku jednostkowego z czasem zanika. Tę właściwość mają stabilne układy liniowe. Domyślamy się, że jest to wynikiem zaniku zmian wymuszenia. Interesujące jest zatem badanie odpowiedzi systemu przy wymuszeniu harmonicznym (sinusoidalnie zmiennym). Wyjaśnia to następujący przykład.

Przykład 2.9. Określić odpowiedź układu rozważanego w przykładzie 2.6 na sygnał o postaci: $u(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$.

Przypomnijmy, że w przykładzie 2.6 rozważany jest układ, którego jednorodne równanie różniczkowe ma następującą postać: $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T} y = 0$.

W przykładzie 2.6 otrzymaliśmy następującą funkcję wagi: $g(t) = e^{-t/T} l(t)$ tego układu. Pozostaje zatem obliczenie całki (2.35) dla zadanego wymuszenia harmonicznego (przy zerowych warunkach początkowych):

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t A \sin(\omega_0 \tau + \phi) \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} d\tau = A e^{-t/T} \int_0^t \sin(\omega_0 \tau + \phi) \cdot e^{\tau/T} d\tau.$$

Ponieważ $\sin(\omega_0 t + \phi) = \sin(\omega_0 t) \cos \phi + \cos(\omega_0 t) \sin \phi$, więc:

$$y(t) = A e^{-t/T} \left(\cos \phi \int_0^t \sin(\omega_0 \tau) \cdot e^{\tau/T} d\tau + \sin \phi \int_0^t \cos(\omega_0 \tau) \cdot e^{\tau/T} d\tau \right).$$

Do obliczenia powyższych całek można skorzystać z metody całkowania przez części, co daje:

$$\int_0^t \sin(\omega_0 \tau) \cdot e^{\tau/T} d\tau = \frac{1}{\omega_0^2 + 1/T^2} \left(e^{t/T} \left(\frac{1}{T} \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos \omega_0 t \right) + \omega_0 \right),$$

$$\int_0^t \cos(\omega_0 \tau) \cdot e^{\tau/T} d\tau = \frac{1}{\omega_0^2 + 1/T^2} \left(e^{t/T} \left(\omega_0 \sin \omega_0 t + \frac{1}{T} \cos \omega_0 t \right) - \frac{1}{T} \right).$$

Po wykonaniu niezbędnych przekształceń otrzymamy ostateczną odpowiedź:

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{\omega_0^2 + 1/T^2}} \left(\sin(\omega_0 t + \phi - \delta) - e^{-t/T} \sin(\phi - \delta) \right),$$

gdzie: $\delta = \arctg(\omega_0 / (1/T))$.

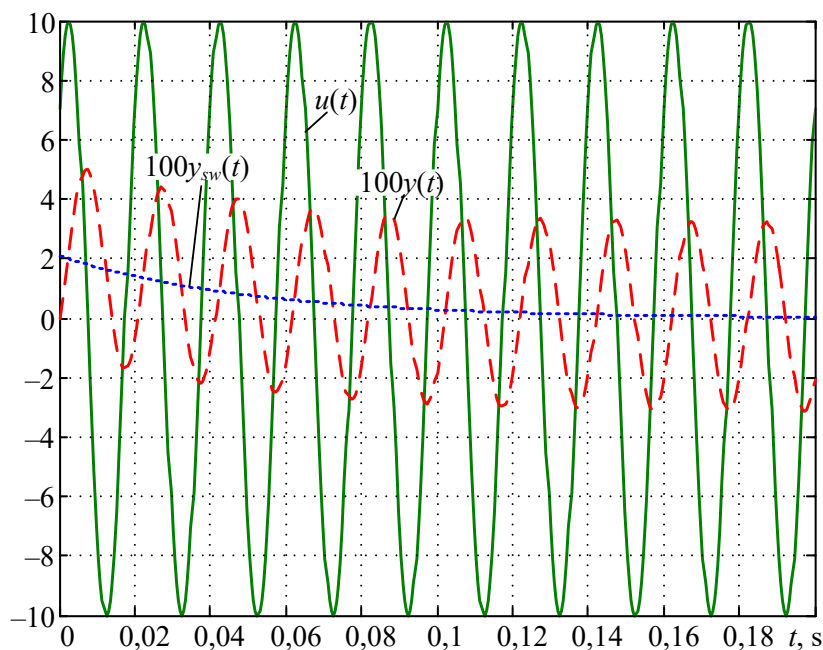
Widać, że odpowiedź badanego systemu na wymuszenie sinusoidalne składa się z dwóch części, z których pierwsza przedstawia funkcję harmoniczną o pulsacji równej pulsacji funkcji wymuszającej, a druga przedstawia funkcję zanikającą wykładniczo do zera ($y_{sw}(t)$). Maksymalna początkowa amplituda składowej zanikającej występuje dla $\phi = \delta \pm \pi/2$.

Na rys. 2.11 są pokazane przebiegi sygnału wymuszającego $u(t)$, a także odpowiedzi $y(t)$ i odpowiedzi przejściowej $y_{sw}(t)$ dla następujących parametrów układu:

$$A = 10, T = 0,05, \omega_0 = 100\pi, \varphi = \pi/4.$$

Przebiegi odpowiedzi są powiększone sto razy.

Można zauważyć, że w przypadku układów liniowych inwariantnych odpowiedź ustalona (składowa wymuszona odpowiedzi, po zaniku składowej przejściowej) przy wymuszeniu harmonicznym, jest również przebiegiem harmonicznym o tej samej częstotliwości. Możliwa jest natomiast zmiana fazy oraz amplitudy sygnału wyjściowego. Stopień zmiany amplitudy (wzmocnienie lub tłumienie) oraz fazy sygnału wyjściowego zależy od zadanej częstotliwości sygnału wejściowego. Oba te parametry: wzmocnienie oraz przesunięcie fazy wyznaczone dla pewnego zakresu zmian częstotliwości tworzą, odpowiednio, charakterystykę amplitudową oraz charakterystykę fazową badanego układu. Dostarczają one ważnych informacji o właściwościach układu i będą przedmiotem analizy w dalszych rozważaniach.



Rys. 2.11. Przebiegi: wymuszenia harmonicznego oraz odpowiedzi układu

2.4.3. Odpowiedź szeregowo połączonych układów

Na podstawie (2.33), odpowiedź układu o funkcji impulsowej $g_1(t)$ na wymuszenie $u_1(t)$ jest następująca:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\tau_1) u_1(t - \tau_1) d\tau_1 = g_1(t) \otimes u_1(t) \quad (2.37)$$

Jeśli wymuszenie $u_1(t)$ jest sygnałem wyjściowym z innego układu o funkcji impulsowej $g_0(t)$ i wymuszeniu $u_0(t)$, to można napisać:

$$u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\tau_0) u_0(t - \tau_0) d\tau_0 = g_0(t) \otimes u_0(t) \quad (2.38)$$

Podstawiając (2.38) do (2.37), otrzymamy:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\tau_1) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\tau_0) u_0(t - \tau_0 - \tau_1) d\tau_0 \right) d\tau_1 = g_1(t) \otimes (g_0(t) \otimes u_0(t)) \quad (2.39)$$

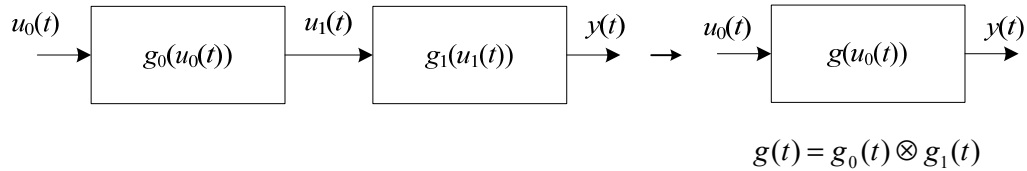
Powtarzając tę procedurę dla odwrotnej kolejności układów łatwo pokazać, że:

$$g_1(t) \otimes (g_0(t) \otimes u_0(t)) = (g_1(t) \otimes u_0(t)) \otimes g_0(t) = g_1(t) \otimes g_0(t) \otimes u_0(t) \quad (2.40)$$

Widać stąd, że dla szeregowo połączonych układów o funkcjach impulsowych, odpowiednio, $g_0(t)$ oraz $g_1(t)$, obowiązuje zależność (rys. 2.12):

$$g(t) = g_0(t) \otimes g_1(t) \quad (2.41)$$

gdzie $g(t)$ jest funkcją impulsową ekwiwalentnego układu.



Rys. 2.12. Ekwiwalent szeregowo połączonych bloków

Zadania

2.1. Pokazać, że równanie:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy^2(t)}{dt} + 4y(t) = u(t) \text{ nie spełnia warunku liniowości.}$$

2.2. Określić rozwiązanie podanego równania różniczkowego:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t), \text{ gdzie: } y(0) = 0, y'(0) = -1, x(t) = t^2.$$

2.3. Określić sygnał wejściowy $u(t)$ układu opisanego równaniem:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

dla każdego z następujących sygnałów wyjściowych $y(t)$:

- a) $y(t) = t^2$,
- b) $y(t) = e^{j\omega_0 t}$, gdzie ω_0 ma stałą wartość,
- c) $y(t) = t^2 e^{j\omega_0 t}$.

- 2.4. Dla jakiej wartości pulsacji ω_0 w zadaniu 2.3b funkcja wymuszająca $u(t) = 0$?
- 2.5. Załóżmy, że w układzie mechanicznym pokazanym na rys. 2.1b tłumienie jest niewielkie i można przyjąć $D = 0$. Wówczas, przy sinusoidalnym wymuszeniu równanie (2.4) przyjmie następującą postać:

$$M \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + K v(t) = A \sin \omega t$$

Określić rozwiązanie tego równania przy zerowych warunkach początkowych: $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$.

- 2.6. Odpowiedź liniowego inwariantnego systemu na wymuszenie:

$u(t) = -K_1 \omega_0^2 \cos \omega_0 t + 6K_2 t$ ma następującą postać:

$y(t) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 t^3$, gdzie K_1, K_2 – stałe. Jaka będzie odpowiedź układu na wymuszenia:

- a) $u(t) = 2 \cos \omega_0 t$,
- b) $u(t) = t - 3$,
- c) jak wygląda równanie dynamiki systemu?

- 2.7. Funkcja impulsowa liniowego układu inwariantnego jest następująca: $g(t) = e^{-\alpha t} 1(t)$, gdzie α jest stałym współczynnikiem. Określić odpowiedź układu na następujące wymuszenia:

- a) $u(t) = \delta(t)$,
- b) $u(t) = 1(t)$,
- c) $u(t) = e^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 = \text{const.}$

- 2.8. Obliczyć odpowiedź impulsową układu określonego następującym równaniem różniczkowym (zastosować procedurę (2.30)):

- a) $\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = u(t)$,
- b) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$,
- c) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = u(t)$,
- d) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 10 \frac{dy(t)}{dt} + 29y(t) = u(t)$.

- 2.9. Funkcja impulsowa (odpowiedź na impuls Diraca) liniowego układu inwariantnego jest następująca:

$g(t) = \sin \omega_0 e^{-\alpha t} 1(t)$, ω_0, α – stałe parametry. Określić odpowiedź układu na następujące wymuszenia:

- a) $u(t) = \delta(t - t_0)$, $t_0 > 0$,
- b) $u(t) = \cos(\omega_0 t)$.

3. ANALIZA SYSTEMÓW ZA POMOCĄ METOD OPERATOROWYCH

3.1. Przekształcenie Fouriera

W klasycznym podejściu przekształcenie Fouriera⁵ wyprowadza się z szeregów Fouriera, które odnoszą się do przebiegów okresowych. Okresowa funkcja $f(t)$ (w ogólnym przypadku funkcja zespolona) ciągłej niezależnej zmiennej t (zazwyczaj jest to czas, chociaż można rozważać także inną wielkość) z okresem T może być przedstawiona w postaci następującego szeregu, zwanego szeregiem Fouriera:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{dla } -T/2 \leq t \leq T/2 \quad (3.1)$$

gdzie: $\omega_0 = 2\pi/T$, natomiast zespolone współczynniki a_k są określone następującym związkiem:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.2)$$

Równość (3.1) jest zachowana, jeśli funkcja $f(t)$ spełnia warunki Dirichleta⁶ [14]:

- funkcja $f(t)$ jest jednowartościowa w rozpatrywanym przedziale $-T/2 \leq t \leq T/2$;
- $f(t)$ może mieć tylko skończoną liczbę maksimów i minimów w dowolnym skończonym przedziale czasu;
- $f(t)$ może mieć tylko skończoną liczbę nieciągłości w przedziale $-T/2 \leq t \leq T/2$;
- spełniona jest nierówność: $\int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)| dt < \infty$.

Warunki te spełnia większość praktycznych sygnałów występujących w układach regulacji. W punktach nieciągłości funkcji $f(t)$ jej wartość należy przyjąć jako średnią z lewej i prawej granicy w punkcie nieciągłości.

⁵ Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matematyk francuski. Prace z zakresu teorii funkcji, rachunku całkowego, równań różniczkowych i fizyki matematycznej.

⁶ Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), niemiecki matematyk francuskiego pochodzenia. Był wykładowcą uniwersytetów we Wrocławiu, Berlinie i Getyndze.

Współczynniki a_k można interpretować jako zespoloną amplitudę sygnału $f(t)$ dla częstotliwości $k\omega_0$ (k -tej harmonicznej przy pulsacji podstawowej ω_0):

$$a_k = \operatorname{Re}\{a_k\} + j\operatorname{Im}\{a_k\} \quad (3.3)$$

Łatwo więc określić amplitudę i fazę poszczególnych współczynników rozkładu (3.1), które w ten sposób tworzą amplitudowe i fazowe widmo okresowego sygnału $f(t)$.

W przypadku, gdy $f(t)$ jest rzeczywistym sygnałem okresowym, reprezentacja (3.1) redukuje się do postaci:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(k\omega_0 t), \quad (3.4)$$

przy czym:

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \text{ dla } k > 0: b_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt, c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt.$$

Można zauważyć, że widmo sygnału okresowego (a więc zbiór współczynników a_k) jest dyskretne względem pulsacji. Okres dyskretyzacji jest równy pulsacji podstawowej ω_0 .

Całkowe przekształcenie Fouriera, które odnosi się również do przebiegów nieokresowych, można uzyskać przez wydłużenie okresu sygnału w zależnościach (3.1) i (3.2) w granicy do nieskończoności, co także oznacza, że szerokość przedziału pulsacji podstawowej ω_0 zmierza do zera: $T \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow 0$. Sumowanie w (3.1) zostaje wówczas zastąpione operacją całkowania. Prowadzi to do następującej pary przekształceń całkowych [47]:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.6)$$

znanych jako proste (3.5) i odwrotne (3.6) przekształcenie Fouriera. Są one często zapisywane w następującej skróconej formie:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} \end{aligned}$$

Transformata $F(j\omega)$ jest funkcją względem pulsacji ω , a stała 'j' jest niekiedy opuszczana, jednak w tym zapisie podkreślona jest zespolona postać transformaty Fouriera, a ponadto zachowany zostaje jej związek z omawianą dalej transformatą Laplace'a.

Wystarczającym warunkiem istnienia transformaty Fouriera $F(j\omega)$ dla danej funkcji $f(t)$ jest spełnienie przez tę funkcję ostatniego z podanych warunków Dirichleta dla $T \rightarrow \infty$ [14]. Ten warunek już nie jest tak łatwo spełnić i dlatego istnieje duża klasa funkcji, dla których transformata Fouriera nie istnieje.

Przekształcenie Fouriera odgrywa bardzo ważną rolę w zakresie przetwarzania sygnałów ciągłych i dyskretnych, projektowania filtrów, a także jako wydajne narzędzie do rozwiązywania równań różniczkowych i analizy systemów [14, 47]. W praktycznych zastosowaniach najczęściej korzysta się z różnych właściwości przekształcenia oraz znanych par przekształceń $F(j\omega) \leftrightarrow f(t)$ typowych funkcji, które zostały określone na podstawie zależności (3.5) i (3.6).

Przykład 3.1. Określić transformatę Fouriera impulsu Diraca.

Zgodnie z (3.5) możemy napisać:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1, \text{ ale } \mathcal{F}\{\delta(t - \beta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \beta) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega\beta},$$

co wprost wynika z (2.14).

W przypadku analizy systemów sterowania funkcja względem czasu jest ograniczona do przedziału $0 \leq t < \infty$, przyjmując zerową wartość poza nim. Wobec tego w (3.5) granicę całkowania można także ograniczyć do tego przedziału:

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.7)$$

gdzie indeks I wskazuje na przekształcenie jednostronne.

Mówimy wówczas o jednostronnym przekształceniu Fouriera, które ma zastosowanie w analizie systemów dynamicznych. Wspomniane ograniczenia nie obejmują dziedziny częstotliwości (pulsacji), więc przekształcenie odwrotne (3.6) pozostaje bez zmian. Ograniczenie przedziału całkowania w (3.7) jest równoważne pomnożeniu funkcji czasu przez skok jednostkowy $1(t)$. Można to zapisać następująco:

$$\mathcal{F}_1\{f(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)1(t)\} \quad (3.8)$$

Przykład 3.2. Określić jednostronną transformatę Fouriera pochodnej funkcji.

Korzystając z (3.8) oraz stosując całkowanie przez części, otrzymamy:

$$\mathcal{F}_1\{f'(t)\} = \mathcal{F}\{f'(t)1(t)\} = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_0^{+\infty} + j\omega \int_0^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega F_1(j\omega) - f(0).$$

Procedurę tę można rozszerzyć na wyższe pochodne:

$$\mathcal{F}_1\{f^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n F_1(j\omega) - f^{(n-1)}(0) - j\omega f^{(n-2)}(0) - \dots - (j\omega)^{n-2} f'(0) - (j\omega)^{n-1} f(0).$$

A więc różniczkowanie funkcji prowadzi do pomnożenia jej transformaty przez czynnik $j\omega$ z uwzględnieniem warunków początkowych. W pełnym przekształceniu dwustronnym warunki początkowe nie występują.

Podstawowe właściwości przekształcenia Fouriera są zebrane w Tabeli 3.1, natomiast w Tabeli 3.2 podane są transformaty Fouriera podstawowych funkcji względem czasu.

Tabela 3.1. Podstawowe właściwości przekształcenia Fouriera

liniowość:	$\mathcal{F}\{\alpha p(t) + \beta q(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{p(t)\} + \beta \mathcal{F}\{q(t)\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\{\alpha P(j\omega) + \beta Q(j\omega)\} = \alpha \mathcal{F}^{-1}\{P(j\omega)\} + \beta \mathcal{F}^{-1}\{Q(j\omega)\}$
przesunięcie w dziedzinie czasu:	$\mathcal{F}\{f(t - \tau)\} = F(j\omega)e^{-j\omega\tau}$
przesunięcie w dziedzinie częstotliwości (modulacja):	$\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(j(\omega - \omega_0))$
skalowanie:	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
różniczkowanie po czasie (zerowe warunki początkowe):	$\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega F(j\omega), \text{ ogólnie: } \mathcal{F}\left\{\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right\} = (j\omega)^k F(j\omega)$
całkowanie funkcji:	$\mathcal{F}\left\{\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} F(j\omega); \text{ całka } \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \text{ musi dążyć do zera dla } t \rightarrow \pm\infty$
różniczkowanie po częstotliwości (zerowe warunki początkowe):	$\mathcal{F}\{t \cdot f(t)\} = j \frac{dF(j\omega)}{d\omega}, \text{ ogólnie: } \mathcal{F}\{t^n \cdot f(t)\} = j^n \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$
splot:	$\mathcal{F}\{f(t) \otimes g(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau\right\} = F(j\omega) \cdot G(j\omega)$
mnożenie:	$\mathcal{F}\{f(t) \cdot g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\xi)G(j(\omega-\xi)) d\xi = F(j\omega) \otimes G(j\omega)$
transmitancja:	$G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$
symetria przekształcenia (symetria dualna):	jeżeli: $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, to wówczas: $F(t) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}\{f(-j\omega)\}$

Tabela 3.2. Transformaty Fouriera wybranych funkcji

$f(t)$	$F(j\omega)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$1(t)e^{-(a+j\beta)t}, \alpha > 0$	$\frac{1}{a + j\beta + j\omega}$
$\cos\alpha t \cdot f(t)$	$\frac{1}{2}(F(j(\omega - \alpha)) + F(j(\omega + \alpha)))$
$\sin\alpha t \cdot f(t)$	$\frac{1}{2j}(F(j(\omega - \alpha)) - F(j(\omega + \alpha)))$
$e^{j\beta t}$	$2\pi\delta(\omega - \beta)$
$\sin\alpha t$	$-j\pi(\delta(\omega - \alpha) - \delta(\omega + \alpha))$
$\cos\alpha t$	$\pi(\delta(\omega - \alpha) + \delta(\omega + \alpha))$

Transformata Fouriera funkcji względem czasu (sygnału): $F(j\omega) \leftrightarrow f(t)$ jest obrazem widma tej funkcji. W ogólnym przypadku jest to funkcja zespolona:

$$F(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.9)$$

gdzie $|F(j\omega)|$ przedstawia amplitudę widma (charakterystykę amplitudową), natomiast $\varphi(\omega)$ jest funkcją reprezentującą fazę tego widma (charakterystyką fazową).

Posługując się w (3.5) zależnością:

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

można określić rzeczywistą i urojoną część transformaty $F(j\omega)$ rzeczywistej funkcji $f(t)$ (3.5):

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \operatorname{Re}(F(j\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \\ B(\omega) &= \operatorname{Im}(F(j\omega)) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

Widać stąd, że część rzeczywista transformaty $F(j\omega)$ jest funkcją parzystą: $A(-\omega) = A(\omega)$, natomiast jej część urojona funkcją nieparzystą: $B(-\omega) = -B(\omega)$. Podobnie jest z reprezentacją wykładniczą funkcji $F(j\omega)$: widmo amplitudowe $|F(j\omega)|$ jest funkcją parzystą, a charakterystyka fazowa $\varphi(\omega)$ funkcją nieparzystą.

Ważna właściwość przekształcenia Fouriera dotyczy transformaty splotu dwóch funkcji. Jeżeli (2.33):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)g(t-\tau)d\tau = u(t) \otimes g(t),$$

to transformatę tej operacji można określić następująco:

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} g(t-\tau)dt \right] d\tau$$

A ponieważ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} g(t-\tau)dt = G(j\omega)e^{-j\omega\tau}, \text{ co wynika z transformaty funkcji przesuniętej w}$$

czasie, to:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)u(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = G(j\omega)U(j\omega), \quad (3.11)$$

co jest bardzo ważnym praktycznym wynikiem transformaty splotu dwóch funkcji.

Przykład 3.3. Przedstawić graficznie amplitudę i fazę widma funkcji $u(t) = 1(t)e^{-t/T}$
 $T = 0,02s$.

Posługując się Tabelą 3.2 można wyznaczyć transformatę podanej funkcji:

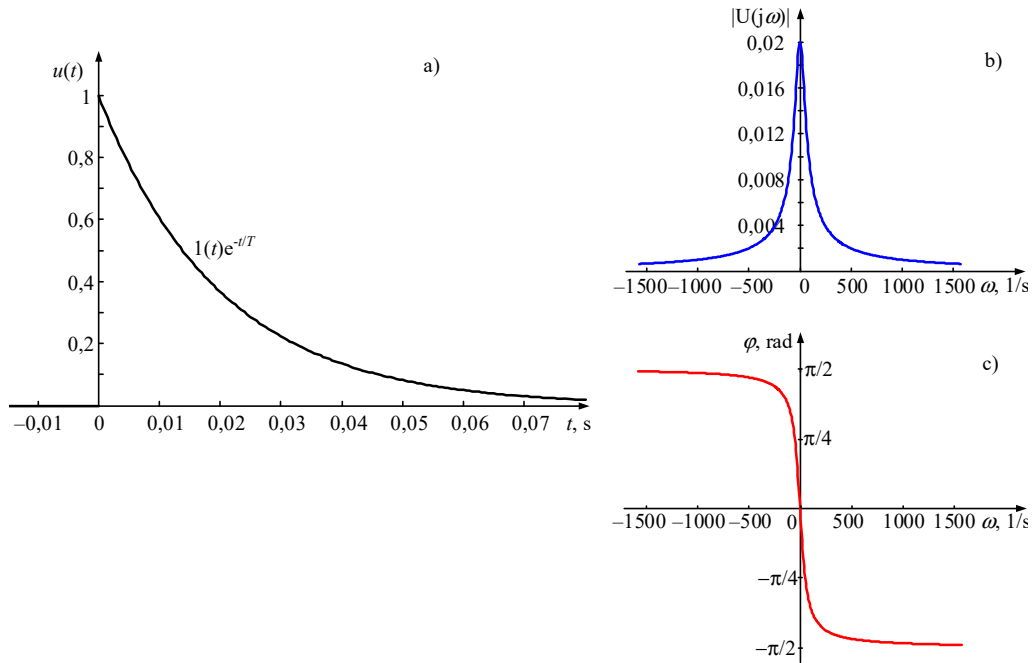
$$U(j\omega) = \mathcal{F}\{1(t)e^{-t/T}\} = \frac{1}{1/T + j\omega}.$$

Amplituda i faza transformaty są zatem następujące:

$$|U(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1/T^2 + \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\text{arctg}(\omega T).$$

Przebiegi funkcji związanych z tym przykładem dla podanej wartości $T = 0,02s$ są pokazane na rys. 3.1.

Przyjrzyjmy się результатам otrzymanym w powyższym przykładzie. Analizowana funkcja przedstawia wykładniczo zanikający sygnał, który ma zerową wartość dla $t < 0$ (rys. 3.1a). Jej charakterystyka częstotliwościowa ma przebieg jak na rys. 3.1b. Dla pulsacji $\omega = 0$ wartość amplitudy jest równa składowej stałej, czyli wartości średniej analizowanego sygnału.



Rys. 3.1. Sygnał a) oraz jego charakterystyka widmowa amplitudy b) i fazy c)

Łatwo sprawdzić na podstawie (3.5), że

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \quad (3.12)$$

Jeśli analizowana funkcja jest funkcją wagi $g(t)$ jakiegoś układu, to jej transformata Fouriera jest nazywana transmitancją widmową (widmową funkcją przejścia) układu:

$$G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.13)$$

Znaczenie transmitancji widmowej wynika bezpośrednio z transformaty Fouriera spłotu dwóch funkcji (Tabela 3.1):

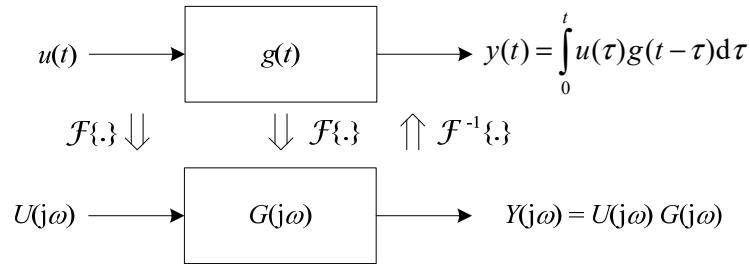
$$\mathcal{F}\{u(t) \otimes g(t)\} = U(j\omega) \cdot G(j\omega) = Y(j\omega) \quad (3.14)$$

skąd:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (3.15)$$

Ilustracja operacji (3.14) jest pokazana na rys. 3.2. Najważniejszą praktyczną konsekwencją przejścia z opisu systemu w dziedzinie czasu do podobnego opisu za pomocą przekształcenia Fouriera jest zastąpienie operacji splotu funkcji wymuszenia i wagi przez mnożenie ich transformat. Ponadto, na podstawie (3.15), transmitancję układu można wyznaczyć na podstawie transformat sygnałów: wyjściowego i wejściowego. Odpowiedź czasowa może być określona przez odwrotne przekształcenie Fouriera tego właśnie iloczynu transformat:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(j\omega) \cdot G(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} \quad (3.16)$$



Rys. 3.2. Opis układu w dziedzinie czasu i częstotliwości

Transmitancję systemu można także bezpośrednio określić na podstawie równania różniczkowego opisującego jego dynamikę. Rozpatrzmy ogólne równanie różniczkowe systemu o postaci, jak w (2.18):

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) \\ = b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_2u''(t) + b_1u'(t) + b_0u(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

przy czym, $n \geq m$.

Równanie to można obustronnie poddać przekształceniu Fouriera. Posługując się właściwością transformaty pochodnej funkcji przy zerowych warunkach początkowych (Tabela 3.1), otrzymamy:

$$\begin{aligned} (j\omega)^n Y(j\omega) + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} Y(j\omega) + \dots + a_1(j\omega) Y(j\omega) + a_0 Y(j\omega) \\ = b_m(j\omega)^m U(j\omega) + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} U(j\omega) + \dots + b_1(j\omega) U(j\omega) + b_0 U(j\omega) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Po uporządkowaniu powyższego równania, otrzymamy następującą relację:

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} = G(j\omega) \quad (3.19)$$

Widać zatem, że transmitancja układu, którego dynamika jest opisana równaniem różniczkowym, jest funkcją wymierną⁷. Na podstawie warunków zapisu dynamiki systemu (3.18) widać, że rząd wielomianu w mianowniku transmitancji (3.19) nie może być mniejszy od rzędu wielomianu w liczniku tej funkcji. Jest to związane z zakładaną przyczynowością rozpatrywanych systemów.

Przykład 3.4. Określić transmitancję widmową układu opisanego następującym równaniem różniczkowym: $a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 u'(t) + b_0 u(t)$.

Obliczając transformatę Fouriera obu stron równania różniczkowego otrzymamy (3.18):

$$Y(j\omega)(a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0) = U(j\omega)(b_1(j\omega) + b_0).$$

Skąd, dla $a_0 = 0,75$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, otrzymamy:

$$Y(j\omega) = \frac{b_0 + j b_1 \omega}{-a_2 \omega^2 + a_0 + j a_1 \omega} U(j\omega) = \frac{1 + 2(j\omega)}{-\omega^2 + 0,75 + j\omega} U(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega).$$

A zatem poszukiwana transmitancja jest następująca:

$$G(j\omega) = \frac{1 + 2(j\omega)}{-\omega^2 + 0,75 + j\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Na podstawie powyższej relacji można określić funkcję wagi, jako odwrotną transformatę transmitancji. Po przekształceniu transmitancji (p. 3.2.3) otrzymamy:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1 + 2j\omega}{-\omega^2 + 0,75 + j\omega}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j(\omega - 1/\sqrt{2}) + 0,5} + \frac{1}{j(\omega + 1/\sqrt{2}) + 0,5}\right\} \\ &= 1(t) \cdot 2e^{-0,5t} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Przykład 3.5. Posługując się transformatą Fouriera określić odpowiedź układu opisanego równaniem różniczkowym:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = t.$$

Niestety, jak łatwo sprawdzić, funkcja leżąca po prawej stronie powyższego równania (wymuszenie) nie spełnia warunku istnienia transformaty Fouriera, gdyż wynik obliczania całki:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| dt = t^2 \Big|_0^{\infty}$$

z pewnością nie jest ograniczony. Zatem podane równanie różniczkowe nie może być przetwarzane za pomocą przekształcenia Fouriera.

Wniosek płynący z przykładu 3.5 wskazuje na duże ograniczenie zastosowania przekształcenia Fouriera do analizy systemów.

⁷ Funkcja wymierna jest ilorazem dwóch wielomianów.

3.2. Przekształcenie Laplace'a

3.2.1. Wprowadzenie

Nawiązując do przykładu 3.5 można zauważyć, że funkcja będąca wymuszeniem w rozpatrywanym równaniu różniczkowym:

$$u(t) = t,$$

spełni warunek przekształcenia Fouriera, jeśli pomnożyć ją przez funkcję wykładniczą $e^{-\sigma t}$, o szczególnych wartościach liczby rzeczywistej σ . Załóżmy, że chcemy określić jednostronną transformatę Fouriera dla tak ograniczonej funkcji:

$$\mathcal{F}_1\{u(t)e^{-\sigma t}\} = \int_0^{\infty} te^{-(\sigma+j\omega)t} dt.$$

Podstawiając: $s = \sigma + j\omega$ otrzymamy:

$$U(\sigma + j\omega) = U(s) = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \left(\frac{1}{s} te^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \quad \text{dla } \operatorname{Re}(s) = \sigma > 0. \quad (3.20)$$

Powyższy związek określa transformatę Laplace'a⁸ funkcji $u(t) = t$. Formalnie transformata Laplace'a jest definiowana za pomocą pary następujących przekształceń:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (3.21)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (3.22)$$

gdzie $s = \sigma + j\omega$.

Podobnie jak w przypadku całki Fouriera związek (3.21) jest nazywany prostym przekształceniem Laplace'a (jednostronnym), a (3.22) – przekształceniem odwrotnym. Bardziej ogólne przekształcenie dwustronne Laplace'a różni się granicą całkowania:

$$F_{II}(s) = \mathcal{L}_{II}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.23)$$

W przypadku analizy systemów, kiedy $f(t) = 0$ dla $t < 0$, powszechnie stosuje się przekształcenie jednostronne.

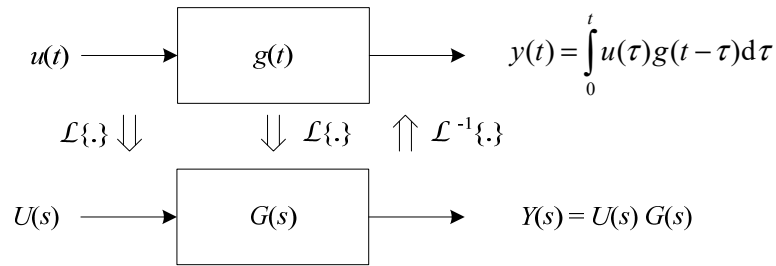
⁸ Pierre Simon de Laplace (1749-1827), matematyk i fizyk francuski, jeden z twórców teorii prawdopodobieństwa.

Jak było pokazane powyżej, odpowiednia wartość części rzeczywistej zmiennej zespolonej $s = \sigma + j\omega$ zapewnia istnienie ograniczonej wartości całki (3.21) dla bardzo szerokiej klasy funkcji. Dzięki temu przekształcenie Laplace'a może być stosowane praktycznie do analizy niemal wszystkich liniowych przyczynowych systemów dynamicznych. Warunek istnienia przekształcenia Laplace'a jest związany z bezwzględną zbieżnością całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_0 t} f(t) dt.$$

Wartość $\sigma = \sigma_0$, która wyznacza zbieżność powyższej całki, jest wartością współrzędnej rzeczywistej w granicach całkowania w przekształceniu odwrotnym (3.22). Jeśli $\sigma_0 = 0$, to przekształcenie Laplace'a nie różni się od przekształcenia Fouriera.

Zasady posługiwania się przekształceniem Laplace'a do analizy systemów dynamicznych są analogiczne do tych, związanych z przekształceniem Fouriera. Wobec tego schemat przetwarzania z rys. 3.2 można przenieść do postaci jak na rys. 3.3.



Rys. 3.3. Struktura przetwarzania związana z posługiwaniem się przekształceniem Laplace'a

Widać, że zachodzą tu następujące relacje:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}, \quad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}.$$

Ponadto transformata Laplace'a splotu jest określona następująco:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \left(\int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-st}dt\right\} &= \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty u(\tau)e^{-s\tau}d\tau \left(\int_0^t g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}d(t-\tau)\right)\right\} \\ &= U(s)G(s) = Y(s) \end{aligned} \quad (3.24)$$

co staje się oczywiste, gdy w drugiej całce dokonamy podstawienia: $t - \tau = x$.

Na podstawie (3.24) widać, że transmitancja układu jest określona podobnie jak w przypadku transformaty Fouriera:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (3.25)$$

Charakterystykę widmową transformowanej funkcji można uzyskać przez podstawienie $\sigma = 0$ do jej transformaty Laplace'a. Na przykład:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \rightarrow G(\sigma + j\omega)|_{\sigma=0} = G(j\omega) \quad (3.26)$$

przy czym $G(j\omega)$ nie musi być transformatą Fouriera funkcji $g(t)$ (może ona nie spełniać warunku istnienia transformaty Fouriera).

Transformaty Laplace'a funkcji można określić bezpośrednio na podstawie przekształcenia (3.21), posługując się także właściwościami przekształcenia (Tabela 3.3). Poniżej podane są niektóre przykłady.

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad \text{— co wynika stąd, że dla } t \geq 0, \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt.$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a}.$$

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt = \frac{-1}{\omega^2 + s^2} e^{-st} (s \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \Big|_0^{\infty} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}.$$

Do obliczenia transformaty funkcji $\cos \omega t$ można się posłużyć zależnością:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}. \quad \text{Zatem:}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\} = \frac{1}{2(s-j\omega)} + \frac{1}{2(s+j\omega)} = \frac{s}{\omega^2 + s^2}.$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{\omega^2 + (s+a)^2} \quad \text{— na podstawie twierdzenia o przesunięciu zespolonym.}$$

$$\mathcal{L}\{te^{-at}\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{e^{-at}\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{(s+a)^2}.$$

$$\mathcal{L}\{t \cos \omega t\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\cos \omega t\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}\left\{ \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t-a)}{a} \right\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-sa}}{sa} = 1 \quad \text{— stosowana jest tu definicja funkcji}$$

impulsowej jako impulsu o szerokości a i amplitudzie $1/a$, przy czym $a \rightarrow 0$ (patrz rys. 2.5). Impuls ten jest formowany z różnicy dwóch skoków jednostkowych, z których drugi jest opóźniony o czas a . Transformaty Laplace'a niektórych funkcji są przedstawione w Tabeli 3.4.

Tabela 3.3. Podstawowe twierdzenia i właściwości przekształcenia Laplace'a

liniowość:	$\mathcal{L}\{\alpha p(t) + \beta q(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{p(t)\} + \beta \mathcal{L}\{q(t)\}$ oraz: $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha p(t) + \beta q(t)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{p(t)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{q(t)\}$
przesunięcie w dziedzinie czasu:	$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = F(s)e^{-s\tau}$
przesunięcie w dziedzinie zespolonej:	$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s - a)$
skalowanie:	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
różniczkowanie po czasie:	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right\} = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \dots - \frac{d^{k-1} f(0)}{dt^{k-1}}$
różniczkowanie w dziedzinie zespolonej:	$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$ $\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
całkowanie w czasie:	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
całkowanie w dziedzinie zespolonej:	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty F(s) ds$
splot:	$\mathcal{L}\{f(t) \otimes g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau\right\} = F(s) \cdot G(s)$
mnożenie	$\mathcal{L}\{f(t) \cdot g(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\xi - j\infty}^{\xi + j\infty} F(\xi) G(s - \xi) d\xi = F(s) \otimes G(s)$
transmitancja:	$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{Y(s)}{U(s)}$
wartości graniczne:	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

Tabela 3.4. Transformaty Laplace'a wybranych funkcji

$f(t)$	$F(s)$	Uwagi
$\delta(t)$	1	$\sigma > -\infty$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma > -a$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\sigma > -a$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\sigma > -a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$	$\sigma > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{\omega^2 + s^2}$	$\sigma > 0$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(\omega^2 + s^2)^2}$	$\sigma > 0$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(\omega^2 + s^2)^2}$	$\sigma > 0$
t^k	$(k-1)! \frac{1}{s^{k+1}}$	$\sigma > 0$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\sigma > -a$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\sigma > -a$

3.2.2. Transmitancja układu

Zgodnie z (3.25) transmitancję operatorową $G(s)$ układu można wyznaczyć na podstawie znanych transformat wymuszenia $U(s)$ i odpowiedzi $Y(s)$ lub jako transformatę funkcji wagi $g(t)$. Można także posłużyć się rozwiązaniem równania różniczkowego w dziedzinie s^9 , przy czym zakłada się, że w transmitancji (funkcji przejścia) przyjmuje się zerowe warunki początkowe – inaczej niż w ogólnym przypadku rozwiązywania równań różniczkowych.

⁹ W literaturze można spotkać różne określenia: dziedzina (przestrzeń) Laplace'a, dziedzina zespolona, dziedzina s .

Przykład 3.6. Określić transmitancję układu analizowanego w przykładzie 2.4 i zbadać jego charakterystyki częstotliwościowe.

Rozpatrywany układ jest opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = t^3 + t.$$

Wymuszeniem jest więc funkcja: $u(t) = t^3 + t$.

Poddając obie strony równania różniczkowego transformacji Laplace'a, otrzymamy:

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = \frac{2}{s^4} + \frac{1}{s^2} = U(s)$$

W kolejnych krokach obliczamy transformatę sygnału wyjściowego:

$$Y(s)(s^2 + 2s + 1) = \frac{s^2 + 2}{s^4}, \quad Y(s) = \frac{s^2 + 2}{s^4(s^2 + 2s + 1)}.$$

A zatem:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2}{s^4(s^2 + 2s + 1)} \cdot \frac{s^4}{s^2 + 2} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}.$$

Przechodząc do analizy charakterystyki częstotliwościowej, określamy transmitancję widmową układu:

$$G(j\omega) = \left(\frac{1}{s^2 + 2s + 1} \right) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 - \omega^2 + j2\omega} = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2} - j \frac{2\omega}{1 + \omega^2} = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

gdzie:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{1 + \omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \arctg\left(\frac{-2\omega}{1 - \omega^2}\right).$$

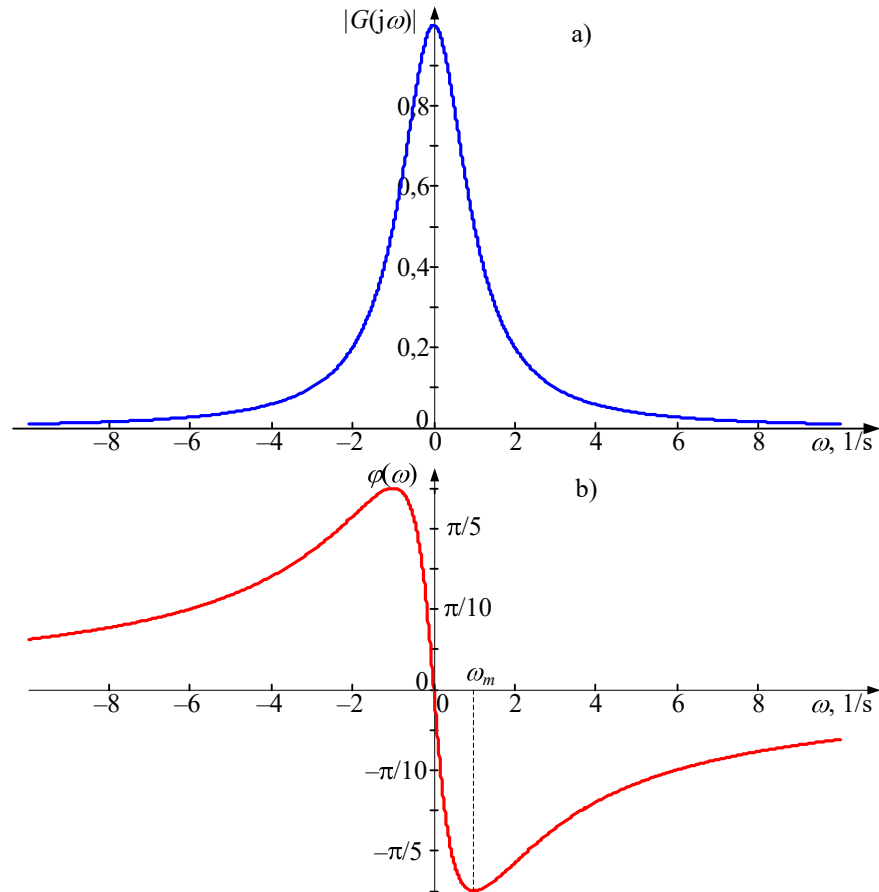
Wykresy obu charakterystyk widmowych transmitancji: amplitudy i fazy, są pokazane na rys. 3.4. Można zauważyć, że maksymalna wartość amplitudy $|G(j\omega)| = 1$ odpowiada zerowej pulsacji, natomiast ekstrema charakterystyki fazowej występują dla $\omega = \pm 1$, co łatwo sprawdzić analizując funkcję $\varphi(\omega)$. Dla tych wartości pulsacji faza wynosi odpowiednio: $\varphi(\omega) = \pm \pi/4$.

W ogólnym przypadku, gdy znane jest równanie różniczkowe (2.18) opisujące dynamikę układu, jego transmitancja ma postać funkcji wymiernej:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{L(s)}{M(s)} = G(s), \quad m \leq n, \quad (3.27)$$

co ma miejsce wówczas, gdy dynamika układu jest opisana równaniem różniczkowym (3.19). Współczynniki wielomianu $M(s)$ są takie same, jak współczynniki lewej strony tego równania, natomiast wielomian $L(s)$ jest utworzony na podstawie jego prawej strony (która jest związana z funkcją wymuszającą $u(t)$).

Zauważmy, że ze względu na jednoznaczność prostego i odwrotnego przekształcenia Laplace'a transmitancja $G(s)$ zawiera pełną informację o właściwościach układu.



Rys. 3.4. Przebieg amplitudy a) i fazy b) widmowej transmitancji badanego układu

Przykład 3.7. Funkcja wagi układu z przykładu 2.6 ma następującą postać:
 $g(t) = e^{-t/T} 1(t)$. Wyznaczyć jego transmitancję.

Transmitancję wyznaczamy według zależności:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t/T}\} = \frac{1}{s + 1/T} = \frac{T}{sT + 1}.$$

Mnożenie przez funkcję skoku jednostkowego w wyrażeniu na funkcję wagi nie zmienia transformaty jednostronnej.

Transmitancję badanego układu można także określić na podstawie równania różniczkowego. Równanie jednorodne jest następujące (przykład 2.4):

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T}y = 0.$$

Założmy, że w charakterze wymuszenia występuje funkcja: $u(t) = 1(t) \cos \omega t$. Zatem pełne równanie ma postać:

$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T}y = \cos \omega t$ (przy stosowaniu przekształcenia jednostronnego, funkcję $1(t)$ można pominąć).

Obustronne przekształcenie powyższego równania daje:

$$sY(s) + \frac{1}{T}Y(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}, \text{ przy czym: } U(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}.$$

Transformata odpowiedzi jest zatem następująca:

$$Y(s) = \frac{sT}{(\omega^2 + s^2)(sT + 1)} \text{ (przy zerowych warunkach początkowych).}$$

Ostatecznie transmitancję obliczamy według następującej zależności:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{sT}{(\omega^2 + s^2)(sT + 1)} \cdot \frac{(\omega^2 + s^2)}{s} = \frac{T}{sT + 1}.$$

Transmitancja układu może być także określona jako transformata Laplace'a jego odpowiedzi impulsowej. Ilustruje to kolejny przykład [4].

Przykład 3.8. Określić transmitancję ogólnego układu drugiego rzędu.

Zapiszmy ogólne równanie różniczkowe układu liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach w następującej postaci:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

Jednym ze sposobów określenia transmitancji układu na podstawie znanego równania różniczkowego jest obliczenie funkcji wagi. Odpowiedź impulsową (funkcję wagi) otrzymamy dla wymuszenia impulsowego: $f(t) = \delta(t)$:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \delta(t)$$

Postać operatorowa powyższego równania bezpośrednio prowadzi do poszukiwanej transmitancji (przyjęto zerowe warunki początkowe):

$$s^2 a_2 Y(s) + s a_1 Y(s) + a_0 Y(s) = 1,$$

skąd:

$$(s^2 a_2 + s a_1 + a_0) Y(s) = 1 \text{ oraz}$$

$$Y(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 a_2 + s a_1 + a_0}$$

Transformatę odpowiedzi tego układu na dowolne wymuszenie w postaci funkcji $f(t)$ można zapisać następująco:

$$Y(s) = G(s)F(s) = \frac{F(s)}{s^2 a_2 + s a_1 + a_0}, \text{ gdzie } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

3.2.3. Transformata odwrotna

Transformata odwrotna w interesującym nas przypadku analizy systemów jest funkcją czasu, która formalnie może być określona na podstawie danej transformaty Laplace'a zgodnie z (3.22). Należy zwrócić uwagę na to, że całka definiująca przekształcenie odwrotne odnosi się do funkcji zespolonych i sprawne posługiwanie się tym narzędziem wymaga znajomości zaawansowanych metod dotyczących funkcji zespolonych. W większości praktycznych przypadków wystarczy posługiwać się podstawowymi właściwościami przekształcenia i tablicami transformat typowych funkcji. Poniżej przedstawione są podstawowe techniki obliczania odwrotnych transformat Laplace'a stosowane w teorii systemów.

a) Rozkład transformaty na ułamki

Załóżmy, że transformata funkcji $f(t)$ ma postać jak (3.27), gdzie wielomian mianownika $M(s)$ został przedstawiony w formie iloczynowej:

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{L(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)}, \quad (3.28)$$

przy czym: $L(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0$, $m \leq n$.

Prawa strona (3.28) może być rozłożona na sumę prostych transformat w formie ułamków o postaci:

$$\frac{A_i}{s-s_i} \leftrightarrow A_i e^{s_i t},$$

których transformaty odwrotne są znane. Szczegóły obliczeń zależą od krotności poszczególnych pierwiastków wielomianu mianownika (biegunów transmitancji) (3.28).

1. Wszystkie pierwiastki są jednokrotne (różne). Wówczas:

$$\frac{L(s)}{M(s)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n} \quad (3.29)$$

Współczynniki $A_1, A_2, \dots, A_n$ można określić z warunku równowagi wielomianu liczników obu stron (3.29). Jest to równoważne następującej zależności:

$$A_i = \left((s-s_i)F(s) \right)_{s=s_i} = \left((s-s_i) \frac{L(s)}{M(s)} \right)_{s=s_i} = \left(\frac{L(s)}{M'(s)} \right)_{s=s_i} \quad (3.30)$$

co prowadzi do następującego sposobu obliczania odwrotnej transformaty Laplace'a, która ma pojedyncze bieguny:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n (s-s_i)F(s)e^{s_i t} \Big|_{s=s_i} \quad (3.31)$$

Przykład 3.9. Określić funkcję czasu, której transformata Laplace'a jest następująca:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^3+4s^2+3s}$$

Obliczając pierwiastki mianownika transformaty $F(s)$, otrzymamy:

$$M(s) = s^3 + 4s^2 + 3s = s(s^2 + 4s + 3) = s(s+1)(s+3), \text{ czyli: } s_1 = 0, s_2 = -1, s_3 = -3.$$

Do obliczenia współczynników rozkładu stosujemy regułę (3.30):

$$A_1 = \left(s \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} \right)_{s=0} = \left(\frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \right)_{s=0} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \left((s+1) \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} \right)_{s=-1} = \left(\frac{s+2}{s(s+3)} \right)_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$A_3 = \left((s+3) \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} \right)_{s=-3} = \left(\frac{s+2}{s(s+1)} \right)_{s=-3} = -\frac{1}{6}$$

Wzorużąc się na (3.29), obliczamy:

$$F(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+3}.$$

Dla tych prostych składników transformaty otrzymujemy:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+3} \right\} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-3t} \right) 1(t)$$

Jeśli pierwiastki mianownika $M(s)$ transmitancji są zespolone, to zawsze występują pary pierwiastków wzajemnie sprzężonych: $s_i = a + jb$ oraz $s_{i+1} = a - jb$. Zasada postępowania przy obliczaniu odpowiednich współczynników rozkładu jest podobna do tej, przedstawionej powyżej, z tym że w ogólnym przypadku otrzymujemy zespolone współczynniki.

Przykład 3.10. Określić funkcję czasu, której transformata Laplace'a jest następująca:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+5)(s+3)}$$

Transformatę tę można przedstawić w następującej formie:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s^2+2s+5)(s+3)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \frac{A_3}{s-s_3}$$

Obliczając pierwiastki mianownika transformaty $F(s)$ otrzymamy:

$$s_1 = -1 + j2, s_2 = -1 - j2, s_3 = -3.$$

Współczynniki obliczamy według (3.30), przy czym A_1, A_2 są liczbami zespolonymi sprzężonymi, więc wystarczy obliczyć jedną z nich. Zatem:

$$A_1 = \left((s+1-j2) \frac{s+1}{(s^2+2s+5)(s+3)} \right)_{s=-1+j2} = \left(\frac{s+1}{(s+1+j2)(s+3)} \right)_{s=-1+j2} = \frac{1+j}{8}, \quad A_2 = \frac{1-j}{8},$$

$$A_3 = \left((s+3) \frac{s+1}{(s^2+2s+5)(s+3)} \right)_{s=-3} = \left(\frac{s+1}{(s^2+2s+5)} \right)_{s=-3} = -\frac{1}{4}.$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$F(s) = \frac{1+j}{8(s+1+j2)} + \frac{1-j}{8(s+1-j2)} - \frac{1}{4(s+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{s+1}{((s+1)^2+4)} + \frac{2}{((s+1)^2+4)} - \frac{1}{s+3} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\mathcal{L}\{e^{-t} \cos 2t\} + \mathcal{L}\{e^{-t} \sin 2t\} - \mathcal{L}\{e^{-3t}\} \right)$$

Ostatecznie funkcja względem czasu jest następująca:

$$f(t) = \frac{1}{4} (e^{-t} (\cos 2t + \sin 2t) - e^{-3t}) 1(t) = \frac{e^{-t}}{4} (\sqrt{2} \sin(2t + \pi/4) - e^{-2t}) 1(t).$$

2. Niektóre pierwiastki mianownika są wielokrotne.

Jeśli pierwiastek s_i w (3.29) jest l -krotny, to związane z nim składniki (ułamki) rozkładu są następujące:

$$\frac{L(s)}{M(s)} = \frac{A_{il}}{(s-s_i)^l} + \frac{A_{i(l-1)}}{(s-s_i)^{(l-1)}} + \dots + \frac{A_{i1}}{s-s_i} + \{\text{pozostałe ułamki}\} \quad (3.32)$$

Ogólna formuła na obliczanie współczynników rozkładu w przypadku wielokrotnych pierwiastków mianownika transformaty jest następująca [57]:

$$A_{i(l-r)} = \left(\frac{1}{r!} \frac{d^r}{ds^r} \left((s-s_i)^l \frac{L(s)}{M(s)} \right) \right)_{s=s_i}, \quad r = 0, 1, \dots, l-1 \quad (3.33)$$

Ułamkom związanym z wielokrotnym pierwiastkiem wielomianu $M(s)$ mianownika transformaty (3.32) odpowiadają następujące składniki funkcji czasu:

$$f(t) = A_{il} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{s_i t} + A_{i(l-1)} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} e^{s_i t} + \dots + A_{i1} e^{s_i t} + \{\text{pozostałe składniki}\} \quad (3.34)$$

co wynika z twierdzenia o różniczkowaniu w dziedzinie zespolonej.

Przykład 3.11. Określić funkcję czasu, której transformatę Laplace'a jest następująca:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)}.$$

Pierwiastki mianownika transformaty: $s_1 = -2$, l -krotny, $l = 3$ oraz $s_2 = -3$. Poszukujemy współczynników następującego rozkładu:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)} = \frac{A_{13}}{(s+2)^3} + \frac{A_{12}}{(s+2)^2} + \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_2}{s+3}$$

Posługując się (3.33) określamy współczynniki związane z pierwiastkiem wielokrotnym:

$$A_{13} = \left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left((s+2)^3 \frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)} \right) \right)_{s=-2} = \left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s+1}{s+3} \right) \right)_{s=-2} = \left(\frac{-2}{(s+3)^3} \right)_{s=-2} = -2,$$

$$A_{12} = \left(\frac{d}{ds} \left((s+2)^3 \frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)} \right) \right)_{s=-2} = \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{s+1}{(s+3)} \right) \right)_{s=-2} = \left(\frac{2}{(s+3)^2} \right)_{s=-2} = 2,$$

$$A_{11} = \left((s+2)^3 \frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)} \right)_{s=-2} = \left(\frac{s+1}{(s+3)} \right)_{s=-2} = -1,$$

$$A_2 = \left((s+3) \frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)} \right)_{s=-3} = \left(\frac{s+1}{(s+2)^3} \right)_{s=-3} = 2.$$

Zatem, otrzymujemy:

$$F(s) = \frac{-2}{(s+2)^3} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3},$$

co daje następującą funkcję czasu:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2}{(s+2)^3} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+2)^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{s+2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s+3} \right\} = (-t^2 e^{-2t} - 2te^{-2t} - e^{-2t} + 2e^{-3t})1(t).$$

W przypadku dwóch pierwszych składników ma zastosowanie następujące twierdzenie:

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \text{ gdzie } F(s) = \frac{1}{s+2}.$$

Przedstawione metody mają zastosowanie do transformat, które są przedstawione w postaci funkcji wymiernych. Pozwalają one określić transformaty odwrotne szerokiej klasy funkcji. W ten sposób można rozwiązywać równania różniczkowe lub obliczać odpowiedzi układów dynamicznych zgodnie ze schematem z rys. 3.3. Ilustrują to kolejne przykłady.

Przykład 3.12. Określić odpowiedź układu mechanicznego opisanego równaniem różniczkowym (2.4):

$$M \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + D \frac{dv(t)}{dt} + Kv(t) = 0$$

przy warunkach początkowych: $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$. Przyjąć następujące parametry układu: $K = 4$, $D = 0,5$, $M = 1$.

Zauważmy, że powyższe równanie różniczkowe układu z rys. 2.1b powstało z różniczkowania równania ruchu tego układu:

$$f(t) = Dv(t) + M \frac{dv(t)}{dt} + K \int v(t) dt.$$

Początkowa wartość pierwszej pochodnej prędkości ma wówczas fizyczną wartość przyspieszenia: $v'(0) = f(0)/M$, gdzie M jest masą, natomiast $f(0)$ jest siłą początkową.

Po podstawieniu podanych parametrów, otrzymamy:

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 0,5 \frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1.$$

Stosując jednostronne przekształcenie Laplace'a, uzyskujemy:

$$s^2 V(s) - sv(0) - v'(0) + 0,5(sY(s) - v(0)) + 4V(s) = 0,$$

co po uporządkowaniu prowadzi do wyrażenia:

$$V(s)(s^2 + 0,5s + 4) = v'(0) + v(0)(s + 0,5).$$

Zauważmy, że warunki początkowe pełnią tu podobną funkcję jak wymuszenia. W tym przypadku transformatą wymuszenia jest wartość $v'(0) = 1$. Po podstawieniu ich wartości mamy następującą transformatę odpowiedzi:

$$V(s) = \frac{1}{s^2 + 0,5s + 4} = G(s)U(s), \quad U(s) = 1.$$

W celu określenia odpowiedzi czasowej należy odpowiednio przekształcić transformatę $V(s)$. Widać, że można ją 'dopasować' do transmitancji wykładniczo tłumionej sinusoidy:

$$e^{-at} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \text{ skąd widać kierunek przekształceń:}$$

$$V(s) = \frac{1}{s^2 + 0,5s + 4} = \frac{A \cdot \sqrt{4 - 0,25^2}}{(s + 0,25)^2 + \left(\sqrt{4 - 0,25^2}\right)^2}, \text{ przy czym: } A \cdot \sqrt{4 - 0,25^2} = 1.$$

Otrzymujemy stąd: $v(t) = Ae^{-at} \sin \omega t$,

$$\text{gdzie: } A = \frac{4}{\sqrt{63}} \approx 0,5039, \quad a = 0,25, \quad \omega_0 = \frac{1}{A} \approx 1,984 \text{ s}^{-1}.$$

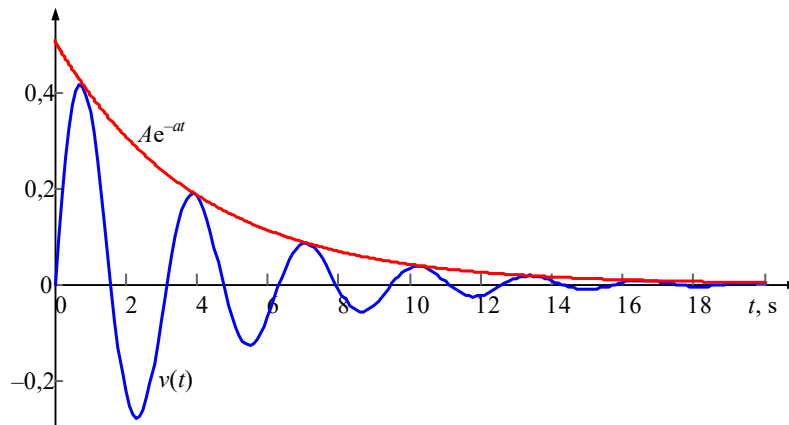
Można zauważyć, że przebieg odpowiedzi istotnie się zmienia, jeśli także wartość początkowa prędkości $v(0)$ będzie różna od zera.

Uzyskane przebiegi są prezentowane na rys. 3.5. Funkcja Ae^{-at} tworzy obwiednię odpowiedzi układu. Zauważmy, że ponieważ $U(s) = 1$, to transmitancja układu $G(s) = V(s)$.

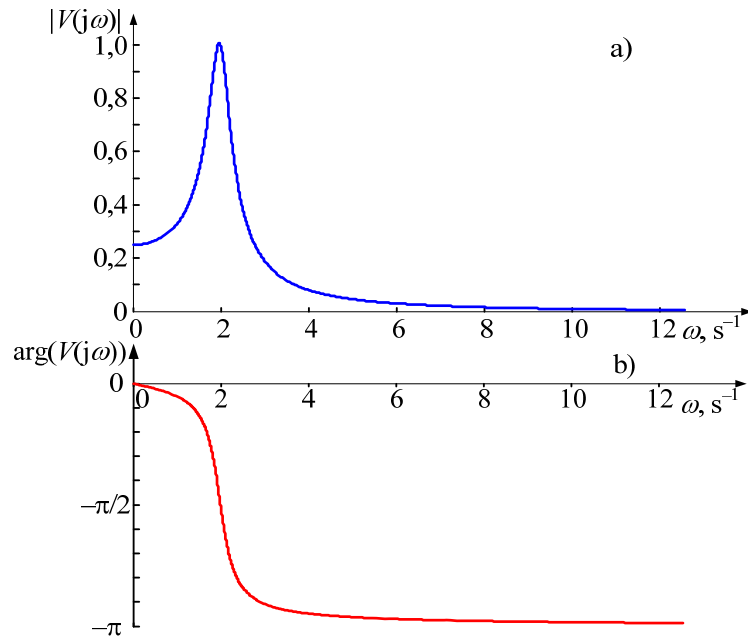
Charakterystyki częstotliwościowe układu można określić badając transmitancję widmową:

$$G(j\omega) = V(j\omega) = \left(\frac{1}{s^2 + 0,5s + 4} \right)_{s=j\omega} = \frac{1}{(j\omega)^2 + j0,5\omega + 4} = \frac{1}{4 - \omega^2 + j0,5\omega}.$$

Ich wykresy są pokazane na rys. 3.6.



Rys. 3.5. Przebieg odpowiedzi $v(t)$ oraz jej obwiedni



Rys. 3.6. Charakterystyka amplitudowa (a) i fazowa (b) analizowanego układu

Można zauważyć, że charakterystyka amplitudowa ma silnie zaznaczone maksimum, które występuje dla pulsacji rezonansowej ω zbliżonej do pulsacji drgań ω_0 , występujących w odpowiedzi układu. Pulsację rezonansową można obliczyć, analizując moduł transmitancji:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + (0,5\omega)^2}}.$$

Rozwiązując równanie: $\frac{d}{d\omega}|G(j\omega)| = 0$, otrzymujemy pulsację rezonansową: $\omega = \omega_r \approx 1,968$, która tylko nieznacznie różni się od pulsacji ω_0 oscylacji z rys. 3.5. Problem ten jest dyskutowany w p. 4.3.3 (4.76).

b) Metoda residuów

Przed omówieniem tej metody przypomnimy podstawowe terminy odnoszące się do funkcji zmiennej zespolonej. Pochodna funkcji zespolonej w punkcie z_0 jest definiowana następująco:

$$f'(z_0) = \left. \frac{d}{dz} f(z) \right|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (3.35)$$

Jeśli granica ta istnieje, to mówimy, że funkcja $f(z)$ jest różniczkowalna w sensie zespolonym w punkcie z_0 .

Funkcja zespolona jest holomorficzna w obszarze liczb zespolonych, jeśli jest różniczkowalna w sensie zespolonym w każdym punkcie z_0 obszaru wraz z jego pewnym otoczeniem¹⁰. Każda funkcja holomorficzna jest funkcją analityczną w obszarze liczb zespolonych, co oznacza, że spełnia warunki Cauchy'ego¹¹-Riemanna¹² [39]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \\ -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial x},\end{aligned}\tag{3.36}$$

przy czym: $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$.

Zależności (3.36) definiują warunek konieczny różniczkowalności funkcji $f(z)$ (istnienia jej pochodnej). Punkty w obszarze liczb zespolonych, w których funkcja $f(z)$ przestaje być holomorficzną nazywa się punktami osobliwymi funkcji. Analityczna funkcja o tych właściwościach jest nazywana funkcją meromorficzną.

Funkcja meromorficzna $f(z)$ może być wyrażona za pomocą ilorazu funkcji holomorficzych $f_1(z), f_2(z)$ w całym obszarze liczb zespolonych:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},\tag{3.37}$$

przy czym $f_2(z)$ nie może być stale równa zero. Zbiór biegunów funkcji $f(z)$ jest zbiorem zer funkcji $f_2(z)$. Funkcja meromorficzna w skończonym obszarze nie ma innych osobliwości oprócz biegunów (wszystkie osobliwości są biegunami). Przykładami funkcji meromorficznych są funkcje wymierne, czy też ilorazy funkcji trygonometrycznych, jak $\sin z / \cos z$ lub $\cos z / \sin z$.

Całkowa formuła Cauchy'ego podaje sposób obliczania całki funkcji holomorficzej w dowolnym punkcie z_0 objętym przez dowolny kontur C (całka krzywoliniowa), wewnątrz którego i na jego granicach funkcja jest holomorficzna [39]:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz\tag{3.38}$$

Residuum (pozostałość) funkcji zespolonej $f(z)$ w punkcie z_0 jest liczbą, której wartość określa wynik całkowania tej funkcji wzdłuż krzywej C w kierunku dodatnim¹³, otaczającej obszar, w którym znajduje się punkt z_0 i żaden inny punkt osobliwy:

¹⁰ Funkcja może mieć pochodną w punkcie z_0 i nie być holomorficzną w tym punkcie, jeśli nie ma pochodnej w żadnym jego otoczeniu.

¹¹ Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), matematyk francuski charakteryzujący się wielką ścisłością formułowania i dowodzenia twierdzeń. Prace z zakresu analizy matematycznej.

¹² Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), matematyk niemiecki, twórca wielowymiarowej geometrii, która jest podstawą ogólnej teorii względności.

¹³ Kierunek przeciwny do wskazówek zegara.

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z) dz \quad (3.39)$$

Z twierdzeń analizy zespolonej wynika, że całka ta nie zależy od rodzaju wybranej drogi całkowania (wybranej krzywej C). Ponadto jeśli krzywa zamknięta C (kontur) obejmuje jeden raz (w wyniku jednego okrążenia) n punktów osobliwych: $z_1, z_2, \dots, z_n$ funkcji $f(z)$, to:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{z_i} f(z) \quad (3.40)$$

Jeżeli z_0 jest pojedynczym biegunem funkcji $f(z)$, to residuum w tym punkcie można obliczyć następująco:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (3.41)$$

Gdy punkt z_0 jest l -krotnym biegunem funkcji $f(z)$, to residuum w tym punkcie określa następująca formuła:

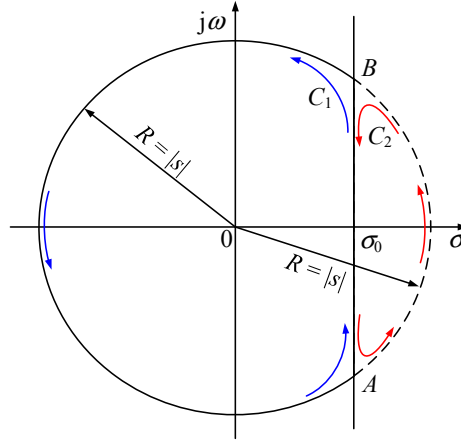
$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(l-1)}}{dz^{l-1}} (z - z_0)^l f(z) \quad (3.42)$$

Przeniesienie tych właściwości zespolonych funkcji w obszarze zmiennych zespolonych na obliczanie odwrotnej transformaty Laplace'a (3.22), wymaga odpowiedniego zdefiniowania krzywej obejmującej wszystkie punkty osobliwe całkowanej funkcji tak, aby można było zastosować zależność (3.40). Zauważmy, że w tym przypadku funkcja podcałkowa jest utworzona przez iloczyn: $F_1(s) = F(s)e^{st}$, a zatem należy obliczyć całkę:

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F_1(s) ds, \text{ gdzie: } s = \sigma + j\omega \quad (3.43)$$

Wielkość σ_0 określa granicę zbieżności całki w przekształceniu prostym, rozdzielając płaszczyznę liczb zespolonych równoległe do osi urojonej (rys. 3.7).

Obliczanie całki liniowej w granicach nieskończonych wzdłuż osi wyznaczonej przez parametr σ_0 można zastąpić przez obliczanie całki krzywoliniowej wzdłuż okręgu o promieniu $R \rightarrow \infty$. Kolejny pomysł zmierzający do zastosowania w tej procedurze właściwości funkcji zespolonych polega na rozdzieleniu tego obszaru na dwie części wzdłuż prostej $\sigma = \sigma_0$. W ten sposób powstają dwa obszary zakreślone, odpowiednio, przez zamknięte krzywe C_1 oraz C_2 (rys. 3.7). Całka krzywoliniowa obliczana wzdłuż pełnego okręgu jest równa sumie całek obliczanych oddzielnie dla konturów C_1 oraz C_2 (całki obliczane dla wspólnej części związanej z odcinkiem AB znoszą się ze względu na przeciwne kierunki całkowania).



Rys. 3.7. Kontury całkowania dla odwrotnego przekształcenia Laplace'a

Zauważamy dalej, że dla $t > 0$ funkcja podcałkowa $F_1(s) = F(s)e^{st}$ w (3.43) nie może mieć żadnych punktów osobliwych w obszarze zakreślonym przez krzywą C_2 . Podobnie dla czasu $t < 0$ funkcja ta nie ma punktów osobliwych w obszarze C_1 . Uwzględniając twierdzenie o residuach, można pokazać, że [39, 47]:

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)e^{st} ds = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_1} \text{res}_{s_i} (F(s)e^{st}) & \text{dla } t > 0, \\ -\sum_{i=1}^{n_2} \text{res}_{s_i} (F(s)e^{st}) & \text{dla } t < 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

przy czym n_1, n_2 oznaczają liczby punktów osobliwych w obszarach, odpowiednio: C_1 dla $t > 0$ oraz C_2 dla $t < 0$.

Jeśli rozważane jest przekształcenie jednostronne Laplace'a, to odwrotne przekształcenie Laplace'a można określić następująco ($t > 0$):

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^n \text{res}_{s_i} (F(s)e^{st}) \quad (3.45)$$

gdzie n jest liczbą punktów osobliwych w obszarze zbieżności całki tego przekształcenia.

Dla różnych szczegółowych postaci funkcji $F(s)$ można wyprowadzić odpowiednie skrócone formuły. W szczególności:

- Dla transformaty o postaci: $F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$, przy czym $M(s)$ ma pojedyncze zera:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{L(s)}{M(s)}\right\} = \sum_{i=1}^n \text{res}_{s_i} \left(\frac{L(s)}{M(s)} e^{st} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{L(s_i)}{M'(s_i)} e^{s_i t} \quad (3.46)$$

- Jeśli s_i jest biegunem l -krotnym, to związane z nim residuum jest obliczane następująco:

$$\operatorname{res}_{s_i} \left(\frac{L(s)}{M(s)} e^{st} \right) = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} \frac{L(s)}{M(s)} (s-s_i)^l e^{st}, \quad (3.47)$$

- Jeśli funkcję $F(s)$ można przedstawić w postaci: $F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)}$, przy czym $M(0) \neq 0$, to:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{L(s)}{sM(s)} \right\} = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{L(s_i)}{s_i M'(s_i)} e^{s_i t} \quad (3.48)$$

Jeśli $F(s)$ jest funkcją meromorficzną, to n w (3.46) oraz (3.48) może przyjmować wartość nieskończoną: $n = \infty$.

Przykład 3.13. Określić funkcję $h(t)$, gdy jej transformata Laplace'a jest następująca:

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}.$$

Przedstawimy trzy sposoby obliczenia funkcji $h(t)$.

1. Funkcję $H(s)$ można przedstawić w postaci:

$$H(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s} G(s), \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Na podstawie tablicy transformat (Tabela 3.4) widać, że:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ G(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} = \sin(t) \mathbf{l}(t) \quad (\omega = 1).$$

Wobec tego:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G(s) \right\} = \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t \sin \tau d\tau = -\cos \tau \Big|_0^t = (1 - \cos t) \mathbf{l}(t).$$

2. Stosując rozkład na ułamki proste, otrzymamy: $H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$.

$$\text{Zatem: } g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\} = (1 - \cos t) \mathbf{l}(t).$$

3. Aby posłużyć się zależnością (3.48) zauważmy, że:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{L(s)}{sM(s)} \right\}, \text{ gdzie: } L(s) = 1, \quad M(s) = s^2 + 1.$$

Bieguny funkcji $H(s)$ są zerami funkcji $M(s)$: $s^2 + 1 = 0$, a więc: $s_{1,2} = \pm j$.

Zatem, na podstawie (3.48):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{L(s)}{sM(s)} \right\} = \frac{1}{(s^2 + 1)_{s=0}} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{s_i (2s_i)} e^{s_i t} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{jt}}{j^2} + \frac{e^{-jt}}{j^2} \right) = 1 - \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = (1 - \cos t) \mathbf{l}(t).$$

Przykład 3.14. Określić odwrotną transformatę Laplace’a funkcji: $H(s) = \frac{2s^2 + 2s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2}$.

Bieguny funkcji są zerami jej mianownika: $M(s) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 = s^2(s^2 + 2s + 2) = 0$, skąd znajdujemy pierwiastki: $s_1 = 0$ (podwójny) oraz: $s_2 = 1 + j$, $s_3 = 1 - j$.

Residuum funkcji $H(s)e^{st}$ dla podwójnego bieguna obliczamy zgodnie z (3.47):

$$\operatorname{res}_{s=0}(H(s)e^{st}) = \frac{d}{ds} \left(\frac{2s^2 + 2s + 2}{s^2 + 2s + 2} e^{st} \right) \Big|_{s=0} = t,$$

natomiast dla kolejnych dwóch biegunów pojedynczych zgodnie z (3.46):

$$\operatorname{res}_{s_2} \left(\frac{L(s)}{M(s)} e^{st} \right) = \frac{L(s_2)}{M'(s_2)} e^{s_2 t} = \left(\frac{2s^2 + 2s + 2}{4s^3 + 6s^2 + 4s} e^{st} \right)_{s=1+j} = -\frac{j}{2} e^{(-1+j)t},$$

$$\operatorname{res}_{s_3} \left(\frac{L(s)}{M(s)} e^{st} \right) = \frac{L(s_3)}{M'(s_3)} e^{s_3 t} = \left(\frac{2s^2 + 2s + 2}{4s^3 + 6s^2 + 4s} e^{st} \right)_{s=1-j} = \frac{j}{2} e^{(-1-j)t}.$$

Sumując te residua otrzymamy:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \sum_{i=1}^3 \operatorname{res}_{s_i}(H(s)e^{st}) = (t + e^{-t} \sin t) \mathbf{l}(t).$$

Można zauważyć, że metoda residuów w odniesieniu do funkcji wymiernych (ilorazu funkcji holomorficznych) jest równoważna metodzie rozkładu na ułamki proste. Obejmuje ona jednak znacznie szerszą klasę funkcji.

Na zakończenie tych rozważań podamy przykład zastosowania przekształcenia Laplace’a to rozwiązywania równań różniczkowych liniowych.

Przykład 3.15. Rozwiązać podane równanie różniczkowe, stosując przekształcenie Laplace’a:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 4y = 10, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 1.$$

Równanie poddajemy obustronnemu przekształceniu Laplace’a:

$$(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 5(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \frac{10}{s}.$$

Po uporządkowaniu i uwzględnieniu warunków początkowych, otrzymamy:

$$Y(s) = \frac{s^2 y(0) + s(y'(0) + 5y(0)) + 10}{s(s^2 + 5s + 4)} = \frac{s^2 + 3s + 10}{s(s^2 + 5s + 4)}.$$

W celu wyznaczenia rozwiązania w dziedzinie czasu korzystamy z metody residuum:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 3s + 10}{s(s^2 + 5s + 4)} = \frac{L(s)}{sM(s)}$$

Pierwiastki funkcji $M(s)$ są następujące: $s_1 = 4$, $s_2 = 1$.

Zgodnie z (3.48), otrzymamy:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{L(s)}{sM(s)} \right\} = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{i=1}^2 \frac{L(s_i)}{s_i M'(s_i)} e^{s_i t} = \left(\frac{10}{4} + \frac{L(s_1)}{s_1 M'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{L(s_2)}{s_2 M'(s_2)} e^{s_2 t} \right) 1(t),$$

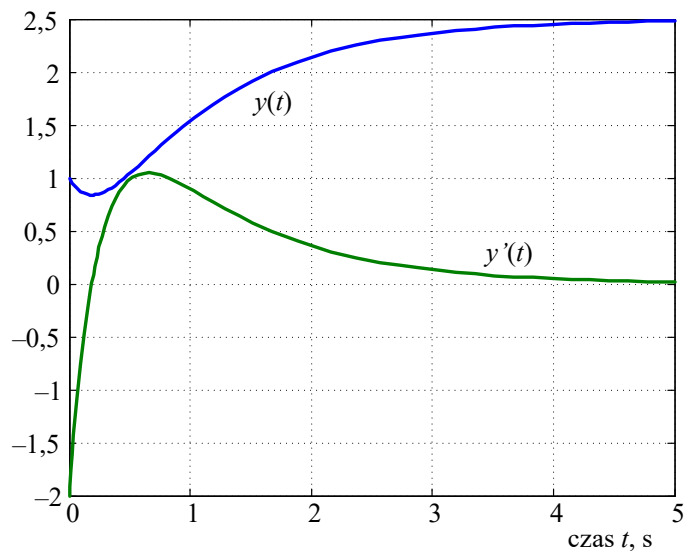
gdzie $M'(s) = 2s + 5$.

Ostatecznie:

$$y(t) = 2,5 + \frac{14}{(-4)(-3)} e^{-4t} + \frac{8}{(-1)(3)} e^{-t} = \left(2,5 + \frac{7e^{-4t} - 16e^{-t}}{6} \right) 1(t).$$

Przebieg tej odpowiedzi jest pokazany na rys. 3.8. Jest tam także pokazany przebieg pochodnej $y'(t)$:

$$y'(t) = \frac{16e^{-t} - 28e^{-4t}}{6} 1(t).$$



Rys. 3.8. Przebieg rozwiązania równania różniczkowego

Zadania

- 3.1. Posługując się przekształceniem Fouriera określić charakterystyki częstotliwościowe transmitancji widmowej układu opisanego równaniem różniczkowym z przykładu 3.5:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = t.$$

- 3.2. Określić transmitancję układu, który jest opisany podanym równaniem różniczkowym. Obliczyć funkcję wagi tego układu.

a) $\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) + 4 \int_0^t x(\tau) d\tau = 1(t)e^{-t},$

- b) $y'''(t) + 2y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = u(t)$,
 c) $y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) = 2u'(t) + u(t)$.
- 3.3. Określić funkcję wagi układu z przykładu 2.5 (rozdz. 2), stosując metodę operatorową. Sprawdzić, czy wyniki uzyskane metodą rozwiązywania równania różniczkowego przy wymuszeniu impulsowym (procedura (2.24)) są jednakowe.
- 3.4. Dla układu o podanej transmitancji określić funkcję wagi.
- a) $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$,
 b) $G(s) = \frac{2s+1}{s^2+5s+2}$,
 c) $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}$.
- 3.5. Określić odpowiedzi na skok jednostkowy układów z zadania 3.4.
- 3.6. Określić równania różniczkowe opisujące układy z zadania 3.4.
- 3.7. Rozwiązać podane równanie różniczkowe posługując się przekształceniem Laplace'a:
 $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-3t}$, $y'(0) = -2$, $y(0) = 0,5$.
- 3.8. Określić transformaty Laplace'a podanych sygnałów. Narysować przebiegi tych sygnałów w czasie.
- a) $y(t) = 1(t-a)$, $a > 0$,
 b) $y(t) = 1(t-a) - 1(t-b)$, $b > a > 0$,
 c) $y(t) = m(t-a)1(t-a)$,
 d) $y(t) = (t-a)^2 1(t-a)$.
- 3.9. Określić przebiegi sygnałów o podanych transformatach Laplace'a.
- a) $Y(s) = e^{-\pi s}$,
 b) $Y(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$,
 c) $Y(s) = \frac{s-3}{s^2+5s+6}$,
 d) $Y(s) = \frac{s^3+2s^2+3s+1}{s^2(s+1)}$,
 e) $Y(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$,
 f) $Y(s) = \frac{1}{(s-a)^2 + \omega^2}$.
- 3.10. Wyznaczyć postać czasową odpowiedzi $y(t)$ układu z przykładu 3.6.
- 3.11. Wyznaczyć transformaty Laplace'a podanych funkcji.
- a) $y(t) = \frac{2}{t}(1 - \cos at)$,
 b) $y(t) = \frac{1}{t} \sin kt$,
 c) $y(t) = 6e^{-3t} - 5e^{-2t}$,
 d) $\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$.

4. TYPOWE ELEMENTY SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH

4.1. Wprowadzenie: element bezinercyjny

Właściwości i funkcje złożonych systemów zależą od użytych elementów składowych oraz od struktury ich powiązań. Zakładamy dalej, że te podstawowe bloki (człony) są jednowejściowe i jednowyjściowe. Ponadto przyjmujemy, że w modelu matematycznym odwzorowującym relacje wejście – wyjście występują parametry skupione. Model ten może być zapisany w dziedzinie czasu lub w dziedzinie częstotliwości. W pierwszym przypadku relacje dynamiczne pomiędzy wejściem i wyjściem są zapisane w postaci równań różniczkowych zwyczajnych. W zależności od rzędu takiego równania różniczkowego mówimy o układzie rzędu I-go, II-go i tak dalej. W celu obliczenia odpowiedzi układu na określone wymuszenie wygodnie jest posługiwać się funkcją wagi $g(t)$, która jest rozumiana jako odpowiedź układu na impuls Diraca. Określenie odpowiedzi wymaga w takim przypadku wykonania operacji splotu (2.33).

W dziedzinie częstotliwości (Fouriera lub Laplace'a) odpowiednikiem funkcji wagi jest transmitancja układu zapisana, w najprostszym wypadku, jako iloraz dwóch wielomianów. Stopień wielomianu mianownika transmitancji jest określony przez rząd równania różniczkowego odpowiadającego opisowi w dziedzinie czasu. Zatem stopień wielomianu mianownika transmitancji określa rząd układu.

W najprostszym przypadku relacja wejście – wyjście ma charakter proporcjonalny:

$$y(t) = kx(t) \quad (4.1)$$

gdzie k jest współczynnikiem wzmocnienia.

Układ o funkcji przetwarzania (4.1) jest nazywany elementem proporcjonalnym (bezinercyjnym). Jeśli w charakterze wymuszenia wystąpi impuls Diraca, to odpowiedzią będzie funkcja impulsowa (funkcja wagi) (rys. 4.1a):

$$g(t) = k\delta(t) \quad (4.2)$$

W analizie właściwości układu często podaje się także odpowiedź na skok jednostkowy (rys. 4.1b):

$$y_1(t) = k1(t) \quad (4.3)$$

Poddając przekształceniu Laplace'a obie strony (4.1), otrzymamy transmitancję operatorową elementu proporcjonalnego (zerowego rzędu):

$$Y(s) = kU(s) \rightarrow G(s) = k \quad (4.4)$$

W ogólnym przypadku transmitancja $G(s)$ jest funkcją zespoloną. Transmitancja widmowa elementu proporcjonalnego ma jednak tylko część rzeczywistą w postaci współczynnika k :

$$G(j\omega) = G(s)_{s=j\omega} = k \quad (4.5)$$

Do celów analizy właściwości częstotliwościowej układu transmitancja widmowa $G(j\omega)$ może być przedstawiona z wydzieleniem części rzeczywistej i urojonej lub w postaci wykładniczej:

$$G(j\omega) = \operatorname{Re}(G(j\omega)) + j\operatorname{Im}(G(j\omega)) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.6)$$

gdzie:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(G(j\omega)))^2 + (\operatorname{Im}(G(j\omega)))^2}, \quad \arg(G(j\omega)) = \varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}(G(j\omega))}{\operatorname{Re}(G(j\omega))}\right).$$

Zobrazowanie trajektorii transmitancji $G(j\omega)$ w układzie o współrzędnych wyznaczonych przez jej składowe: rzeczywistą i urojoną, nosi nazwę charakterystyki Nyquista¹⁴ (charakterystyka amplitudowo-fazowa) – rys. 4.1c. Z kolei charakterystyka amplitudy transmitancji przedstawiona w skali logarytmicznej łączy się z nazwiskiem Bodego¹⁵. Jest ona skalowana w decybelach (dB) (rys. 4.2a):

$$A(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right| \quad (4.7)$$

Zauważmy, że $20\text{dB}^{16} \leftrightarrow \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right| = 10$, co oznacza, że wzmocnienie o wartości 20dB

ma miejsce wówczas, gdy amplituda sygnału wyjściowego jest dziesięć razy większa od amplitudy sygnału wejściowego. Wzmocnienie wzrasta do 40dB, gdy iloraz amplitud sygnałów na wyjściu i wejściu osiąga wartość 100.

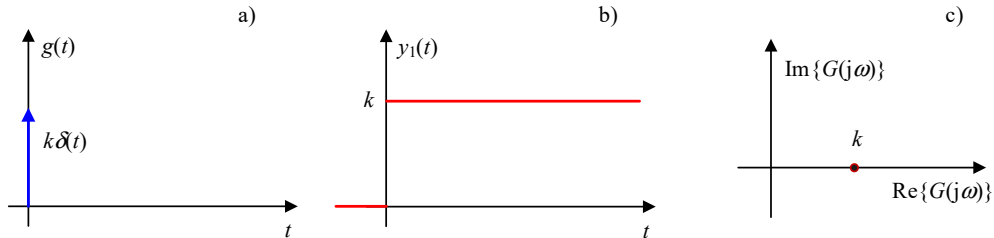
W analizowanym przypadku moduł transmitancji $|G(j\omega)| = k$ nie zależy od częstotliwości, więc charakterystyka na płaszczyźnie Bodego przedstawia linię prostą o stałej wartości $20\log k$ (rys. 4.2a). Warto dodać, że charakterystyka ta jest zawsze okre-

¹⁴ Harry Nyquist (1889 – 1976), elektrotechnik amerykański pochodzenia szwedzkiego; prace z zakresu teorii regulacji automatycznej.

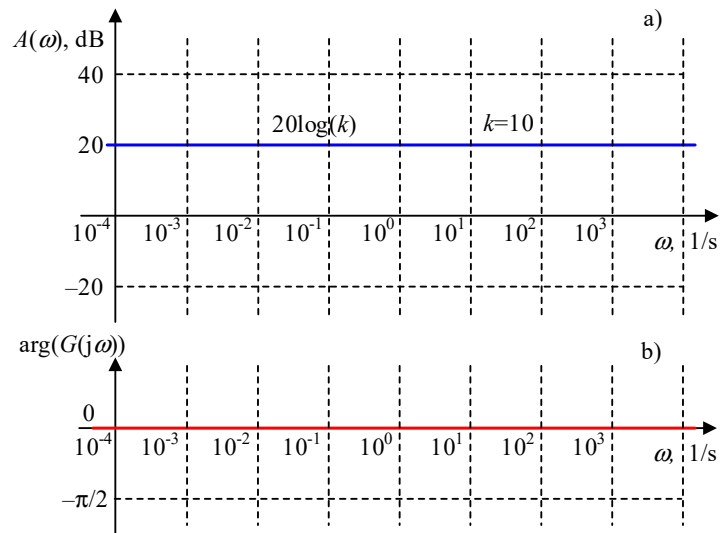
¹⁵ Hendrik Wade Bode (1905 – 1982), amerykański uczony i inżynier (z rodziny o holenderskim rodowodzie), pionier w zakresie teorii regulacji i telekomunikacji.

¹⁶ 1dB = 0,1B.

ślana dla $\omega > 0$. Podobnie argument (faza) transmitancji także nie zależy od częstotliwości i jest równy zero (część urojona funkcji $G(j\omega)$ jest zerowa).



Rys. 4.1. Charakterystyki układu bezinercyjnego: odpowiedź impulsowa a), odpowiedź na skok jednostkowy b), charakterystyka amplitudowo-fazowa c)



Rys. 4.2. Charakterystyka logarytmiczna amplitudy a) oraz fazy b)

Element bezinercyjny w rzeczywistych układach występuje jako dzielnik (na przykład dzielnik rezystancyjny) lub element bierny: w obwodzie elektrycznym jest to opornik:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = R,$$

gdzie $U(j\omega)$ jest transformatą napięcia na oporniku, a $I(j\omega)$ jest transformatą przepływającego przez niego prądu. W tym wypadku wymuszeniem jest prąd, a odpowiedzią – napięcie.

W modelu omawianego elementu pomija się wpływ różnych czynników, jak chociażby pojemności i indukcyjności rzeczywistego obwodu, w którym badanym elementem jest opornik. Podobnie jest z aktywnym wzmacniaczem elektronicznym.

4.2. Elementy I-go rzędu

4.2.1. Element inercyjny I-go rzędu

Element inercyjny I-go rzędu jest opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$Ty'(t) + y(t) = ku(t) \quad (4.8)$$

Obliczając transformatę Laplace'a z obu stron równości (4.8) otrzymamy transmitancję układu:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{sT + 1} = \frac{k}{T} \frac{1}{s + 1/T}, \quad (4.9)$$

skąd łatwo określić funkcję wagi:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{T} \frac{1}{s + 1/T} \right\} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (4.10)$$

Podobnie odpowiedź na skok jednostkowy w postaci operatorowej jest następująca:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{k}{T} \frac{1}{s(s + 1/T)} \quad (4.11)$$

Obliczając odwrotną transformatę Laplace'a otrzymamy odpowiedź w postaci czasowej:

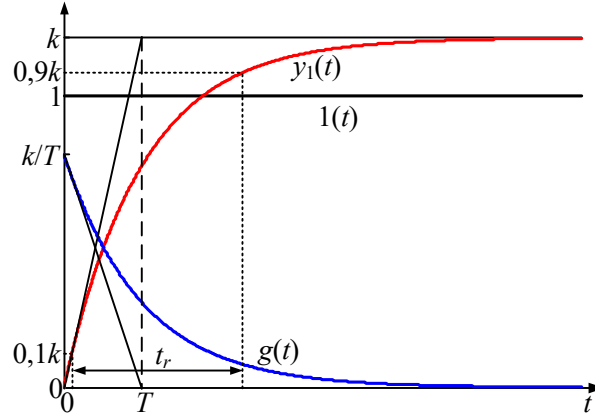
$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{T} \frac{1}{s(s + 1/T)} \right\} = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (4.12)$$

Otrzymane charakterystyki czasowe są pokazane na rys. 4.3. Widać, że parametr T jest stałą czasową zanikania funkcji wagi lub ustalania się odpowiedzi na skok jednostkowy, natomiast k jest współczynnikiem wzmocnienia. Styczne do tych przebiegów dla czasu $t = 0$ wyznaczają stałą czasową T . Na rysunku zaznaczono także czas narastania t_r , który jest określony jako odcinek czasu, odpowiadający zmianie odpowiedzi układu na skok jednostkowy pomiędzy 0,1 i 0,9 wartości stanu ustalonego. Do wykreślania przebiegów na rys. 4.3 przyjęto: $k = 1,2$ oraz $T = 1,5s$.

Na podstawie transmitancji (4.9) można określić charakterystyki częstotliwościowe układu. Transmitancja widmowa jest równa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{T} \frac{1}{1/T + j\omega} = \frac{k}{T} \frac{1/T - j\omega}{1/T^2 + \omega^2}, \quad (4.13)$$

skąd:

Rys. 4.3. Charakterystyki czasowe układu inercyjnego I-go rzędu; $k = 1,2$ oraz $T = 1,5s$

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{k\omega T}{1 + (\omega T)^2} = \text{Re}(G(j\omega)) + j \text{Im}(G(j\omega)), \quad (4.14)$$

gdzie: $\text{Re}(G(j\omega)) = \frac{k}{1 + (\omega T)^2}$, $\text{Im}(G(j\omega)) = -\frac{k\omega T}{1 + (\omega T)^2}$.

Ponadto: $|G(j\omega)| = \frac{k}{T \sqrt{1/T^2 + \omega^2}}$, $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega T)$ (4.15)

Czas narastania można określić obliczając różnicę czasu odpowiedzi $y_1(t)$ (4.12) dla obu zaznaczonych na rys. 4.3 wartości: $t_r = T(\ln(0,9) - \ln(0,1)) \approx 2,2T$.

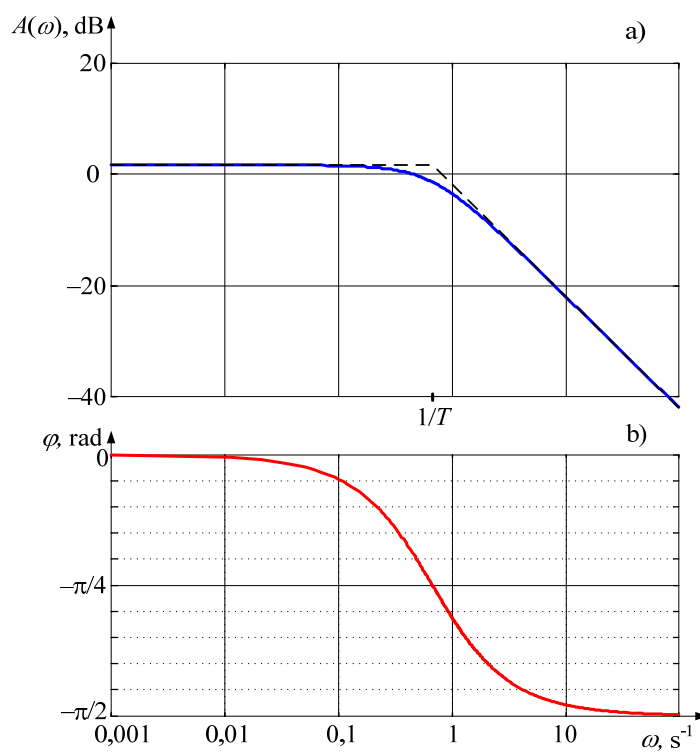
Zacznijmy badanie właściwości tego elementu od analizy charakterystyki amplitudowej na płaszczyźnie Bodego. W tym celu przedstawimy moduł transmitancji w postaci:

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{T} \frac{1}{\sqrt{1/T^2 + \omega^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \quad (4.16)$$

Logarytmując obie strony tego równania otrzymamy:

$$A(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k - 10 \log(1 + (\omega T)^2) \quad (4.17)$$

Przebieg tej charakterystyki jest pokazany na rys. 4.4a. Widać, że charakterystykę tę można z dużym przybliżeniem zastąpić dwoma prostymi odcinkami: jeden jest równoległy do osi pulsacji (stała wartość), natomiast drugi opada pod kątem -20 dB/dekadę (dekada odpowiada 10-krotnej zmianie pulsacji). Taki właśnie przybliżony sposób rysowania charakterystyki amplitudowej na płaszczyźnie Bodego jest stosowany do szybkiej oceny właściwości częstotliwościowych układu.



Rys. 4.4. Charakterystyki częstotliwościowe: amplitudy a) oraz fazy b)

Do uproszczonego rysowania charakterystyki logarytmicznej amplitudy korzystamy z faktu, że w postaci logarytmicznej (4.17) operacje dzielenia są zastąpione odejmowaniem odpowiednich czynników, a operacje mnożenia – ich dodawaniem. W ten sposób przejście od formy ilorazowej (4.16) do postaci sumy poszczególnych czynników (4.17) upraszcza analizę. Ponadto punkt załamania się charakterystyki łatwo określić, jeśli czynnik objęty pierwiastkowaniem w (4.16) zostanie zapisany właśnie w przedstawionej formie logarytmicznej:

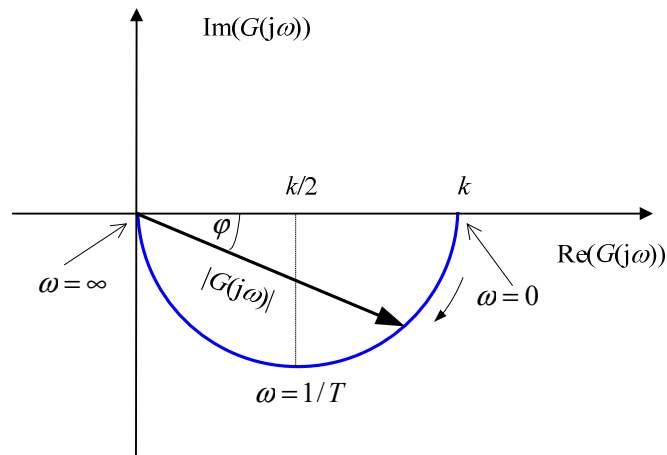
$$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \rightarrow -10 \log(1+(\omega T)^2) \approx \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega < \frac{1}{T} \\ -20\omega & \text{dla } \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

Załamanie prostych odcinków następuje zatem dla pulsacji $\omega = 1/T$. Można to zaobserwować na rys. 4.4a.

Częstotliwościowa charakterystyka fazy jest rysowana także dla logarytmicznej skali częstotliwości (rys. 4.4b). Można zauważyć, że punkt przegięcia tej charakterystyki także odpowiada wartości $\omega = 1/T$.

Analizując człon inercyjny I-go rzędu z punktu widzenia jego właściwości filtracyjnych, widać, że jest to typowy układ dolnoprzepustowy, przy czym tłumienie szybko wzrasta dla pulsacji $\omega > 1/T$. W tym także obszarze częstotliwości szybko zmienia się przesunięcie fazowe w relacji wejście – wyjście.

Charakterystykę amplitudowo-fazową na płaszczyźnie Nyquista można wykreślić, analizując postać (4.14) transmitancji widmowej układu (rys. 4.5).



Rys. 4.5. Charakterystyka amplitudowo-fazowa transmitancji

Charakterystyka ta jest okręgiem o średnicy równej k i środku w punkcie $(k/2 + j0)$. Dla dodatniego zakresu zmian częstotliwości charakterystyka jest ograniczona do dolnego półokręgu.

4.2.2. Idealny element całkujący

Jeśli równanie różniczkowe (4.8) zostanie ograniczone do następującej postaci:

$$y'(t) = ku(t), \quad (4.18)$$

to odpowiedź można określić w drodze całkowania wymuszenia:

$$y(t) = k \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

Stąd układ ten jest nazywany idealnym elementem całkującym. Obliczając transformatę Laplace'a z obu stron równości (4.19), otrzymamy transmitancję układu:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s}, \quad (4.20)$$

skąd łatwo określić funkcję wagi:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s}\right\} = k1(t). \quad (4.21)$$

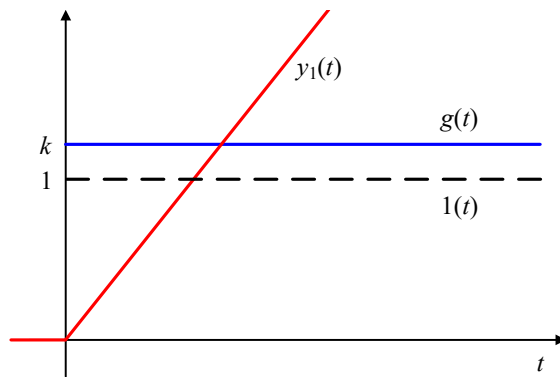
Podobnie odpowiedź na skok jednostkowy w postaci operatorowej jest następująca:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{k}{s^2} \quad (4.22)$$

Obliczając odwrotną transformatę Laplace'a otrzymamy odpowiedź w postaci czasowej:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2}\right\} = kt1(t) \quad (4.23)$$

Otrzymane charakterystyki czasowe są pokazane na rys. 4.6. Do wykreślania przebiegów przyjęto $k = 1, 2$.



Rys. 4.6. Charakterystyki czasowe idealnego układu całkującego; $k = 1, 2$

Transmitancja widmowa układu jest równa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j\frac{k}{\omega}, \quad (4.24)$$

skąd:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0, \quad \operatorname{Im}(G(j\omega)) = -\frac{k}{\omega}.$$

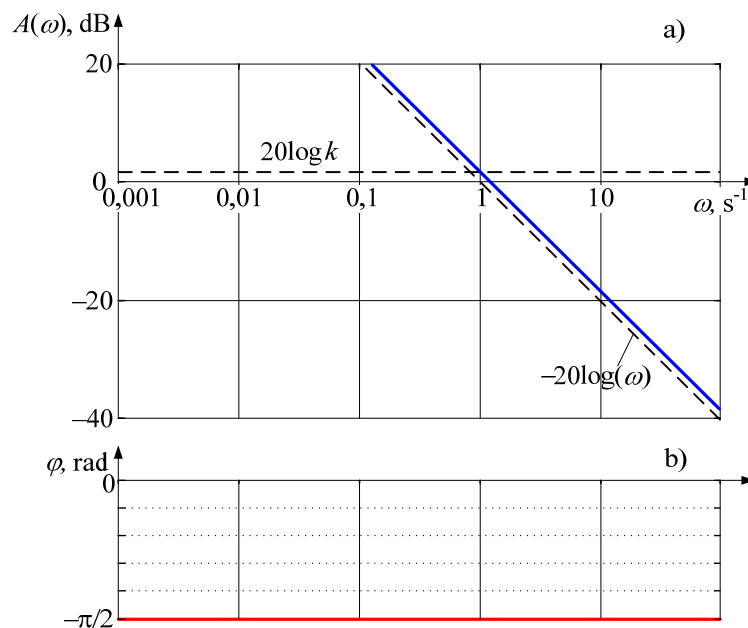
Ponadto:

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad (4.25)$$

Charakterystyka amplitudowa na płaszczyźnie Bodego jest określona następującą funkcją:

$$A(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k - 20 \log(\omega) \quad (4.26)$$

Przebieg tej charakterystyki jest pokazany na rys. 4.7a (linia ciągła). Jest ona wynikiem sumowania dwóch składników z (4.26) – proste zaznaczone liniami przerywanymi. Charakterystyka częstotliwościowa jest stała i równa $-\pi/2$ zgodnie z (4.25) - rys. 4.7b.



Rys. 4.7. Charakterystyki częstotliwościowe elementu całkującego: amplitudy a) oraz fazy b)

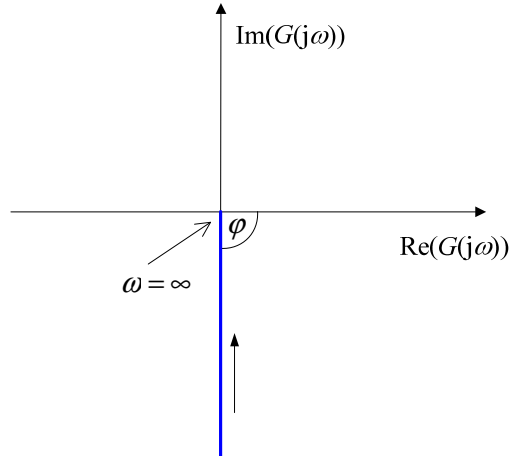
Charakterystyka amplitudowo-fazowa na płaszczyźnie Nyquista pokrywa się z ujemną półosią urojoną zgodnie z (4.24) - rys. 4.8.

4.2.3. Idealny element różniczkujący

Element różniczkujący ma cechy przeciwstawne do układu całkującego. Opis w dziedzinie czasu jest określony następującym równaniem:

$$y(t) = ku'(t) \quad (4.27)$$

Obliczając transformatę Laplace'a z obu stron równości (4.27), otrzymamy transmi-tancję układu:



Rys. 4.8. Charakterystyka amplitudowo-fazowa transmitancji idealnego członu całkującego

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = ks, \quad (4.28)$$

skąd łatwo określić funkcję wagi:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ks\} = k \frac{d\delta(t)}{dt}. \quad (4.29)$$

Podobnie odpowiedź na skok jednostkowy w postaci operatorowej jest następująca:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} G(s) = k \quad (4.30)$$

Obliczając odwrotną transformatę Laplace'a otrzymamy odpowiedź czasową:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{k\} = k\delta(t) \quad (4.31)$$

Otrzymane charakterystyki czasowe są pokazane na rys. 4.9. Zauważmy, że pochodna impulsu Diraca ma składową dodatnią (od narastającego zbocza impulsu $\delta(t)$) oraz składową ujemną (dla opadającego zbocza $\delta(t)$).

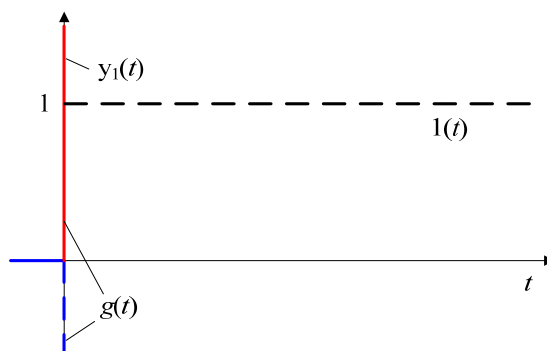
Transmitancja widmowa układu różniczkującego jest równa:

$$G(j\omega) = jk\omega, \quad (4.32)$$

skąd: $\text{Re}(G(j\omega)) = 0$, $\text{Im}(G(j\omega)) = k\omega$.

Ponadto:

$$|G(j\omega)| = k\omega, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \quad (4.33)$$

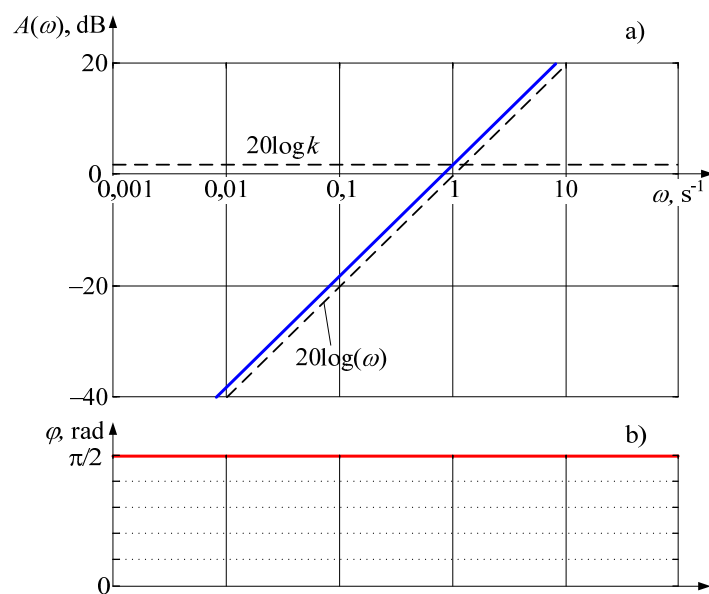


Rys. 4.9. Charakterystyki czasowe idealnego układu różniczkującego

Charakterystyka amplitudowa na płaszczyźnie Bodego jest określona następującą funkcją:

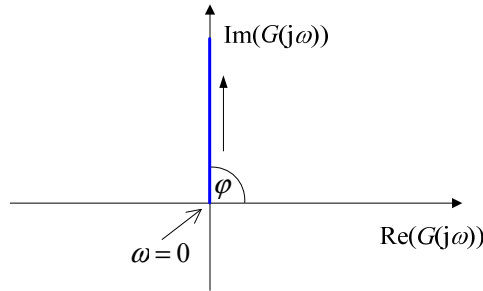
$$A(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k + 20 \log(\omega) \quad (4.34)$$

Przebieg tej charakterystyki jest pokazany na rys. 4.10a (linia ciągła). Jest ona wynikiem sumowania dwóch składników z (4.34) – proste zaznaczone liniami przerywanymi.



Rys. 4.10. Charakterystyki częstotliwościowe elementu różniczkującego: amplitudy a) oraz fazy b)

Faza układu jest stała i równa $\pi/2$ zgodnie z (4.33) - rys. 4.10b, natomiast trajektoria charakterystyki amplitudowo-fazowej na płaszczyźnie Nyquista pokrywa się z dodatnią półosią urojoną zgodnie z (4.32) - rys. 4.11.



Rys. 4.11. Charakterystyka amplitudowo-fazowa transmitancji idealnego członu różniczkującego

4.2.4. Element różniczkujący rzeczywisty

Jeśli w układzie inercyjnym (4.8) również sygnał wymuszający będzie różniczkowany, to otrzymamy następujące równanie różniczkowe:

$$T y'(t) + y(t) = k u'(t) \quad (4.35)$$

Obliczając transformatę Laplace'a z obu stron równości (4.35), otrzymamy:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ks}{sT+1}, \quad (4.36)$$

skąd można określić funkcję wagi:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{ks}{sT+1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{T} \left(1 - \frac{1}{T} \frac{1}{s+1/T} \right) \right\} = \frac{k}{T} \left(\delta(t) - \frac{1}{T} e^{-t/T} 1(t) \right) \quad (4.37)$$

Zauważmy, że człon ten łączy cechy elementu różniczkującego i inercyjnego i dlatego bywa także nazywany członem różniczkującym z inercją.

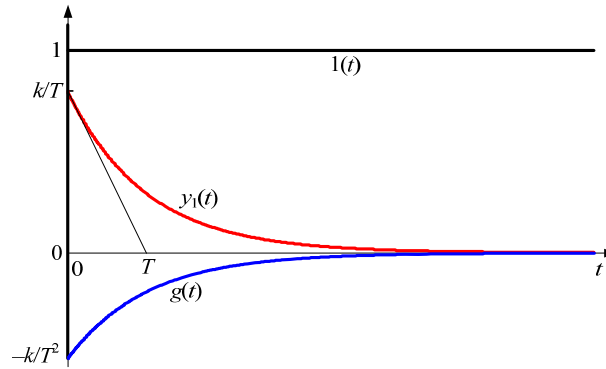
Odpowiedź na skok jednostkowy w postaci operatorowej jest następująca:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{k}{T} \frac{1}{s+1/T} \quad (4.38)$$

Odwrotna transformata Laplace'a z (4.38) prowadzi do odpowiedzi czasowej:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ Y_1(s) \} = \frac{k}{T} e^{-t/T} 1(t) \quad (4.39)$$

Otrzymane charakterystyki czasowe są pokazane na rys. 4.12.



Rys. 4.12. Charakterystyki czasowe rzeczywistego układu różniczkującego;
 $k = 1,2$ oraz $T = 1,5\text{s}$

Transmitancja widmowa układu jest równa:

$$G(j\omega) = \frac{jk\omega}{1 + j\omega T} = \frac{kT\omega^2 + jk\omega}{1 + (\omega T)^2}, \quad (4.40)$$

skąd: $\text{Re}(G(j\omega)) = \frac{kT\omega^2}{1 + (\omega T)^2}$, $\text{Im}(G(j\omega)) = \frac{k\omega}{1 + (\omega T)^2}$.

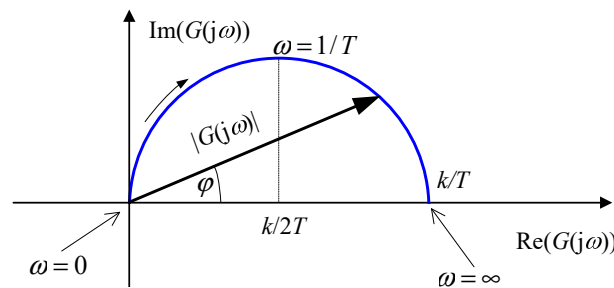
Ponadto:

$$|G(j\omega)| = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{T\omega} \quad (4.41)$$

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa jest określona następującą funkcją:

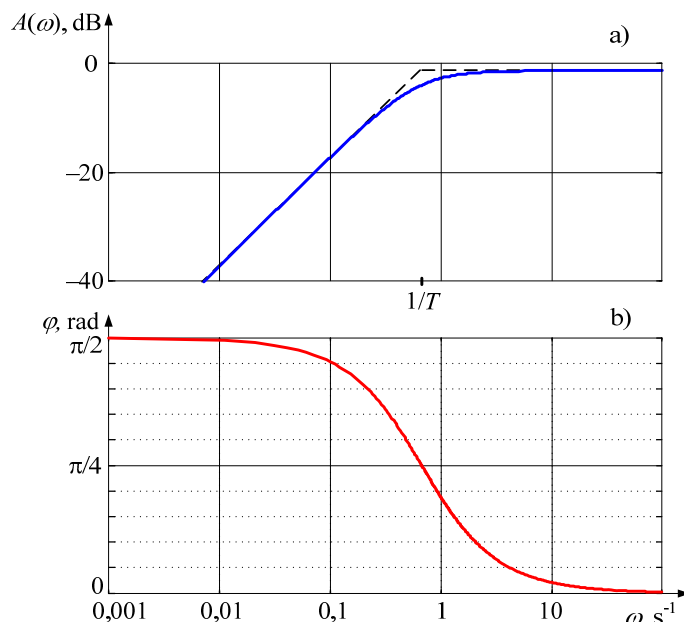
$$A(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k\omega - 10 \log(1 + (\omega T)^2) \quad (4.42)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa tego członu jest pokazana na rys. 4.13.



Rys. 4.13. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu różniczkującego z inercją

Przebieg logarytmicznej charakterystyki amplitudy jest pokazany na rys. 4.14a (linia ciągła). Jest ona wynikiem sumowania dwóch składników z (4.42) – linie przerywane.



Rys. 4.14. Charakterystyki częstotliwościowe elementu różniczkującego: amplitudy a) oraz fazy b)

Charakterystyka częstotliwościowa fazy zmienia się w granicach od $\pi/2$ do 0 zgodnie z (4.42) - rys. 4.14b.

4.3. Elementy II-go rzędu

Równanie wejście-wyjście elementu drugiego rzędu ma następującą postać:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (4.43)$$

Przyjmując zerowe warunki początkowe w powyższym równaniu, otrzymuje się transmitancję operatorową:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0} s^2 + \frac{a_1}{a_0} s + 1} \quad (4.44)$$

Podstawowe właściwości tego układu zależą od biegunów transmitancji (4.44), czyli od pierwiastków wielomianu mianownika (wielomianu charakterystycznego):

$$\frac{a_2}{a_0} s^2 + \frac{a_1}{a_0} s + 1 = \frac{a_2}{a_0} (s - s_1)(s - s_2) = 0 \quad (4.45)$$

Mogą to być dwa pierwiastki rzeczywiste lub para sprzężonych pierwiastków zespolonych.

4.3.1. Element całkujący z inercją

Jeśli w (4.43) $a_0 = 0$, to transmitancja (4.44) przybiera następującą postać:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s} = \frac{\frac{b_0}{a_1}}{\frac{a_2}{a_1} s^2 + s} = \frac{k}{s(Ts + 1)} \quad (4.46)$$

gdzie: $k = \frac{b_0}{a_1}$ jest wzmocnieniem, a $T = \frac{a_2}{a_1}$ - stałą czasową tego członu.

Zestawiając transmitancję (4.46) z transmitancją członu inercyjnego (4.9) widać, że funkcja wagi analizowanego elementu jest równa odpowiedzi na skok jednostkowy elementu inercyjnego (4.11):

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{T} \frac{1}{s(s + 1/T)} \right\} = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t) \quad (4.47)$$

Można zauważyć, że człon ten łączy cechy elementu całkującego i inercyjnego i dlatego jest nazywany członem całkującym z inercją. Jego odpowiedź na skok jednostkowy w postaci operatorowej jest następująca:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{k}{T} \frac{1}{s^2(s + 1/T)} \quad (4.48)$$

Odwrotna transformata Laplace'a z (4.48) może być określona przez całkowanie funkcji (4.47):

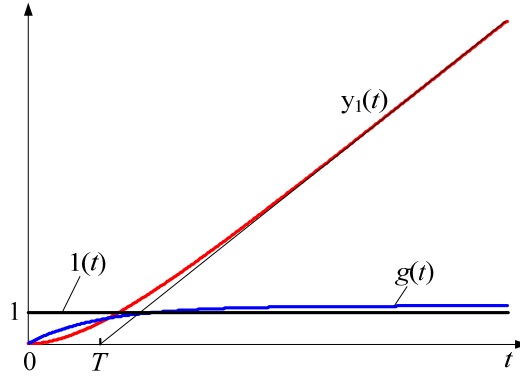
$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y_1(s)\} = \int_0^t k \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) d\tau = k \left(t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right) 1(t) \quad (4.49)$$

Otrzymane charakterystyki czasowe są pokazane na rys. 4.15. Badając odpowiedź członu na skok jednostkowy można zauważyć, że jej asymptota jest nachylona do osi czasu pod kątem α , przy czym $\tan \alpha = k$. Ponadto asymptota ta wyznacza na osi czasu stałą czasową T .

Transmitancja widmowa układu jest równa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega T)}, \quad (4.50)$$

$$\text{skąd: } \operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{-kT}{1+(\omega T)^2}, \quad \operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{-k}{\omega(1+(\omega T)^2)}.$$



Rys. 4.15. Charakterystyki czasowe rzeczywistego układu całkującego;
 $k = 1,2$ oraz $T = 1,5\text{s}$

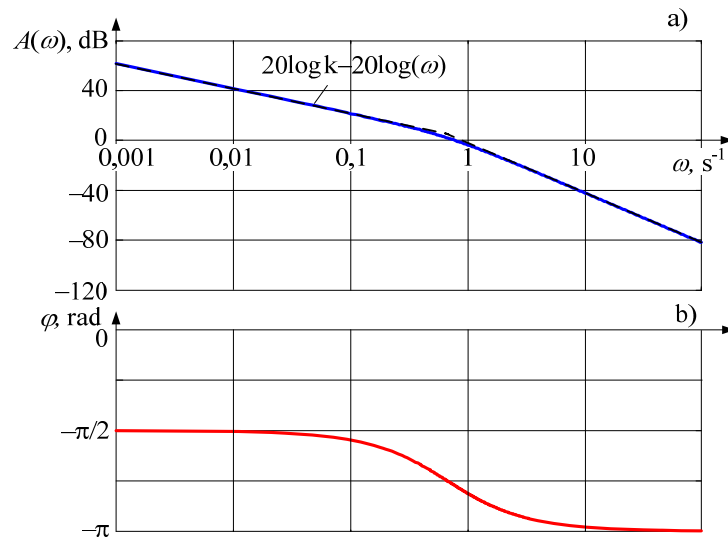
Ponadto:

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\omega\sqrt{1+(\omega T)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega T \quad (4.51)$$

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa jest określona następującą funkcją:

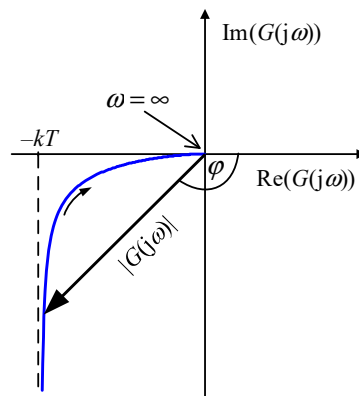
$$A(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1+(\omega T)^2} \quad (4.52)$$

Przebieg uproszczonej charakterystyki jest pokazany na rys. 4.16a (linia ciągła). Jest ona wynikiem sumowania trzech składników z (4.52). Pierwsze dwa składniki są reprezentowane prostymi: równoległa do osi pulsacji na wysokości $20 \log k$ oraz druga, odpowiadająca składnikowi $20 \log \omega$, przechodząca przez punkt $\omega = 1$. Jest ona nachylona pod kątem -20dB/dekadę . Trzeci składnik w (4.52) jest reprezentowany na charakterystyce z rys. 4.16a dwoma półprostymi, które łączą się w punkcie określonym przez $\omega = 1/T$. Na lewo od tego punktu półprosta pokrywa się z osią pulsacji, gdyż $20 \log(1) = 0$ dla $\omega < 1/T$. Druga półprosta jest określona równaniem: $-20 \log \omega$, co jest przybliżeniem ostatniego składnika w (4.52) dla $\omega > 1/T$. Łączne nachylenie charakterystyki w tym przedziale pulsacji wynosi -40dB/dekadę . Widać, że w skali logarytmicznej charakterystyka uproszczona tylko nieznacznie odbiega od charakterystyki dokładnej (linia przerywana).



Rys. 4.16. Charakterystyki częstotliwościowe rzeczywistego elementu całkującego: amplitudy a) oraz fazy b)

Charakterystyka częstotliwościowa fazy zmienia się w granicach od $-\pi/2$ do $-\pi$, zgodnie z (4.51) - rys. 4.16b. Jest to także potwierdzone na charakterystyce amplitudowo-fazowej (rys. 4.17).



Rys. 4.17. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu całkującego z inercją

4.3.2. Element inercyjny II-go rzędu

Transmitancja elementu inercyjny II-go rzędu ma dwa różne od zera bieguny rzeczywiste. Zachodzi to wówczas, gdy spełniony jest warunek:

$$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 4\frac{a_2}{a_0} \geq 0, \quad (4.53)$$

przy czym dla warunku równości w (4.53) występuje rzeczywisty biegun podwójny.

Wychodząc z interpretacji fizycznych analizowanego układu, transmitancję (4.44) zapisuje się zazwyczaj w następującej formie:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (4.54)$$

gdzie parametry T_1, T_2 mają znaczenie stałych czasowych, natomiast k jest wzmocnieniem. Dla $a_0 > 0$ wielkości te są określone następująco:

$$T_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}, \quad k = \frac{b_0}{a_0}, \quad (4.55)$$

natomiast pierwiastki wielomianu charakterystycznego (4.54): $s_1 = -1/T_1, s_2 = -1/T_2$.

Funkcja wagi (odpowiedź impulsowa) może być obliczona na podstawie (4.54):

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right\} = k \left(\frac{1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) 1(t) \quad (4.56)$$

Odpowiedź na skok jednostkowy:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right\} = k \left(1 - \frac{T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2} \right) 1(t) \quad (4.57)$$

Odpowiedzi czasowe są pokazane na rys. 4.18.

Transmitancja widmowa układu jest równa:

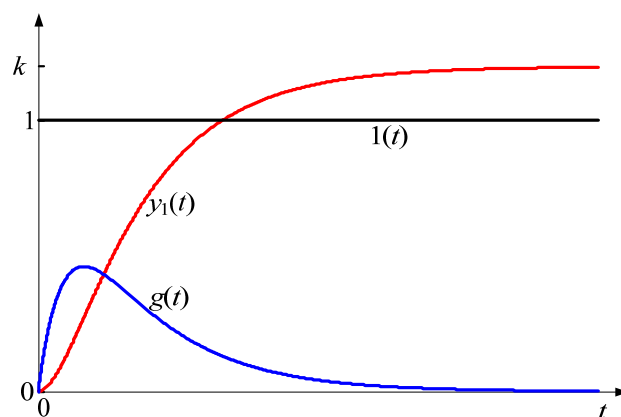
$$G(j\omega) = \frac{k}{(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)} = k \frac{1 - \omega^2 T_1 T_2 - j\omega(T_1 + T_2)}{(1 + (\omega T_1)^2)(1 + (\omega T_2)^2)}, \quad (4.58)$$

skąd:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{k(1 - \omega^2 T_1 T_2)}{(1 + (\omega T_1)^2)(1 + (\omega T_2)^2)}, \quad \operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{-k\omega(T_1 + T_2)}{(1 + (\omega T_1)^2)(1 + (\omega T_2)^2)}.$$

Ponadto:

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1 + (T_1\omega)^2)(1 + (T_2\omega)^2)}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega(T_1 + T_2)}{\omega^2 T_1 T_2 - 1} \quad (4.59)$$

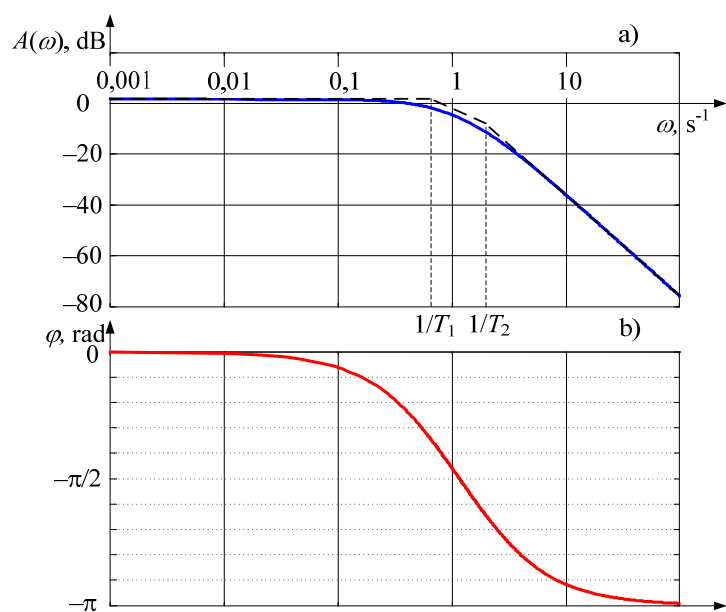


Rys. 4.18. Charakterystyki czasowe członu inercyjnego II rzędu

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa jest określona następującą funkcją:

$$A(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k - 10 \log(1 + (\omega T_1)^2) - 10 \log(1 + (\omega T_2)^2) \quad (4.60)$$

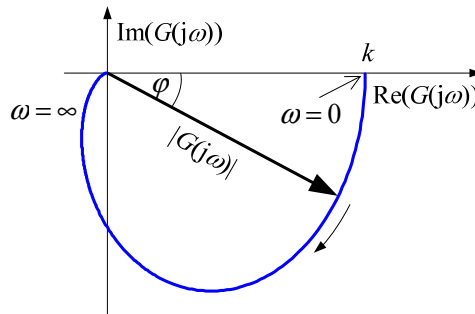
Przebieg tej charakterystyki jest pokazany na rys. 4.19a (linia ciągła). Jest ona wynikiem sumowania trzech składników z (4.60) – linie przerywane.



Rys. 4.19. Charakterystyki częstotliwościowe elementu inercyjnego II rzędu: amplitudy a) oraz fazy b)

Zakładając, że $T_1 > T_2$, pierwsza linia obejmuje przedział pulsacji $\omega < 1/T_1$. W przedziale $1/T_1 < \omega < 1/T_2$ prosty odcinek związany z uproszczonym schematem jest nachylony pod kątem -20 dB/dekadę. W ostatnim przedziale, dla $1/T < \omega$, charakterystyka logarytmiczna amplitudy jest nachylona pod kątem -40 dB/dekadę. Charakterystyka częstotliwościowa fazy zmienia się w granicach $0 < \varphi(\omega) < \pi$ (rys. 4.19b).

Przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej dla członu inercyjnego II rzędu jest pokazany na rys. 4.20. Zgodnie z wykresem charakterystyki fazowej (rys. 4.19b) przebieg trajektorii obejmuje dwie ćwiartki płaszczyzny Nyquista. Moduł transmitancji zmienia się od wartości równej k dla $\omega = 0$ do zera przy $\omega \rightarrow \infty$. Jak widać, charakterystyka amplitudowo-fazowa odtwarza pełną informację o analizowanym członie.



Rys. 4.20. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu inercyjnego II-go rzędu

4.3.3. Element oscylacyjny

Równanie różniczkowe elementu oscylacyjnego jest identyczne z (4.43), przy czym warunek (4.53) nie jest spełniony i równanie charakterystyczne ma dwa pierwiastki zespolone sprzężone. Równanie różniczkowe jest zazwyczaj zapisywane w następującej formie:

$$y''(t) + 2\zeta\omega_n y'(t) + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n^2 u(t), \quad (4.61)$$

gdzie:

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \quad - \text{współczynnik tłumienia oscylacji};$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \quad - \text{pulsacja drgań swobodnych (nietłumionych)};$$

$$k = \frac{b_0}{a_0} \quad - \text{współczynnik wzmocnienia}.$$

Nazwy te stają się zrozumiałe, jeśli poddamy analizie charakterystyki czasowe tego układu. Transmitancja operatorowa członu oscylacyjnego może być bezpośrednio określona z transformat obu stron równania (4.61):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)}, \quad (4.62)$$

gdzie pierwiastki wielomianu mianownika są następujące:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \text{ dla } \zeta \leq 1.$$

Rozkładając (4.62) na ułamki proste otrzymamy:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k\omega_n^2}{s_2 - s_1} \left(\frac{1}{s - s_2} - \frac{1}{s - s_1} \right) = \frac{k\omega_n}{j2\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(\frac{1}{s + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} - \frac{1}{s + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \quad (4.63)$$

Otrzymujemy stąd następującą funkcję wagi:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{k\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{e^{j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t} - e^{-j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t}}{2j} = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t) 1(t) \quad (4.64)$$

Można zauważyć, że pulsacja rzeczywistych oscylacji w układzie o współczynniku tłumienia ζ (pulsacja drgań własnych) jest równa:

$$\omega_t = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4.65)$$

Obie pulsacje: drgań swobodnych ω_n oraz drgań własnych (tłumionych) ω_t są sobie równe tylko wówczas, gdy zanika tłumienie: $\zeta = 0$.

Na podstawie transmitancji (4.63) można także łatwo określić odpowiedź układu na skok jednostkowy:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\} = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (4.66)$$

Posługując się twierdzeniem o transformacie całki (Tabela 3.3) i obliczając całkę nieoznaczoną (przez części):

$$\int e^{bx} \sin(ax) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{bx} \sin(ax - \psi), \quad \psi = \arctg \frac{a}{b}, \text{ otrzymamy:}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau = -\frac{k}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n \tau} \sin\left(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\tau + \psi\right) \Big|_0^t \\ &= k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t + \psi\right) \right) 1(t), \end{aligned} \quad (4.67)$$

przy czym $\psi = \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$. Łatwo też wydzielić obwiednię przejściowej części odpowiedzi jednostkowej (obwiednię górną – rys. 4.21):

$$y_{1p}(t) = k \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \right) 1(t) \quad (4.68)$$

Odpowiedź na skok jednostkowy elementu oscylacyjnego można użyć do identyfikacji parametrów jego transmitancji operatorowej. Na podstawie (4.66) widać, że kolejne maksima odpowiedzi jednostkowej przypadają w zerach odpowiedzi impulsowej:

$$g(t) = \frac{k \omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) = 0,$$

skąd: $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$, co ma miejsce dla wartości czasu:

$$t_{mxn} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} n.$$

W tych punktach lokalnych wartości ekstremalnych (górne i dolne odchylenia od wartości ustalonej) funkcja $y_1(t_{mxn})$ przyjmuje następujące wartości:

$$y_1(t_{mxn}) = k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi n} \sin(\pi n + \psi) \right) = k \left(1 - (-1)^n e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi n} \right), n = 1, 2, \dots$$

Łatwo stąd wyznaczyć dwie kolejne ‘górne’ amplitudy (rys. 4.21):

$$A_1 = y_1(t_{mx1}) - k = k e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, A_3 = y_1(t_{mx3}) - k = k e^{-\frac{3\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (4.69)$$

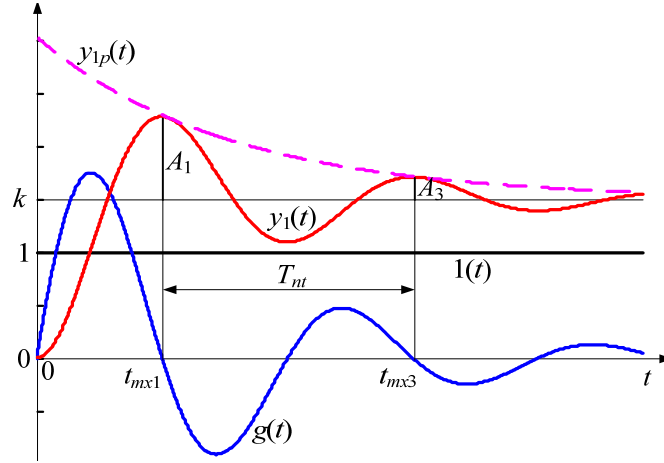
Na podstawie obu tych wielkości można obliczyć współczynnik tłumienia:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{(\ln(A_1 / A_3))^2}}} \quad (4.70)$$

Pulsację drgań własnych (tłumionych) można obliczyć, mierząc czas pomiędzy dwiema górnymi wartościami maksymalnymi (rys. 4.21):

$$t_{mx3} - t_{mx1} = T_{nt} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \text{ skąd otrzymujemy:}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{(t_{mx3} - t_{mx1}) \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{T_{nt} \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.71)$$



Rys. 4.21. Przebiegi czasowe członu oscylacyjnego

W podobny sposób na podstawie odpowiedzi jednostkowej elementu oscylacyjnego można określić również inne użyteczne charakterystyki tego układu.

Wartość A_1 związana z przekroczeniem ustalonej wartości odpowiedzi układu na skok jednostkowy jest miarą przeregulowania występującego w tej odpowiedzi. Jest ona często podawana w [%]:

$$y_{p\%} = \frac{y_{mx1} - y_{ust}}{y_{ust}} 100 = \frac{A_1}{k} 100 = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (4.72)$$

Przy projektowaniu układów stawia się wymagania, aby ze względów technicznych przeregulowanie nie było zbyt duże. Z kolei zbyt małe przeregulowanie może wydłużyć czas ustalenia się odpowiedzi. Na podstawie (4.72) widać, że wartość przeregulowania bezpośrednio zależy od współczynnika tłumienia ζ . Można stąd wyznaczyć różne użyteczne związki, co ilustruje kolejny przykład.

Przykład 4.1. Określić po jakim czasie odpowiedź układu oscylacyjnego na skok jednostkowy będzie się różnić od wartości ustalonej nie więcej niż 2%.

Problem ten można zdefiniować w postaci następującego warunku:

$\frac{y_{1p}(t) - k}{k} \leq 0,02$, gdzie $y_{1p}(t)$ jest obwiednią górną (4.68). Z tego warunku należy obliczyć

$t_{u2\%} = t$. Uwzględniając w tym warunku zależność (4.68), otrzymamy: $e^{-\zeta\omega_n t} \leq 0,02\sqrt{1-\zeta^2}$,

skąd wyznaczamy poszukiwany czas: $t \geq \frac{-\ln(0,02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} = t_{u2\%}$.

Można sprawdzić, że dla typowych wartości współczynnika tłumienia ζ można posługiwać się relacją uproszczoną: $t_{u2\%} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$, natomiast dla błędu 5%: $t_{u5\%} = \frac{-\ln(0,05\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$.

Charakterystyka widmowa może być określona na podstawie (4.62):

$$G(j\omega) = \left(\frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right)_{s=j\omega} = \frac{k\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega}, \quad (4.73)$$

skąd:

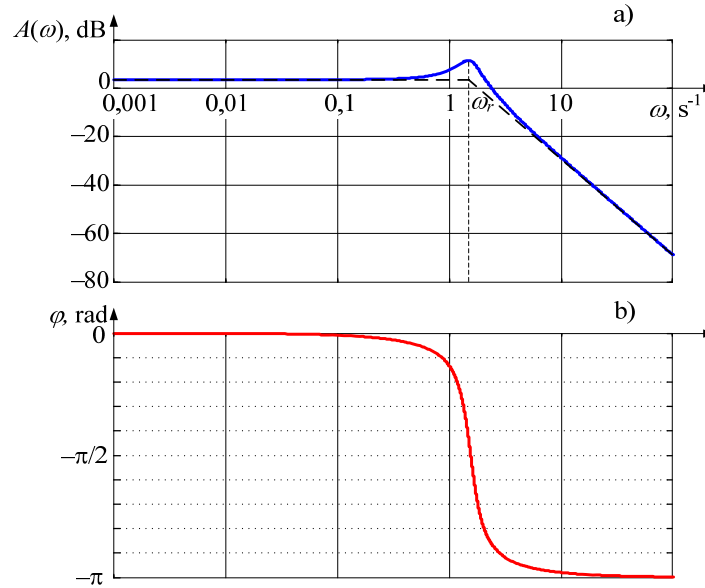
$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{k\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4(\zeta\omega_n\omega)^2}, \quad \operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{-2k\omega_n^3\zeta\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4(\zeta\omega_n\omega)^2}.$$

$$\text{Ponadto: } |G(j\omega)| = \frac{k\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4(\zeta\omega_n\omega)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (4.74)$$

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa jest określona następującą funkcją:

$$A(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| \quad (4.75)$$

Charakterystyka ta jest pokazana na rys. 4.22a (linia ciągła).



Rys. 4.22. Charakterystyki częstotliwościowe elementu oscylacyjnego: amplitudy a) oraz fazy b)

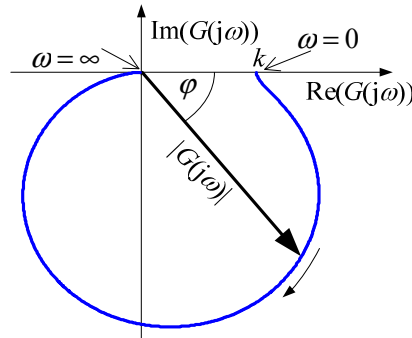
Jej przebieg jest podobny do charakterystyki układu inercyjnego II rzędu za wyjątkiem obszaru w pobliżu pulsacji ω_r , której odpowiada maksymalna wartość charakterystyki. Wartość tej pulsacji, nazywanej pulsacją rezonansową, można określić przez przyrównanie do zera pierwszej pochodnej modułu transmitancji widmowej $|G(j\omega)|$. Otrzymamy następującą wartość:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (4.76)$$

Ponieważ pulsacja jest określona przez wielkość rzeczywistą, więc rezonans obserwowany w postaci maksymalnej wartości na charakterystyce amplitudowej, występuje dla $\zeta < 1/\sqrt{2} \approx 0,707$. Wartość maksymalna na charakterystyce częstotliwościowej amplitudy zależy od współczynnika tłumienia ζ . Stosowanie uproszczonej metody rysowania tej charakterystyki we współrzędnych logarytmicznych za pomocą prostych odcinków jest ograniczone do przedziału $0,4 < \zeta < 0,6$, przy czym punkt łączący obie półproste jest wyznaczony przez pulsację ω_r [29]. Dla rosnącej pulsacji charakterystyka przybiera postać prostej nachylonej do osi pulsacji pod kątem -40dB/dekadę .

Charakterystyka częstotliwościowa fazy zmienia się w granicach $0 > \varphi(\omega) > -\pi$ (rys. 4.22b). Na podstawie (4.74) widać, że faza transmitancji widmowej przyjmuje wartość: $\varphi = -\pi/2$ dla $\omega = \omega_n$.

Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu oscylacyjnego jest pokazana na rys. 4.23. Zgodnie z przebiegiem charakterystyki fazowej (rys. 4.22b) przebieg trajektorii obejmuje dwie ćwiartki płaszczyzny Nyquista. Moduł transmitancji zmienia się od wartości równej k dla $\omega = 0$ do zera dla $\omega \rightarrow \infty$.



Rys. 4.23. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu oscylacyjnego

4.4. Element opóźniający

Element opóźniający (zwłoczny) realizuje operację, która w dziedzinie czasu jest określona następującą zależnością:

$$y(t) = ku(t - t_0), \quad (4.77)$$

przy czym $t_0 > 0$.

Transformacja relacji (4.77) prowadzi do następującej transmitancji analizowanego układu:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = ke^{-st_0} \quad (4.78)$$

Odpowiedź impulsowa może być obliczona bezpośrednio na podstawie (4.77):

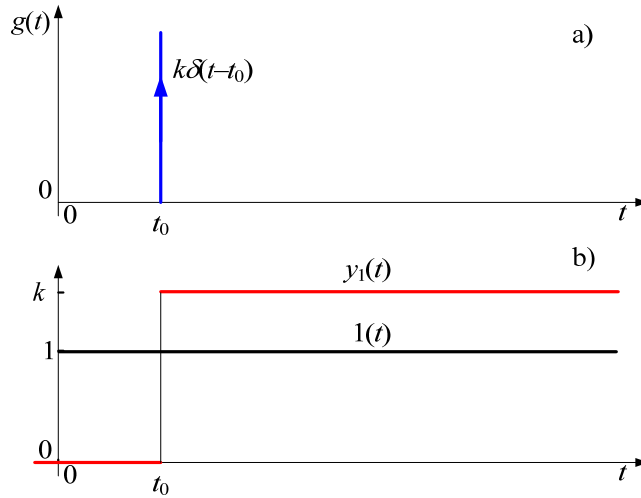
$$g(t) = k\delta(t - t_0), \quad (4.79)$$

gdyż w takim przypadku $u(x) = \delta(x)$. Podobny wynik otrzymamy obliczając transformatę odwrotną z (4.78).

Odpowiedź na skok jednostkowy:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{ke^{-st_0}}{s} \right\} = k1(t - t_0), \quad (4.80)$$

co jest równe całce prawej strony (4.79). Odpowiedzi czasowe są pokazane na rys. 4.24.



Rys. 4.24. Charakterystyki czasowe członu opóźniającego: a) odpowiedź impulsowa;
b) odpowiedź na skok jednostkowy

Transmitancja widmowa tego członu jest równa:

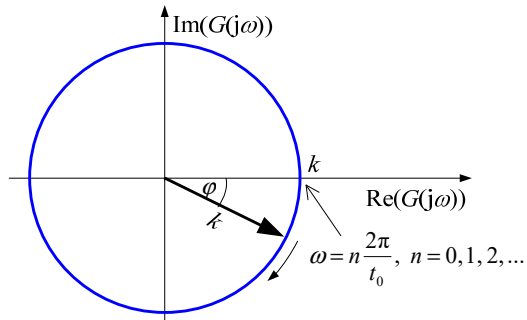
$$G(j\omega) = ke^{-j\omega t_0}, \quad (4.81)$$

skąd: $\text{Re}(G(j\omega)) = k \cos \omega t_0$, $\text{Im}(G(j\omega)) = -k \sin \omega t_0$.

Ponadto:

$$|G(j\omega)| = k, \quad \varphi(\omega) = -\omega t_0 \quad (4.82)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa przedstawia zatem okrąg o promieniu równym k , po którym przebiega trajektoria fazy w ujemnym kierunku wraz z rosnącą pulsacją ω (rys. 4.25). Mija ona punkt $(k+j0)$ po zmianie pulsacji o wielokrotność $2\pi/t_0$.

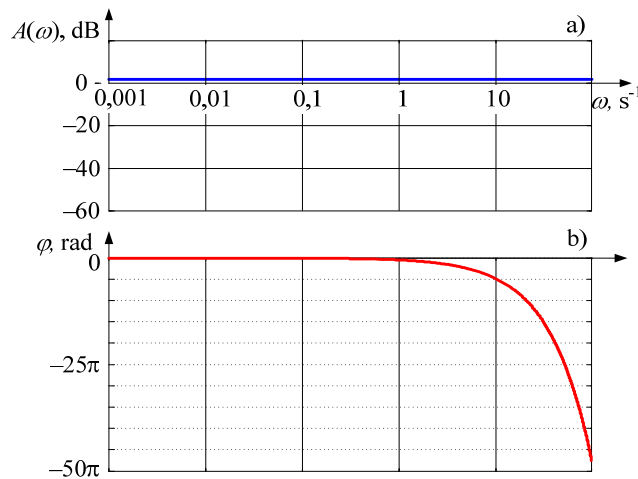


Rys. 4.25. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu opóźniającego

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa jest określona następującą funkcją:

$$A(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log k \quad (4.83)$$

Przebieg tej charakterystyki jest pokazany na rys. 4.26a (linia ciągła). Ma ona stałą wartość w całym zakresie zmian pulsacji.



Rys. 4.26. Charakterystyki częstotliwościowe członu opóźniającego: amplitudy a) oraz fazy b)

Charakterystyka częstotliwościowa fazy narasta w kierunku ujemnym od zera do nieskończoności (rys. 4.26b).

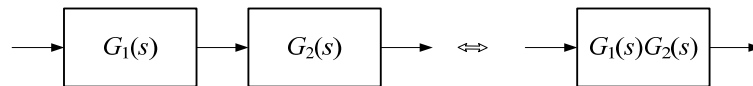
4.5. Układy złożone

Układy złożone można rozpatrywać jako struktury utworzone z przedstawionych powyżej elementów. Transmitancja operatorowa układu złożonego może być określona na podstawie znanych transmitancji elementów składowych oraz ich konfiguracji. Posługujemy się tu zasadami, które wynikają z właściwości przekształcenia Laplace'a.

4.5.1. Algebra schematów blokowych

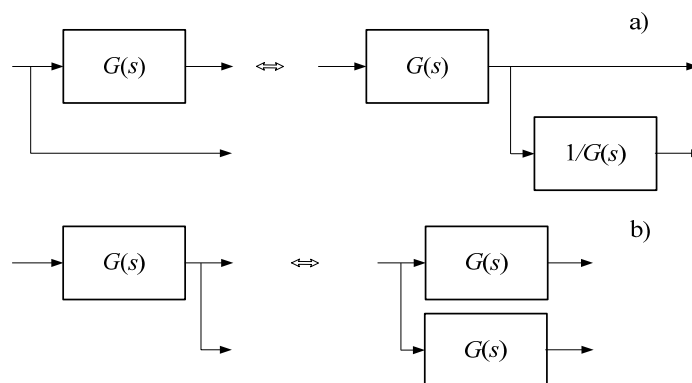
Szeregowe łączenie bloków

Ekwiwalentny opis w dziedzinie czasu szeregowo połączonych bloków jest pokazany na rys. 2.12. W przypadku transmitancji operatorowej spłot jest równoważny iloczynowi transformat, co prowadzi do operacji jak na rys. 4.23.



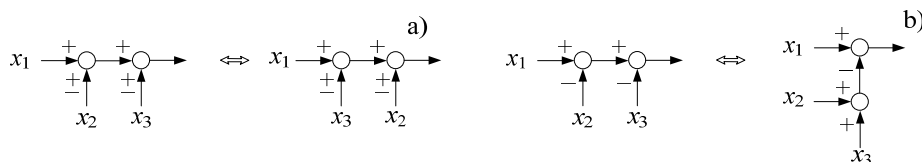
Rys. 4.27. Zasada szeregowego łączenia bloków

Przesunięcie punktu wyprowadzenia sygnału

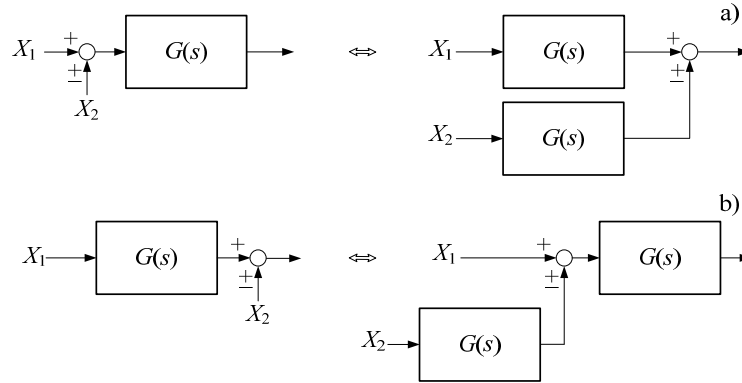


Rys. 4.28. Przesunięcie punktu wyprowadzenia sygnału: a) do przodu; b) do tyłu

Operacje na sumatorach



Rys. 4.29. Przesunięcie punktu wyprowadzenia sygnału: a) do przodu; b) do tyłu

Przesunięcie węzła sumacyjnego

Rys. 4.30. Przesunięcie węzła sumacyjnego: a) do przodu; b) do tyłu

Sprężenie zwrotne

Transmitancję zastępczą układu ze sprzężeniem można określić zapisując relacje pomiędzy wejściem i wyjściem poszczególnych bloków (rys. 4.31):

$$Y(s) = E(s)G_1(s) = (X(s) \pm X_H(s))G_1(s) \quad (4.84)$$

Z kolei sygnał sprzężenia zwrotnego jest równy: $X_H(s) = Y(s)H(s)$

Po podstawieniu do (4.84) otrzymamy:

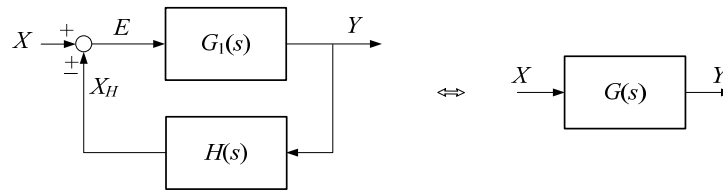
$$Y(s) = X(s)G_1(s) \pm Y(s)G_1(s)H(s),$$

co po przekształceniu daje transmitancję zastępczą:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)H(s)} \quad (4.85)$$

W układach regulacji ważną rolę pełni sygnał uchybu (błędu) regulacji: $E(s) \leftrightarrow e(t)$, którego wartość oszacowuje różnicę pomiędzy wartością zadaną i wyjściową:

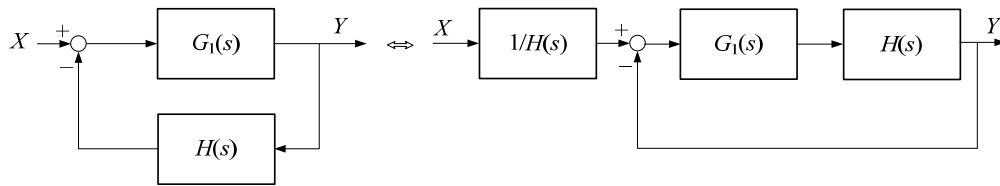
$$E(s) = X(s) - H(s)Y(s) = \frac{X(s)}{1 + G_1(s)H(s)} \quad (4.86)$$



Rys. 4.31. Układ ze sprzężeniem zwrotnym

Utrzymanie uchybu (4.86) w określonych granicach w stanach: ustalonym i przejściowym, jest podstawowym zadaniem układu regulacji automatycznej. Jak widać, decydują o tym transmitancje elementów w torze głównym oraz w torze sprzężenia zwrotnego. Poniższe przykłady ilustrują niektóre przekształcenia układów ze sprzężeniami.

Przykład 4.2. Dowieść, że układy pokazane na rys. 4.32 są sobie równoważne.



Rys. 4.32. Eliminacja bloku w torze sprzężenia zwrotnego

Układ objęty sprzężeniem zwrotnym na prawym rysunku ma następującą transmitancję zastępczą:

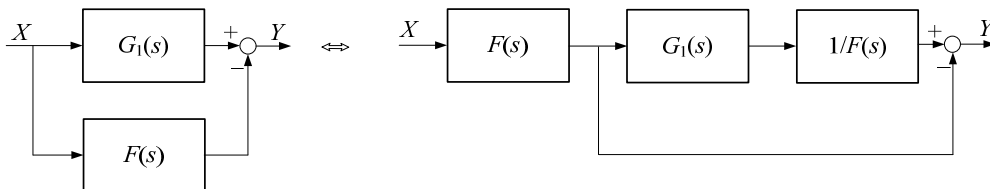
$$G_z(s) = \frac{G_1(s)H(s)}{1 + G_1(s)H(s)}$$

Zatem dla układu z prawej strony rysunku mamy:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{H(s)} G_z(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)}$$

co jest równe transmitancji układu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym z lewej strony rysunku.

Przykład 4.3. Dowieść, że układy pokazane na rys. 4.33 są sobie równoważne.



Rys. 4.33. Eliminacja bloku w torze sprzężenia bezpośredniego

Dla układu z lewej strony rysunku można napisać:

$$G(s) = G_1(s) - F(s)$$

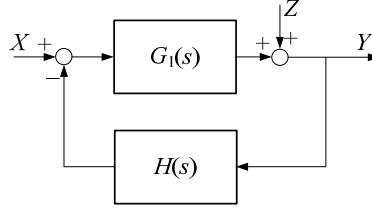
Z kolei transmitancja układu z prawej strony jest równa:

$$G(s) = F(s) \left(G_1(s) \frac{1}{F(s)} - 1 \right) = G_1(s) - F(s)$$

Oba układy są zatem równoważne.

Układ z wieloma wejściami

W przypadku układu z kilkoma wejściami sygnał wyjściowy można określić, posługując się zasadą superpozycji. Metoda ta wypływa bezpośrednio z liniowości układu. Odpowiednie zależności wyprowadzimy na przykładzie układu z rys. 4.34, gdzie transformata $Z(s)$ reprezentuje zakłócenia, jakie działają na układ.



Rys. 4.34. Układ z wyróżnionym zakłóceniem

Celem tych rozważań jest określenie transformaty $Y(s)$ jako funkcji obu wymuszeń: $X(s)$ oraz $Z(s)$, a także samego układu z wyszczególnionymi transmitancjami. Na podstawie właściwości transformaty układu liniowego możemy uważać, że odpowiedź układu na oba wymuszenia jest sumą odpowiedzi na działające oddzielnie wymuszenia $X(s)$ oraz $Z(s)$:

$$Y_{XZ}(s) = Y_X(s) + Y_Z(s) = X(s)G_{YX}(s) + Z(s)G_{YZ}(s) \quad (4.87)$$

gdzie:

$$G_{YX}(s) = \frac{Y_X(s)}{X(s)} \text{ dla } Z(s) = 0,$$

$$G_{YZ}(s) = \frac{Y_Z(s)}{Z(s)} \text{ dla } X(s) = 0.$$

W pierwszym przypadku ($Z(s) = 0$) mamy do czynienia z typowym układem z ujemnym sprzężeniem zwrotnym:

$$G_{YX}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)}, \text{ zatem: } Y_X(s) = \frac{X(s)G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)}.$$

W przypadku wymuszenia od zakłóceń ($X(s) = 0$) otrzymamy:

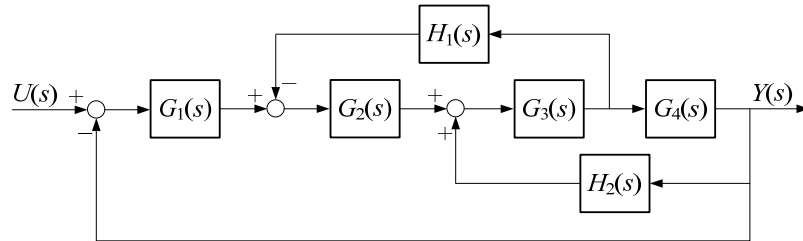
$$Y(s) = Z(s) - Y(s)G_1(s)H(s), \text{ skąd:}$$

$$Y(s) = Y_Z(s) = \frac{Z(s)}{1 + G_1(s)H(s)} \text{ oraz: } G_{YZ}(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)}.$$

Łączna odpowiedź na oba wymuszenia wyraża się zatem zależnością:

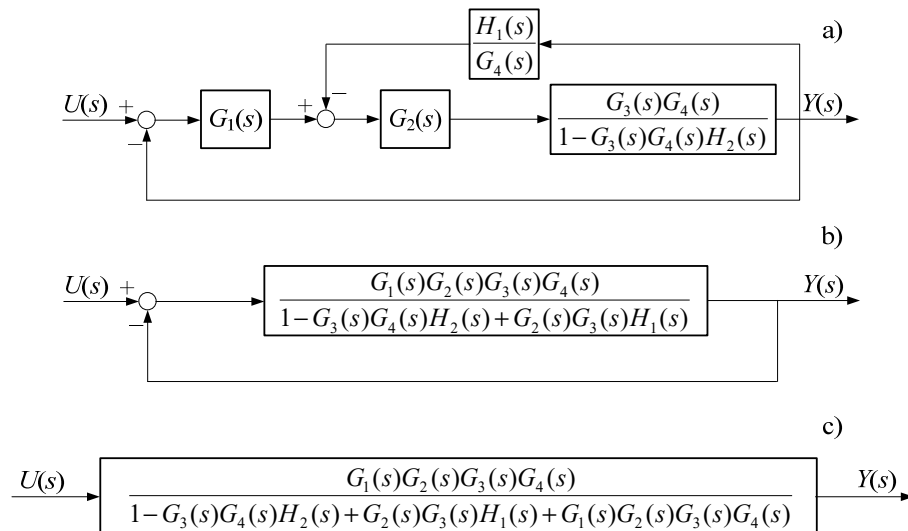
$$Y_{XZ}(s) = \frac{X(s)G_1(s) + Z(s)}{1 + G_1(s)H(s)} \quad (4.88)$$

Przykład 4.4. Określić transmitancję zastępczą układu z rys. 4.35.



Rys. 4.35. Schemat złożonego systemu dynamicznego

Zakładamy, że znane są transmitancje poszczególnych elementów systemu. Kolejne kroki redukcji tego schematu są pokazane na rys. 4.36.



Rys. 4.36. Schemat złożonego systemu dynamicznego

W pierwszym kroku przesuwamy sygnał wymuszenia bloku $H_1(s)$ za blok $G_4(s)$, a powstały w ten sposób układ z dodatnim sprzężeniem zwrotnym, obejmujący bloki $G_3(s)$, $G_4(s)$ oraz $H_2(s)$, zastępujemy jednym blokiem (rys. 4.36a).

W kolejnym kroku (rys. 4.36a) można zredukować do jednego bloku tę część powstałego układu, która tworzy pętlę ujemnego sprzężenia zwrotnego połączoną szeregowo z blokiem $G_1(s)$. W ten sposób powstaje układ jak na rys. 4.36b.

Ostatni krok polega na redukcji zewnętrznej pętli sprzężenia zwrotnego, w wyniku czego otrzymuje się pojedynczy blok reprezentowany transmitancją jak na rys. 4.36c.

Ostateczną postać transmitancji uzyskamy po podstawieniu do wyrażenia z rys. 4.36c transmitancji składowych bloków początkowego układu. Końcowy ułamek będzie przedstawiał transmitancję ekwiwalentnego układu, jeśli zostaną zredukowane ewentualne wspólne czynniki licznika i mianownika.

4.5.2. Elementy wyższych rzędów

Element inercyjny z opóźnieniem

Element inercyjny I-go rzędu z opóźnieniem jest opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$Ty'(t) + y(t) = ku(t - t_0) \quad (4.89)$$

Obliczając transformatę Laplace'a z obu stron równości (4.89) otrzymamy transmitancję układu:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ke^{-st_0}}{sT + 1} = \frac{k}{T} \frac{e^{-st_0}}{s + 1/T}, \quad (4.90)$$

skąd łatwo określić funkcję wagi:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{T} \frac{e^{-st_0}}{s + 1/T} \right\} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t-t_0}{T}} 1(t). \quad (4.91)$$

Podobnie odpowiedź na skok jednostkowy w postaci operatorowej jest następująca:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{k}{T} \frac{e^{-st_0}}{s(s + 1/T)} \quad (4.92)$$

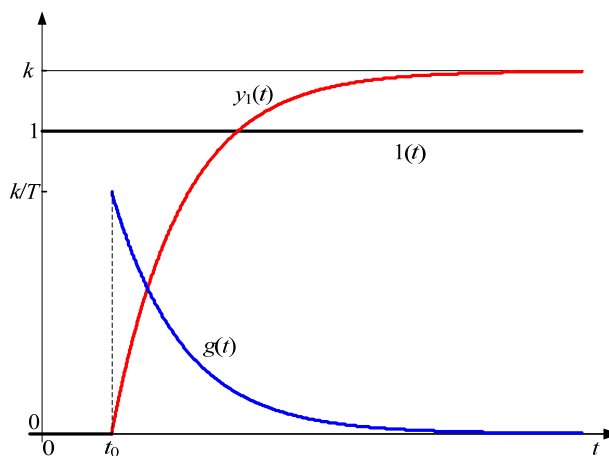
Obliczając odwrotną transformatę Laplace'a, otrzymamy odpowiedź czasową:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{T} \frac{e^{-st_0}}{s(s + 1/T)} \right\} = k \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{T}} \right) 1(t) \quad (4.93)$$

Otrzymane charakterystyki czasowe są pokazane na rys. 4.37. Widać, że charakterystyki te są podobne do odpowiednich charakterystyk układu inercyjnego (rys. 4.3), z tym że są opóźnione o wartość zwłoki t_0 . Przykłady takiego zachowania się układów są związane z różnego rodzaju transportem: linie długie, taśmociągi, elementy z przenoszeniem ciepła i inne.

Na podstawie transmitancji (4.90) można określić charakterystyki częstotliwościowe układu. Transmitancja widmowa jest równa:

$$G(j\omega) = \frac{ke^{-st_0}}{1 + j\omega T} = k \frac{(\cos \omega t_0 - \omega T \sin \omega t_0) - j(\omega T \cos \omega t_0 + \sin \omega t_0)}{1 + (\omega T)^2}, \quad (4.94)$$



Rys. 4.37. Charakterystyki czasowe układu inercyjnego I-go rzędu z opóźnieniem

skąd:

$$G(j\omega) = \frac{k(\cos \omega t_0 - \omega T \sin \omega t_0)}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{k(\sin \omega t_0 + \omega T \cos \omega t_0)}{1 + (\omega T)^2}, \quad (4.95)$$

oraz: $\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{k \cos(\omega t_0 + \gamma)}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$, $\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{-k \sin(\omega t_0 + \gamma)}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$, $\gamma = \arctg \omega T$.

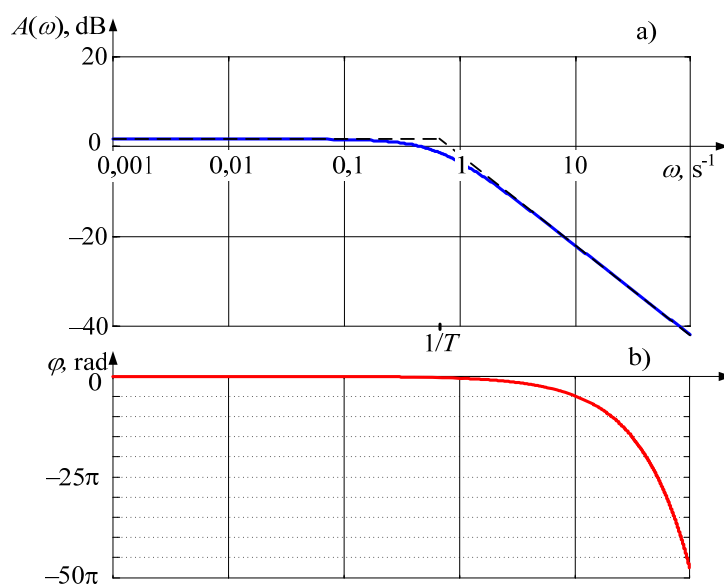
Ponadto:

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\omega t_0 - \arctg \omega T \quad (4.96)$$

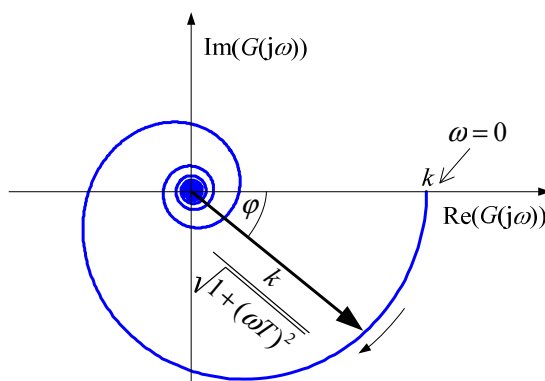
Jak widać, charakterystyka amplitudowa jest taka sama jak dla układu inercyjnego I-go rzędu, co jest oczywiste, gdyż funkcja wykładnicza w (4.94) nie wnosi zmiany amplitudy. Jest ona powtórzona na rys. 4.38a.

Charakterystyka fazy jest sumą tych charakterystyk dla elementu opóźniającego i inercyjnego (rys. 4.38b). Charakterystyka ta praktycznie tylko nieznacznie różni się od charakterystyki fazy układu opóźniającego.

Trajektorię charakterystyki amplitudowo-fazowej na płaszczyźnie Nyquista można łatwo wykreślić analizując postać (4.95) transmitancji widmowej układu (rys. 4.39). Amplituda transmitancji maleje zgodnie z charakterystyką członu inercyjnego, natomiast faza narasta w kierunku ujemnym do nieskończoności. Łącznie charakterystyka amplitudowo-fazowa tworzy ślimak zmierzający do początku układu współrzędnych.



Rys. 4.38. Charakterystyki częstotliwościowe: amplitudy a) oraz fazy b)



Rys. 4.39. Charakterystyka amplitudowo-fazowa transmitancji

Element inercyjny wysokiego rzędu

Założmy, że szeregowo z układem inercyjnym II rzędu o transmitancji (4.54) włączony zostanie układ inercyjny I rzędu o jednostkowym wzmocnieniu i stałej czasowej T_3 . Wówczas transmitancja wypadkowa układu będzie następująca:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} = \frac{k}{T_1T_2T_3(s+1/T_1)(s+1/T_2)(s+1/T_3)} \quad (4.97)$$

gdzie: $-1/T_1, -1/T_2, -1/T_3$ są pierwiastkami mianownika (biegunami transmitancji).

Następny przykład pokazuje, jak zmieniają się właściwości układu po rozszerzeniu jego transmitancji o dodatkowy biegun.

Przykład 4.5. Transmitancja układu II rzędu określona jest zależnością (4.54), gdzie: $T_1 = 1\text{s}$, $T_2 = 10\text{s}$, $k = 1$. Określić charakterystyki częstotliwościowe oraz odpowiedź na skok jednostkowy układu po jego rozszerzeniu o kolejny człon inercyjny o stałą czasowej: a) $T_3 = 100\text{s}$, b) $T_3 = 0,1\text{s}$.

Na początku obliczmy odpowiedzi układów na skok jednostkowy przed i po dodaniu trzeciego bieguna. Dla układu II rzędu otrzymujemy następującą transformatę odpowiedzi:

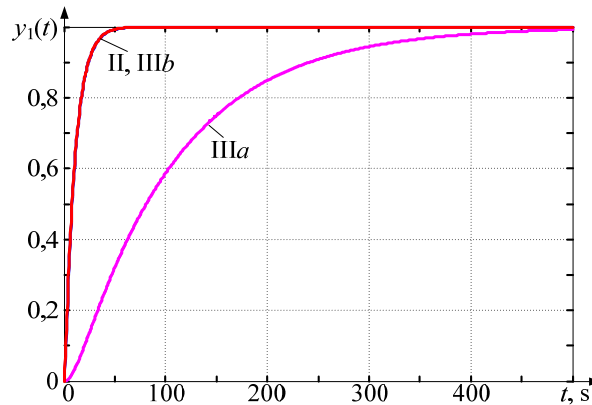
$$Y_{1(2)}(s) = \frac{1}{s} G_{(2)}(s) = \frac{k}{T_1 T_2 s(s + 1/T_1)(s + 1/T_2)} = \frac{k}{T_1 T_2 s(s - s_1)(s - s_2)},$$

gdzie: $s_1 = -\frac{1}{T_1}$, $s_2 = -\frac{1}{T_2}$ - bieguny transmitancji.

Metodą residuów (3.47) obliczamy transformatę odwrotną:

$$y_{1(2)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{1(2)}(s)\} = k - \frac{ke^{-t/T_1}}{T_2(1/T_2 - 1/T_1)} - \frac{ke^{-t/T_2}}{T_1(1/T_1 - 1/T_2)} = \frac{k}{T_2 - T_1} (T_2(1 - e^{-t/T_2}) - T_1(1 - e^{-t/T_1})).$$

Przebieg tej odpowiedzi jest pokazany na rys. 4.40 (krzywa II).



Rys. 4.40. Odpowiedzi badanych układów na skok jednostkowy: II – układ II-go rzędu; IIIa – III-go rzędu z T_{3a} ; IIIb – III-go rzędu z T_{3b}

Funkcję odpowiedzi można także zapisać z zastosowaniem biegunów transmitancji:

$$y_{1(2)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{1(2)}(s)\} = \frac{k}{s_1 - s_2} (s_1(1 - e^{ts_2}) - s_2(1 - e^{ts_1})).$$

Dla układu III rzędu podobne postępowanie doprowadzi do następującej odpowiedzi na skok jednostkowy:

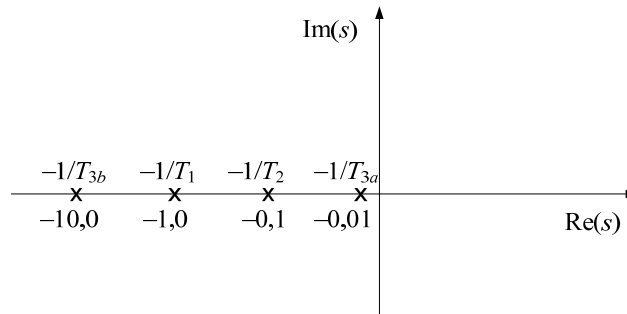
$$y_{1(3)}(t) = k \left(1 - \frac{T_1^2 e^{-t/T_1}}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} - \frac{T_2^2 e^{-t/T_2}}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} - \frac{T_3^2 e^{-t/T_3}}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \right)$$

i równoważnie:

$$y_{1(3)}(t) = k \left(1 - \frac{s_2 s_3 e^{ts_1}}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)} - \frac{s_1 s_3 e^{ts_2}}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)} - \frac{s_1 s_2 e^{ts_3}}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)} \right).$$

Po podstawieniu do powyższych równań podanych w zadaniu parametrów otrzymamy szukane przebiegi. Na rys. 4.40 są pokazane kolejne odpowiedzi na skok jednostkowy układu III rzędu dla danych a) oraz b).

Rozmieszczenie biegunów na płaszczyźnie s jest pokazane na rys. 4.41. Warto zauważyć, że wszystkie bieguny są rzeczywiste i ujemne (leżą po lewej stronie od osi urojonej).



Rys. 4.41. Położenie biegunów transmitancji na płaszczyźnie zespolonej s

Transmitancja widmowa układu II-go rzędu jest określona przez (4.58), natomiast dla układu III-go rzędu otrzymamy:

$$G(j\omega) = \frac{k}{(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)(jT_3\omega + 1)}$$

skąd łatwo określić część rzeczywistą: $\text{Re}(G(j\omega))$, urojoną: $\text{Im}(G(j\omega))$ oraz moduł: $|G(j\omega)|$. Fazę układu III-rzędu można obliczyć jako sumę argumentów poszczególnych czynników transmitancji widmowej:

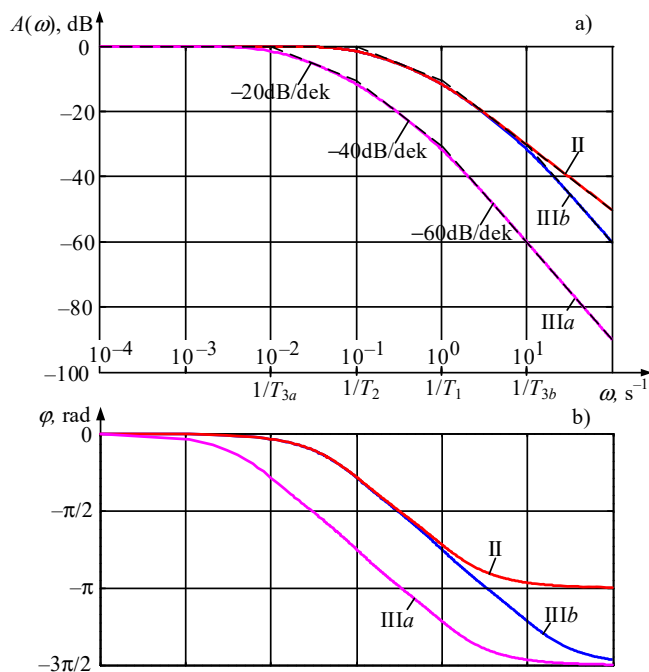
$$\varphi(\omega) = -\arg(jT_1\omega + 1) - \arg(jT_2\omega + 1) - \arg(jT_3\omega + 1).$$

Jak widać, łączna zmiana fazy dla $0 < \omega < \infty$ wynosi $-3\pi/2$.

Charakterystyki logarytmiczne amplitudy i fazy dla trzech analizowanych układów są pokazane na rys. 4.42. Widać, że charakterystyki amplitudy aproksymowane prostymi odcinkami (czarne linie) tylko nieznacznie różnią się od rzeczywistych charakterystyk.

Analizując zarówno odpowiedzi na skok jednostkowy jak i charakterystyki częstotliwościowe widać, że dodanie do układu II-go rzędu dodatkowego członu inercyjnego o stałej czasowej $T_{3b} = 0,1\text{s}$ tylko nieznacznie zmienia analizowane przebiegi. Inaczej jest z członem o stałej czasowej $T_{3a} = 100\text{s}$ – tu obserwujemy dużą zmianę zarówno odpowiedzi czasowej, jak i charakterystyk częstotliwościowych.

Problem ten można analizować na podstawie wartości biegunów transmitancji. Zwróćmy uwagę na to, że biegun, który istotnie zmienia charakterystyki układu (związany ze stałą czasową T_{3a}), leży najbliżej od osi urojonej (rys. 4.41). Odwrotnie jest z dodanym członem o stałej czasowej T_{3b} – związany z nim biegun leży najdalej od osi urojonej.



Rys. 4.42. Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe amplitudy a) oraz fazy b) analizowanych układów

Obserwację poczynioną w powyższym przykładzie można uogólnić: o właściwościach dynamicznych i częstotliwościowych układu wysokiego rzędu decydują głównie dwa bieguny o najmniejszych wartościach części rzeczywistej (w ogólnym przypadku mogą to być sprzężone pary biegunów zespolonych). Słuszność tego wniosku będzie zależała od wzajemnego położenia także innych biegunów – zwłaszcza, gdy tworzą one grupy biegunów nieznacznie od siebie oddalonych. Tym niemniej, w wielu praktycznych przykładach, układ wysokiego rzędu może być reprezentowany za pomocą ekwiwalentnego układu II-go rzędu, który został utworzony z oryginalnego układu przez pominięcie biegunów najdalej położonych od osi urojonej.

Element oscylacyjny z inercją

Przeprowadzimy dyskusję podobną do powyższej przy założeniu, że wyjściowym układem jest człon oscylacyjny, w szereg z którym dodawany jest układ inercyjny I-go rzędu. Otrzymujemy następującą transmitancję zastępczą:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2 / T_3}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - s_3)} = \frac{k\omega_n^2 / T_3}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)}, \quad (4.98)$$

gdzie: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ ($\zeta \leq 1$), $s_3 = -1/T_3$.

Transformata odpowiedzi na skok jednostkowy ma następującą formę:

$$Y_1(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{k\omega_n^2 / T_3}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - s_3)} = \frac{k\omega_n^2 / T_3}{s(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)}, \quad (4.99)$$

W mianowniku tej transformaty występują cztery różne pierwiastki, więc stosując metodę residuów możemy określić odpowiedź czasową:

$$y_1(t) = \frac{k\omega_n^2}{T_3} \left(\frac{-1}{s_1 s_2 s_3} + \frac{e^{s_1 t}}{s_1(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)} + \frac{e^{s_2 t}}{s_2(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)} + \frac{e^{s_3 t}}{s_3(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)} \right),$$

co po wstawieniu stosownych wartości biegunów prowadzi do następującego równania:

$$y_1(t) = k \left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - 2\zeta\omega_n T_3 + (\omega_n T_3)^2)}} \sin(\omega_t t + \gamma) - \frac{(\omega_n T_3)^2 e^{-t/T_3}}{1 - 2\zeta\omega_n T_3 + (\omega_n T_3)^2} \right), \quad (4.100)$$

$$\text{gdzie: } \omega_t = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \gamma = \arctg \frac{\tg \psi (1/(\zeta\omega_n) - 2T_3)}{1/(\zeta\omega_n) - T_3(1 - \tg^2 \psi)}, \quad \tg \psi = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \quad (4.67).$$

Można zauważyć, że po usunięciu członu inercyjnego ($T_3 = 0$) zależność (4.100) przedstawia odpowiedź układu oscylacyjnego na skok jednostkowy.

Charakterystyki częstotliwościowe rozważanego układu III-go rzędu można określić na podstawie analizy transmitancji widmowej otrzymanej z (4.98). Następnym przykładem pokazuje zmianę właściwości układu oscylacyjnego po rozszerzeniu go o człon inercyjny I-rzędu.

Przykład 4.6. Transmitancja układu III rzędu utworzonego z elementu oscylacyjnego rozszerzonego o człon inercyjny jest określona zależnością (4.98), przy czym: $k = 1,5$; $\omega_n = 1,5 \text{ s}^{-1}$; $\zeta = 0,2$ (współczynnik tłumienia). Zbadać właściwości układu przy zmianie stałej czasowej członu inercyjnego.

Dla podanych parametrów bieguny transmitancji układu oscylacyjnego przyjmują następujące wartości: $s_{1,2} = -0,3 \pm j0,98$.

Część rzeczywista pierwiastków zespolonych przyjmuje wartość:

$$\text{Re}(s_{1,2}) = \omega_n \zeta = -0,3$$

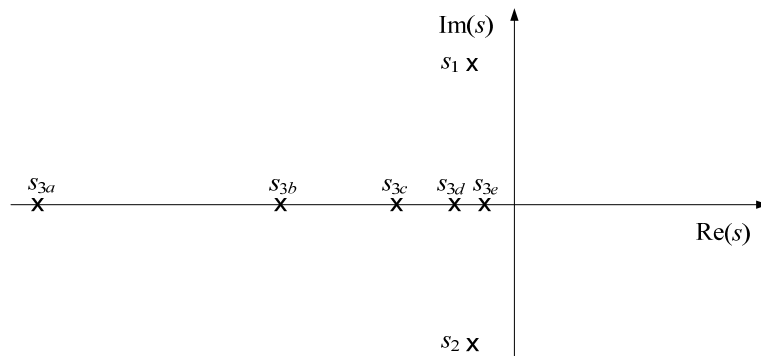
Odpowiedź na skok jednostkowy rozważanego układu jest określona przez (4.100). Zbadajmy przebieg tej odpowiedzi dla następujących wartości stałej czasowej układu inercyjnego: $T_3 = 0$; $T_{3a} = 0,3$; $T_{3b} = 2 T_{3a}$; $T_{3c} = 2 T_{3b}$; $T_{3d} = 2 T_{3c}$; $T_{3e} = 2 T_{3d}$. A zatem kolejne wartości stałych czasowych są podwajane, natomiast pierwszy pomiar odnosi się do układu oscylacyjnego bez członu inercyjnego. W ten sposób bieguny transmitancji członu inercyjnego:

$$G_I(s) = \frac{1}{sT_3 + 1} = \frac{1/T_3}{s + 1/T_3} = \frac{-s_3}{s - s_3}, \quad s_3 = -1/T_3,$$

przyjmują następujące wartości:

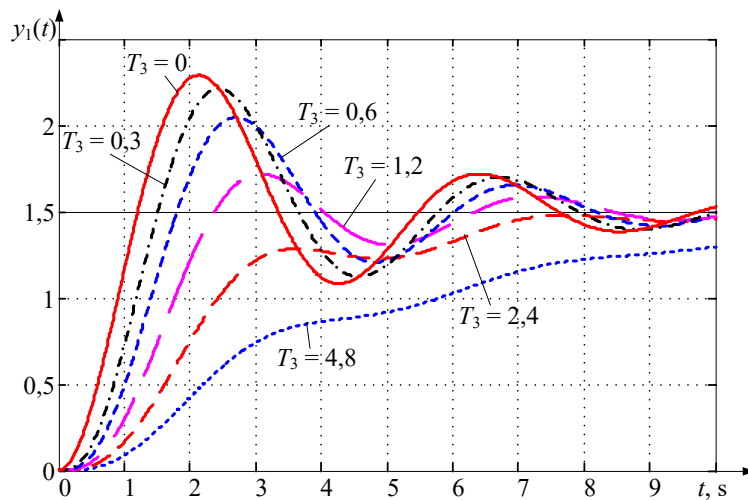
$$s_{3a} = -3,33; s_{3b} = -1,67; s_{3c} = -0,833; s_{3d} = -0,417; s_{3e} = -0,208.$$

Położenie biegunów elementu oscylacyjnego i dołączonego elementu inercyjnego na płaszczyźnie zespolonej pierwiastków jest pokazane na rys. 4.43.



Rys. 4.43. Rozmieszczenie biegunów badanego układu

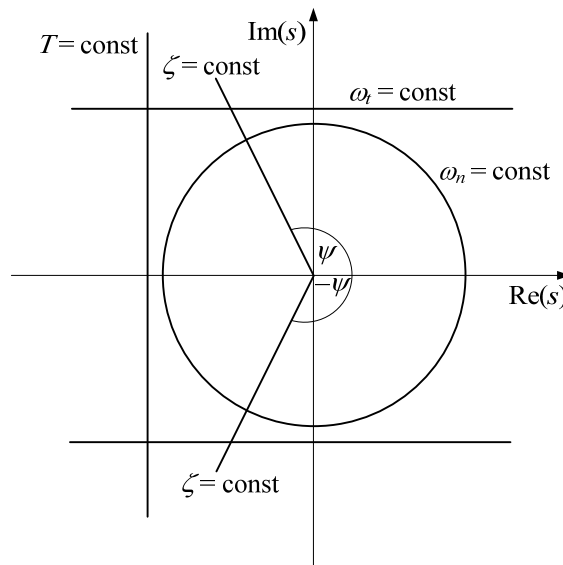
Odpowiedzi badanego układu na skok jednostkowy dla wymienionych wartości stałej czasowej elementu inercyjnego są pokazane na rys. 4.44. Widać, że dla krótkiej stałej czasowej odpowiadający jej biegun jest znacznie oddalony od początku układu współrzędnych, co nieznacznie modyfikuje dynamikę oryginalnego układu oscylacyjnego. W miarę wydłużania się tej stałej czasowej związany z nią biegun zbliża się do początku układu współrzędnych (rys. 4.43). Odległość bieguna $s_{3e} = -0,208$ od osi urojonej jest mniejsza od podobnej odległości biegunów elementu oscylacyjnego ($\text{Re}(s_{1,2}) = -0,3$) i to sprawia, że w odpowiedzi na skok jednostkowy dominują cechy układu inercyjnego.



Rys. 4.44. Odpowiedzi na skok jednostkowy układu oscylacyjnego z inercją dla różnych wartości stałych czasowych członu inercyjnego

Obserwacje poczynione w przykładzie 4.6 są zbieżne z wnioskami wynikającymi z analizy układu inercyjnego III rzędu (przykład 4.5): decydujący wpływ na właściwości układu o danej transmitancji mają te jej bieguny, które leżą blisko początku układu zespolonej płaszczyzny pierwiastków.

Właściwości typowych elementów dynamicznych można analizować śledząc linie pierwiastkowe mianownika transmitancji. Na przykład w odniesieniu do układu II rzędu, na zespolonej płaszczyźnie pierwiastków można wykreślić linie stałych wartości charakterystycznych parametrów transmitancji (rys. 4.45).



Rys. 4.45. Linie stałych wartości parametrów elementu II rzędu

Zaznaczone na rys. 4.45 linie odpowiadają położeniu biegunów układu II rzędu, które wyznaczają stałe wartości poszczególnych parametrów transmitancji:

- proste równoległe do osi urojonej są miejscami położenia biegunów, które zapewniają stałą wartość stałych czasowych: $\text{Re}(s) = -1/T = -\omega_n \zeta$;
- proste wychodzące z początku układu współrzędnych pod kątem ψ są miejscami położenia biegunów dających stałe tłumienie:

$$\text{tg } \psi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \rightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 \psi}};$$

- proste równoległe do osi rzeczywistej są miejscami położenia biegunów dających stałe wartości pulsacji drgań własnych: $\text{Im}(s) = \omega_t = \pm \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$;

- okręgi o środku w początku układu współrzędnych są miejscami położenia biegunów o stałej pulsacji drgań swobodnych: $|s|^2 = \left| -\omega_n \zeta \pm j \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \right|^2 = \omega_n^2$.

Zadania

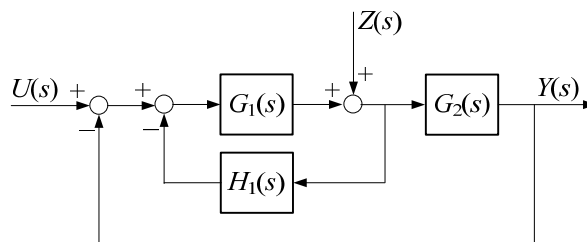
- 4.1. Dynamika obracającego się układu mechanicznego jest opisana następującym równaniem różniczkowym:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + d \frac{d\theta}{dt} + q\theta = M,$$

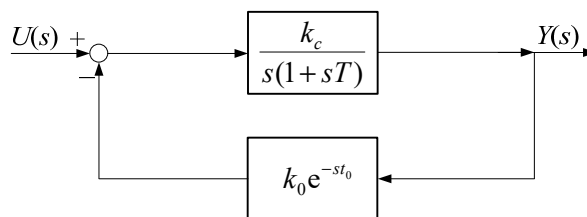
gdzie: J – moment bezwładności, d – współczynnik oporów wirowania, q – współczynnik sztywności, M – moment napędowy, θ – kąt położenia.

Określić, dla jakich wartości podanych parametrów układ ma charakter oscylacyjny oraz wyznaczyć współczynnik tłumienia i pulsację oscylacji tłumionych.

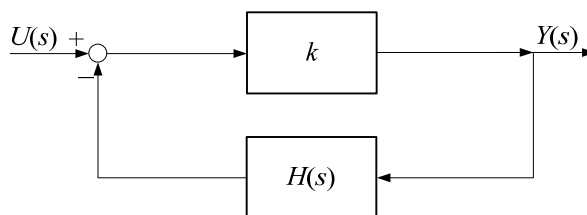
- 4.2. Określić transmitancję operatorową członu oscylacyjnego na podstawie znanych parametrów odpowiedzi układu na skok jednostkowy (rys. 4.21): $k = 1,2$; $A_1 = 0,80$; $A_3 = 0,22$; $T_m = 4s$.
- 4.3. Dla podanego układu obliczyć transformatę sygnału wyjściowego $Y(s)$, jako sumę oddziaływań wejścia $U(s)$ oraz zakłócenia $Z(s)$.



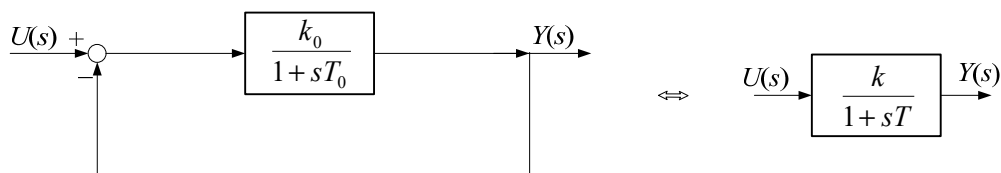
- 4.4. Narysować charakterystyki logarytmiczne amplitudy i fazy oraz charakterystykę amplitudowo-fazową podanego układu. Przyjąć następujące parametry: $k_c = 2$; $T = 2s$; $k_0 = 1,2$; $t_0 = 5s$.



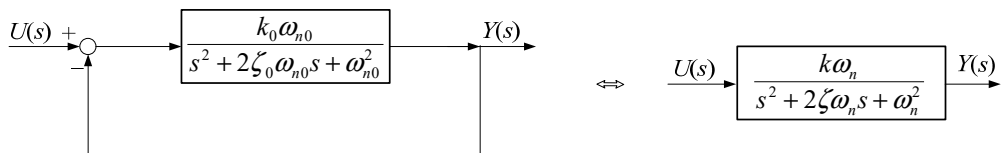
- 4.5. Sprawdzić, że w podanym układzie dla $k \gg 1$ zachodzi związek: $G(s) \approx 1/H(s)$, gdzie $G(s)$ jest transmitancją zastępczą układu ze sprzężeniem zwrotnym. Określić charakter $G(s)$ dla: a) $H(s) = k_k s$, b) $H(s) = k_k/s$.



- 4.6. Sprawdzić, że struktura transmitancji podanego układu inercyjnego w torze głównym jest taka sama jak transmitancja ekwiwalentnego układu po zamknięciu sprzężenia zwrotnego. Określić jak zmienia się współczynnik wzmocnienia k oraz stała czasowa T układu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym.



- 4.7. Powtórzyć obliczenia dla układu z przykładu 4.5 przy założeniu, że wprowadzone jest dodatnie sprzężenie zwrotne. Obliczyć odpowiedź układu na skok jednostkowy dla $k_0 = 0,8$; $k_0 = 1,0$ oraz $k_0 = 1,2$.
- 4.8. Sprawdzić, że struktura transmitancji podanego układu oscylacyjnego w torze głównym jest taka sama jak transmitancja ekwiwalentnego układu po zamknięciu sprzężenia zwrotnego. Określić jak zmienia się współczynnik wzmocnienia k , pulsacja ω_n oraz współczynnik tłumienia ζ układu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym.



- 4.9. Transmitancja układu II rzędu ma następującą postać:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \text{ gdzie: } k = 1; \omega_n = 1,5\text{s}^{-1}.$$

Określić przedział zmian współczynnika tłumienia ζ , dla którego przeregulowanie odpowiedzi układu na skok jednostkowy mieści się w granicach: $4\% < y_{p\%} < 25\%$. Narysować odpowiednie obszary związane z podanym zakresem zmian współczynnika ζ na płaszczyźnie pierwiastków jako funkcję kąta ψ (rys. 4.45).

5. STABILNOŚĆ LINIOWYCH SYSTEMÓW CIĄGLYCH

5.1. Wprowadzenie

Stabilność jest bardzo ważną cechą systemów dynamicznych, którą łączy się z ograniczonym co do amplitudy przebiegiem odpowiedzi układu przy dowolnym ograniczonym wymuszeniu lub zakłóceniu, a także po ustaniu działania tego wymuszenia. W praktyce rozważa się zachowanie systemu w przypadku zewnętrznego wymuszenia impulsowego lub jako rezultat innego ograniczonego wymuszenia. Wynikają stąd dwie definicje stabilności rozważanych systemów:

- 1 – System jest stabilny, gdy jego odpowiedź impulsowa z czasem zanika do zera.
- 2 – System jest stabilny, gdy przy ograniczonym wymuszeniu, jego odpowiedź jest także ograniczona¹⁷ (ang. *BIBO – bounded input, bounded output stability*). Nie jest zatem wymagane tłumienie tej odpowiedzi do zera.

Dowodzi się [20], że system jest stabilny według drugiej z podanych definicji (*BI-BO*), jeśli w odniesieniu do odpowiedzi impulsowej układu (funkcji wagi) o transmitancji $G(s)$: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ spełniony jest warunek:

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty, \quad (5.1)$$

co oznacza, że odpowiedź impulsowa jest absolutnie całkowalna.

W praktyce do oceny stabilności rozważanych tu układów korzysta się z ich transmitancji, które są bezpośrednio powiązane z opisującymi je równaniami różniczkowymi. Na podstawie analizy prowadzonej w rozdz. 2 wiemy, że ciągły, przyczynowy, liniowy system inwariantny względem czasu, można uważać za stabilny, jeśli składowa swobodna jego odpowiedzi zanika z czasem do zera – co odpowiada pierwszej z przytoczonych definicji. Pełna informacja na ten temat jest zawarta w jednorodnym równaniu różniczkowym opisującym system.

Transmitancja systemu opisanego równaniem różniczkowym (2.18) przyjmuje następującą formę:

¹⁷ Ograniczoność jest tu rozumiana jako właściwość, przy której wartość bezwzględna sygnału nie przekracza skończonej wartości.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{L(s)}{M(s)}, \quad n \geq m \quad (5.2)$$

Transformata odpowiedzi systemu o transmitancji (5.2) na wymuszenie impulsowe jest równa:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}G(s) = G(s) \quad (5.3)$$

Ogólna postać odpowiedzi czasowej $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, uwzględniająca wszystkie możliwe przypadki, jest dosyć złożona, więc ograniczymy się do podstawowych sytuacji, opisując także przypadki szczególne. Po obliczeniu zer licznika: $L(s) = 0$ oraz mianownika: $M(s) = 0$ (biegunów), otrzymamy postać iloczynową transmitancji (5.2):

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - b_1)(s - b_2) \dots (s - b_n)} = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (5.4)$$

W celu określenia transformaty odwrotnej z (5.4) wygodnie jest pogrupować czynniki mianownika w taki sposób, aby wydzielić bieguny zerowe, bieguny rzeczywiste oraz bieguny zespolone, które występują w postaci wzajemnie sprzężonych par. Otrzymamy wówczas następującą postać transmitancji:

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{k \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s^{n_z} \prod_{j=1}^{n_1} (s - \sigma_j) \prod_{k=1}^{n_2} (s^2 - 2\alpha_k s + (\alpha_k^2 + \omega_{tk}^2))}, \quad (5.5)$$

gdzie: m – stopień wielomianu licznika, n_z – krotność zerowych pierwiastków mianownika, n_1 – liczba rzeczywistych pierwiastków mianownika, n_2 – liczba par zespolonych pierwiastków mianownika; wśród niezerowych pierwiastków mianownika dopuszcza się także pierwiastki wielokrotne.

Zauważmy, że parametry czynników odpowiadających biegunom zespolonym w (5.5) łączą się z zapisem stosowanym w (4.62) w następujący sposób: $\alpha_k = -\zeta_k \omega_{nk}$, $\omega_{tk} = \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}$ (indeksy t oraz n wskazują, odpowiednio, na pulsację tłumioną lub nietłumioną).

Postać czasowa analizowanej odpowiedzi impulsowej może być określona w wyniku obliczenia transformaty odwrotnej z funkcji (5.5). Odpowiedź czasowa może być zatem zapisana w postaci sumy składników reprezentowanych przez funkcje względem czasu, których transformaty Laplace'a dają w sumie zależność (5.5). Jeśli którykolwiek z tych składników nie spełnia warunku stabilności, to cały układ jest niestabilny. Należy rozpatrzyć następujące przypadki:

1. Jeśli $n_z = 0$ (brak biegunów zerowych) oraz wszystkie pozostałe bieguny transformaty (5.5) są jednokrotne, to otrzymamy:

$$y(t) = g(t) = \sum_{j=1}^{n_1} A_j e^{\sigma_j t} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{B_k}{\omega_{tk}} e^{\alpha_k t} \sin \omega_{tk} t \quad (5.6)$$

Widać stąd, że funkcja $g(t)$ będzie z czasem dążyć do zera, jeśli wszystkie bieguny rzeczywiste są ujemne ($\sigma_j < 0$) oraz wszystkie części rzeczywiste biegunów zespolonych są także ujemne ($\alpha_k < 0$)¹⁸. Wówczas wszystkie bieguny transmitancji leżą w ujemnej części płaszczyzny pierwiastków – rys. 5.1. Są to są warunki *stabilności asymptotycznej* systemu. Sytuacja ta odpowiada biegunom A_1 i B_1 na rys. 5.1. W takim przypadku spełniony jest także warunek (5.1).

2. Gdy dla przypadku jak w p. 1 wystąpią także bieguny wielokrotne (rzeczywiste lub zespolone), to odpowiadające im składniki w funkcji względem czasu (5.6) będą mnożone przez czynniki o postaci: $t^l p_{jl}$, przy czym najwyższa potęga l odpowiada krotności bieguna pomniejszonej o jeden, p_{jl} – stała wartość. Łatwo sprawdzić, że nie zmieni to jednak ogólnych warunków zanikania odpowiedzi (5.6) do zera wraz z upływem czasu, a więc system będzie także stabilny asymptotycznie. Na przykład (Tabela 3.4):

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)^2} \right\} = t e^{at} \quad (\text{odpowiedź czasowa zanika do zera dla } a < 0).$$

3. Jeśli dla warunków jak w p. 1 występuje pojedynczy biegun zerowy ($n_z = 1$), to dodatkowo w odpowiedzi (5.6) wystąpi stały składnik A_{j0} (tak będzie, jeśli $\sigma_j = 0$ w odniesieniu do j -tego bieguna rzeczywistego). Tym samym odpowiedź impulsowa (5.6) z czasem utrzymuje się na tej właśnie wartości (pozostaje więc ograniczona), ale stabilność nie jest asymptotyczna. Przypadek ten odpowiada na rys. 5.1 pojedynczemu biegunowi C . Zauważmy, że nie jest jednak spełniona podana powyżej definicja stabilności *BIBO*, co potwierdza następujący przykład.

Dla układu o transmitancji z jednym biegunem zerowym:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+a)}, \text{ otrzymujemy odpowiedź impulsową: } g(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}), \text{ która z}$$

czasem zmierza do wartości $1/a$. Badając odpowiedź tego układu na ograniczone wymuszenie w postaci skoku jednostkowego: $u(t) = 1(t)$ ($U(s) = 1/s$), otrzymamy:

$$U(s) = \frac{1}{s^2(s+a)}, \text{ skąd: } y(t) = \frac{1}{a^2} (e^{-at} + at - 1),$$

co przedstawia nieograniczony sygnał.

4. Jeśli dla przypadku jak w p. 3 występuje zerowy biegun wielokrotny ($n_z > 1$), to w odpowiedzi (5.6) wystąpią składniki o postaci: $t^l A_{jl}$, przy czym najwyższa potęga

¹⁸ Należy zauważyć, że znak wykładnika w wyrażeniu określającym postać czasową odpowiedzi, zależy od znaku bieguna w zapisie transmitancji, na przykład, dla: $\mathcal{L}^{-1}\{k/(s+\sigma)\} = k e^{-\sigma t}$, biegun ma wartość: $s = -\sigma$ i odpowiedź czasowa zanika do zera dla $-\sigma < 0$.

zmiennej reprezentującej czas wynosi (n_z-1) . Składniki te (a z nimi cała odpowiedź układu) zmierzają z czasem do nieskończoności – system jest zatem niestabilny. Na rys. 5.1 odpowiada to podwójnemu biegunowi C . Na przykład (patrz p. 3):

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+a)}\right\} = \frac{1}{a^2}(e^{-at} + at - 1) \quad (\text{moduł odpowiedzi impulsowej}$$

zmierza do nieskończoności niezależnie od wartości a).

5. Gdy dla przypadku jak w p. 1 jedna z par sprzężonych biegunów zespolonych ma zerową część rzeczywistą ($a_k = 0$ dla dowolnego k), to w wyrażeniu (5.6) odpowiadający jej składnik prawej strony ma cechę nietłumionych oscylacji. Taka sytuacja jest ilustrowana na rys. 5.1 dla przypadku pojedynczej pary sprzężonych biegunów urojonych D, D^* . Sygnał wyjściowy nie narasta do nieskończoności, ale też nie jest tłumiony do zera, zatem odpowiada mu stan stabilny lecz nieasymptotyczny. Z punktu widzenia podanych definicji stabilności (*BIBO*) jest to jednak układ niestabilny, gdyż można znaleźć takie ograniczone wymuszenie, przy którym uzyskuje się nieograniczoną odpowiedź. Na przykład jeśli na wejście układu o transmitancji:

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (g(t) = \sin at) \quad \text{zostanie podany ograniczony sygnał: } u(t) = \cos at$$

$$\left(U(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}\right), \text{ to na wyjściu otrzymamy: } Y(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \frac{s}{s^2 + a^2} = \frac{as}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\left(y(t) = \frac{t}{2} \sin at\right), \text{ co w dziedzinie czasu przedstawia sygnał sinusoidalny o rosnącej}$$

nieskończoność amplitudzie.

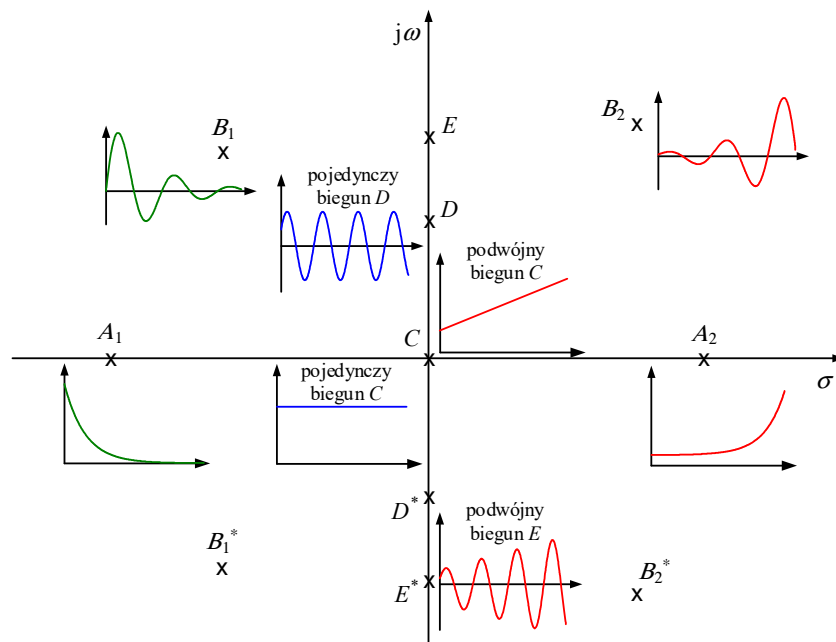
6. Gdy w sytuacji jak w p. 5 rozpatrywany biegun zespolony z zerową częścią rzeczywistą jest wielokrotny, to składnik z funkcją sinusoidalną z prawej strony (5.6) będzie mnożony przez wyrażenie zawierające czynnik o postaci: $t^l B_{kl}/\omega_k$, (porównaj z p. 4), co daje przebieg sinusoidalny o narastającej amplitudzie. Prowadzi to do niestabilnego systemu – wielokrotna para biegunów E na rys. 5.1. Na przykład:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at) = g(t), \quad a \neq 0 \quad (\text{odpowiedź impulsowa przy-}$$

biera postać oscylacji o narastającej amplitudzie.

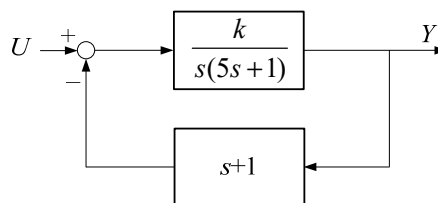
Analizę tę można sprowadzić do następującego wniosku: liniowy system o transmitancji (5.2) jest stabilny asymptotycznie, jeśli wszystkie pierwiastki mianownika transmitancji są ujemne (w przypadku biegunów rzeczywistych) lub mają ujemne części rzeczywiste (w przypadku biegunów zespolonych). Spełnione są wówczas także warunki stabilności *BIBO*. System jest stabilny, lecz nieasymptotycznie (znajduje się na granicy stabilności) (ang. *marginally stable*), jeśli którykolwiek pojedynczy biegun rzeczywisty jest równy zero lub pojedyncza para biegunów zespolonych sprzężonych ma zerową część rzeczywistą, a wszystkie pozostałe bieguny leżą w lewej części zespolonej płaszczyzny.

czyzny biegunów. W innych przypadkach system jest niestabilny. W rozważanych tu przypadkach, układ cechujący się stabilnością nieasymptotyczną, jest w istocie układem niestabilnym. Zauważmy, że jeśli jakikolwiek biegun transmitancji układu leży na osi urojonej (punkty C , D lub E na rys. 5.1), to nie jest spełniony warunek (5.1).



Rys. 5.1. Ilustracja charakteru odpowiedzi impulsowej systemu w zależności od położenia biegunów transmitancji

Przykład 5.1. W podanym układzie określić wartość współczynnika k , dla którego układ jest stabilny.



Transmitancja tego układu jest równa:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k}{s(5s+1)}}{1 + \frac{k(s+1)}{s(5s+1)}} = \frac{ks(5s+1)}{5s^2 + s(k+1) + k}$$

Obliczamy pierwiastki mianownika rozwiązując równanie:

$$M(s) = 5s^2 + s(k+1) + k = 0$$

$$\Delta = (k+1)^2 - 20k = (k-9)^2 - 80$$

$$\text{Stąd: } \sqrt{\Delta} = \begin{cases} \sqrt{(k-9)^2 - 80} & \text{dla } k \geq 9 + \sqrt{80} \\ j\sqrt{80 - (k-9)^2} & \text{dla } k < 9 + \sqrt{80} \end{cases}$$

$$s_{1,2} = \frac{-(k+1) \pm j\sqrt{80 - (k-9)^2}}{10} \quad \text{dla } k < 9 + \sqrt{80}$$

$$\frac{-(k+1) \pm \sqrt{(k-9)^2 - 80}}{10} \quad \text{dla } k \geq 9 + \sqrt{80}$$

Można sprawdzić, że warunek dla pierwiastków rzeczywistych jest zawsze spełniony, gdyż:

$$k+1 > \sqrt{(k-9)^2 - 80} \quad \text{dla } k \geq 9 + \sqrt{80}$$

W przypadku zespolonej pary pierwiastków muszą być spełnione warunki:

$$\frac{-(k+1)}{10} < 0 \quad \text{oraz} \quad k < 9 + \sqrt{80},$$

skąd otrzymujemy:

$$-1 < k < 9 + \sqrt{80}$$

Współczynnik k reprezentuje wzmocnienie, więc naturalnym ograniczeniem jest warunek: $k > 0$. Biorąc pod uwagę oba przypadki: gdy bieguny są rzeczywiste lub zespolone, widać, że układ jest stabilny dla wszystkich praktycznych wartości wzmocnienia.

Obliczanie biegunów transmitancji bywa jednak w praktyce operacją nadmiernie złożoną, jak na potrzeby określenia stabilności systemu. Doprowadziło to do rozwoju różnych uproszczonych metod oceny stabilności systemów, bez konieczności znajdowania miejsc zerowych mianownika jego transmitancji. Metody te nazywane są kryteriami stabilności. Kryteria te dostarczają niekiedy także dodatkowych informacji o właściwościach analizowanych systemów oraz sposobach poprawy ich stabilności.

Kryteria stabilności można podzielić na następujące grupy:

- kryteria algebraiczne, w których analizowane są wielomiany mianownika transmitancji (funkcji charakterystycznej);
- kryteria częstotliwościowe, w których badany jest mianownik transmitancji widmowej systemu;
- kryteria odnoszące się do transmitancji układu otwartego ze sprzężeniem zwrotnym ujemnym, które pozwalają ocenić stabilność układu zamkniętego;
- kryteria badania stabilności całego ekwiwalentnego układu.

W dalszej części tego rozdziału analizowane są podstawowe kryteria badania stabilności inwariantnych liniowych systemów przyczynowych.

5.2. Kryterium Routha-Hurwitza

Kryterium Routha-Hurwitza należy do grupy kryteriów algebraicznych, które stosowane są w odniesieniu do ekwiwalentnych zamkniętych układów regulacji, których transmitancja ma postać (5.2). Kryterium to dostarcza informacji, czy pierwiastki wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, który tworzy mianownik transmitancji (5.2), mają ujemne części rzeczywiste i ewentualnie ile pierwiastków nie spełnia tego założenia. W ogólnym przypadku wielomian ten można zapisać w następującej formie:

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (5.7)$$

Wszystkie pierwiastki wielomianu (5.7) mają ujemne części rzeczywiste, jeśli następujące trzy kroki procedury Routha-Hurwitza są spełnione:

1. Wszystkie współczynniki a_i wielomianu są różne od zera.
2. Wszystkie współczynniki a_i są tego samego znaku.
3. W utworzonej tablicy Routha wszystkie współczynniki pierwszej kolumny mają ten sam znak. Każda zmiana znaku wskazuje na obecność jednego pierwiastka wielomianu w prawej części zespolonej płaszczyzny pierwiastków (część rzeczywista tego pierwiastka jest dodatnia, więc układ jest niestabilny). Przejście do tego kroku jest uwarunkowane spełnieniem warunków pierwszych dwóch kroków.

Tablica Routha jest utworzona z $n+1$ wierszy o następującej strukturze:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	...
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_0				

przy czym, współczynniki w kolejnych wierszach tablicy, zaczynając od trzeciego, obliczane są następująco:

$$b_1 = \frac{1}{-a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{1}{-a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}},$$

$$b_3 = \frac{1}{-a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}, \dots,$$

$$c_1 = \frac{1}{-b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{1}{-b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1},$$

$$c_3 = \frac{1}{-b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1}, \dots, \quad g_0 = \frac{1}{-f_1} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{f_1 e_2}{f_1} = e_2.$$

Przykład 5.2. Posługując się kryterium Routha-Hurwitza zbadać stabilność układu z przykładu 5.1. Określić zakres zmian współczynnika k dla którego układ jest stabilny.

Wielomian charakterystyczny układu rozważanego w przykładzie 5.1 jest następujący:

$$M(s) = 5s^2 + s(k+1) + k = 0$$

Pierwsze dwa warunki kryterium Routha-Hurwitza są spełnione, gdy spełnione są następujące relacje:

$k+1 > 0$ oraz $k > 0$, co wymaga spełnienia warunku: $k > 0$.

Tablica Routha jest następująca:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 5 & k \\ s & k+1 & 0 \\ 1 & b_1 & \end{array}, \text{ gdzie: } b_1 = \frac{-k(k+1)}{-(k+1)} = k$$

Widać zatem, że jeśli jest spełniony warunek: $k > 0$, to również wszystkie wyrazy pierwszej kolumny tej tablicy są dodatnie, co zapewnia stabilność układu.

Przypadek szczególny 1: w pierwszej kolumnie, w wierszu o numerze większym niż dwa występuje współczynnik o zerowej wartości. Wówczas zakładamy, że wielkość ta wynosi ε o dowolnie małej wartości. W dalszej analizie należy określić liczbę zmian znaku współczynników pierwszej kolumny z pominięciem tego elementu o zerowej wartości. Jeśli w wierszach powyżej i poniżej zerowego elementu znaki współczynników są takie same, to występuje para pierwiastków urojonych (z zerową częścią rzeczywistą). Liczba zmian znaku współczynników w pierwszej kolumnie, z pominięciem wiersza z zerowym elementem, świadczy o liczbie pierwiastków leżących po prawej stronie płaszczyzny zespolonej pierwiastków transmitancji.

Przykład 5.3. Stosując kryterium Routha-Hurwitza określić stabilność układu, którego wielomian charakterystyczny ma następującą postać:

$$M(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + 2$$

Budujemy tablicę Routha:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 1 & 2 \\
s^3 & 1 & 1 & 0 \\
s^2 & b_1 & b_2 & 0, \text{ gdzie: } b_1 = \varepsilon \rightarrow 0, b_2 = 2, c_1 = \frac{\varepsilon - 2}{\varepsilon} \rightarrow -\infty, d_1 = 2. \\
s & c_1 & & \\
1 & d_1 & &
\end{array}$$

Widać, że występują dwie zmiany znaku w pierwszej kolumnie, co świadczy o tym, że wielomian charakterystyczny ma dwa pierwiastki leżące w prawej części płaszczyzny pierwiastków. Układ jest zatem niestabilny.

Przykład 5.4. Określić stabilność układu na podstawie kryterium Routha-Hurwitza, którego wielomian charakterystyczny ma następującą postać:

$$M(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2$$

Budujemy tablicę Routha:

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & 2 & 2 \\
s^1 & b_1 & \\
s^0 & c_1 &
\end{array}, \text{ gdzie: } b_1 = \varepsilon \rightarrow 0, b_2 = 2, c_1 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon} = 2.$$

Współczynniki w pierwszej kolumnie nie zmieniają znaku (z pominięciem wiersza o współczynniku zerowym). Równanie charakterystyczne ma parę pierwiastków urojonych (które leżą na osi urojonej). Układ jest na granicy stabilności (stabilność nieasymptotyczna).

Przypadek szczególny 2: w tablicy Routha występuje wiersz o zerowych współczynnikach. Przypadek ten wskazuje na to, że wśród pierwiastków wielomianu charakterystycznego $M(s)$ występuje para pierwiastków o tej samej wartości urojonej lecz o przeciwnych znakach części rzeczywistej.

Zerowy wiersz w tablicy Routha należy wówczas zastąpić przez wiersz utworzony ze współczynników wielomianu: $dP(s)/ds$, gdzie $P(s)$ jest wielomianem pomocniczym, który powstał ze współczynników leżących w wierszu powyżej danego wiersza zerowego. W tym wielomianie różne od zera współczynniki występują tylko przy parzystych potęgach zmiennej s . Wielomian $P(s)$ jest jednym z czynników, na które rozkłada się wielomian charakterystyczny: $M(s) = P(s) Q(s)$. Oznacza to, że pierwiastki $P(s)$ są również pierwiastkami wielomianu $M(s)$.

Przykład 5.5. Stosując kryterium Routha-Hurwitza określić stabilność układu, którego wielomian charakterystyczny ma następującą postać:

$$M(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$$

Układ jest z pewnością niestabilny, gdyż współczynniki wielomianu charakterystycznego mają różne znaki. Zbudujemy jednak tablicę Routha:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^5 & 1 & 24 & -25 \\
 s^4 & 2 & 48 & -50 \\
 s^3 & b_1 & b_2 & 0 \\
 s^2 & c_1 & c_2 & \\
 s & d_1 & & \\
 1 & e_0 & &
 \end{array}
 , \text{ gdzie: } b_1 = \frac{48-48}{2} = 0, \quad b_2 = \frac{-50+50}{2} = 0$$

Wiersz odpowiadający s^3 jest zerowy, więc określamy wielomian pomocniczy $P(s)$:

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50.$$

$$\text{oraz: } dP(s)/ds = 8s^3 + 96s.$$

Stąd współczynniki zerowego wiersza należy zastąpić współczynnikami powyższego wielomianu:

$$b_1 = 8, \quad b_2 = 96.$$

Kolejne współczynniki przyjmują następujące wartości:

$$c_1 = \frac{8 \cdot 48 - 2 \cdot 96}{8} = 24, \quad c_2 = \frac{-8 \cdot 50}{8} = -50,$$

$$d_1 = \frac{24 \cdot 96 + 8 \cdot 50}{24} = 112,67, \quad e_0 = -50.$$

Pierwiastki wielomianu pomocniczego są jednocześnie pierwiastkami $M(s)$, zatem z równania:

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0 \text{ otrzymujemy: } s_{1,2} = \pm 1, \quad s_{3,4} = \pm j5.$$

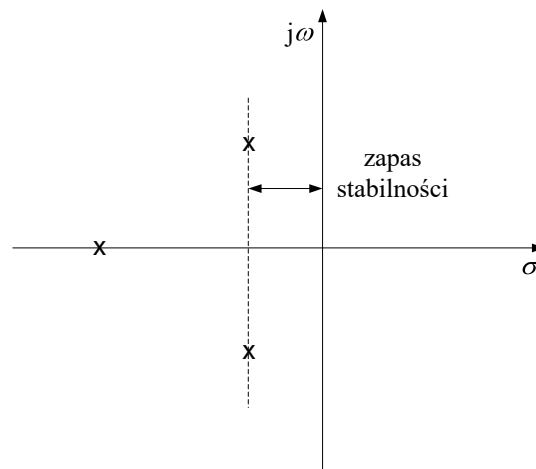
Wykonując dzielenie wielomianów: $M(s)/P(s) = s + 2$, co jest piątym czynnikiem rozkładu $M(s)$:

$$M(s) = (s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)(s+2).$$

Mamy zatem pełne uzasadnienie niestabilności systemu: $s_1 = 1$, co jest sygnalizowane jedną zmianą znaku w pierwszej kolumnie tablicy Routha. Ponadto, pierwiastki $s_{3,4}$ leżą na osi urojonej.

Właściwości kryterium Routha-Hurwitza

- W wielu praktycznych przypadkach daje szybką ocenę stabilności układu.
- Transmitancja musi być wyrażona w postaci analitycznej funkcji wymiernej (w formie ilorazu funkcji).
- Wymaga się, aby mianownik transmitancji miał postać wielomianu, co ogranicza jego zastosowanie. Na przykład nie można go stosować do przypadków, gdy w mianowniku pojawi się składnik odpowiadający zwłóce czasowej: $M(s) = s^2 + s + 10e^{-st_0}$.
- Kryterium bezpośrednio nie informuje o zapasie stabilności, który można zdefiniować jako odległość biegunów od osi urojonej.
Ta ostatnia niedogodność może być częściowo ominięta, jeśli zastosować procedurę, która jest ilustrowana na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Określenie zapasu stabilności na płaszczyźnie biegunów transmitancji

Zapas stabilności określony przez odległość najbardziej znaczącego bieguna transmitancji od osi urojonej można zmierzyć przez przesuwanie wszystkich pierwiastków wielomianu charakterystycznego w kierunku dodatnich wartości części rzeczywistych: $s_k^{(i)} = s_k^{(i-1)} + \Delta\sigma$, aż układ stanie się niestabilny. Procedurę można podzielić na szereg kroków z małym przesunięciem w każdym z nich. Suma przesunięć w kolejnych krokach daje poszukiwany zapas stabilności.

Przykład 5.6. Określić zapas stabilności układu, którego wielomian charakterystyczny ma następującą postać:

$$M(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 36.$$

Tablica Routha:

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 36 \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & c_1 & \end{array}, \text{ gdzie: } b_1 = \frac{6 \cdot 11 - 1 \cdot 36}{6} = 5, \quad c_1 = \frac{5 \cdot 36}{5} = 36.$$

Układ jest zatem stabilny.

$$s_s = s + \Delta\sigma, \text{ czyli: } s = s_s - \Delta\sigma$$

Po podstawieniu do wielomianu $M(s)$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} & (s_s - \Delta\sigma)^3 + 6(s_s - \Delta\sigma)^2 + 11(s_s - \Delta\sigma) + 36 \\ &= s_s^3 - 3s_s^2\Delta\sigma + 3s_s\Delta^2\sigma - \Delta^3\sigma + 6s_s^2 - 12s_s\Delta\sigma + 6\Delta^2\sigma + 11s_s - 11\Delta\sigma + 36 \\ &= s_s^3 + s_s^2(6 - 3\Delta\sigma) + s_s(3\Delta^2\sigma - 12\Delta\sigma + 11) + 36 - 11\Delta\sigma + 6\Delta^2\sigma - \Delta^3\sigma \end{aligned}$$

Tablica Routha:

$$\begin{array}{l|l} s^3 & 1 \quad 3\Delta^2\sigma - 12\Delta\sigma + 11 \\ s^2 & 6 - 3\Delta\sigma \quad 36 - 11\Delta\sigma + 6\Delta^2\sigma - \Delta^3\sigma \\ s^1 & b_1 \\ s^0 & c_1 \end{array}$$

$$\text{gdzie: } b_1 = \frac{(6 - 3\Delta\sigma)(3\Delta^2\sigma - 12\Delta\sigma + 11) - (36 - 11\Delta\sigma + 6\Delta^2\sigma - \Delta^3\sigma)}{6 - 3\Delta\sigma},$$

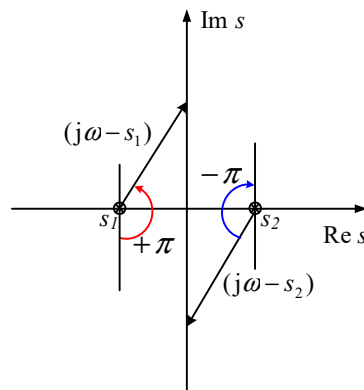
$$c_1 = 36 - 11\Delta\sigma + 6\Delta^2\sigma - \Delta^3\sigma.$$

5.3. Kryterium Michajłowa

Założmy, że transmitancja zamkniętego układu n -tego rzędu jest określona w postaci:

$$G(s) = \frac{b_m(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - b_1)(s - b_2) \dots (s - b_n)} = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (5.8)$$

Rozpatrzmy postać widmową funkcji charakterystycznej $M(j\omega)$. Biegun s_k występuje w czynniku: $(s - s_k)_{s=j\omega} = (j\omega - s_k)$. Jeśli s_k leży na lewo od osi urojonej, to przyrost argumentu $(j\omega - s_k)$ przy zmianie pulsacji ω od $-\infty$ do $+\infty$ wynosi π . Jeśli natomiast s_k leży w prawej półpłaszczyźnie, to przyrost argumentu $(j\omega - s_k)$ przy zmianie ω od $-\infty$ do $+\infty$ wynosi $-\pi$. Zasada ta jest ilustrowana na rys. 5.3 dla dwóch biegunów położonych w ujemnej (s_1) oraz dodatniej (s_2) części płaszczyzny pierwiastków transmitancji¹⁹.



Rys. 5.3. Zmiana kąta czynnika $(j\omega - s_k)$

¹⁹ А.В. Михайлов, *Гармонический анализ в теории регулирования*. Автоматика и Телемеханика, No. 3, 1938, с. 27-31.

W takim razie łączna zmiana kąta (argumentu funkcji $M(j\omega)$) wszystkich czynników mianownika przy zmianie pulsacji ω w zakresie $<-\infty, +\infty>$ wyniesie:

$$\begin{aligned}\Delta Arg(M(j\omega)) &= \Delta Arg[(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \Delta Arg[(j\omega - s_1)] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \dots + \Delta Arg[(j\omega - s_n)] \Big|_{-\infty}^{\infty}\end{aligned}\quad (5.9)$$

Aby układ był stabilny, wszystkie bieguny powinny się znajdować w lewej półpłaszczyźnie, a więc przyrost argumentu winien wynosić $(+n \cdot \pi)$, n – rząd transmitancji. A zatem warunek stabilności można sformułować następująco.

Układ jest stabilny asymptotycznie, jeśli przyrost argumentu widmowej funkcji charakterystycznej $M(j\omega)$ rzędu n przy zmianie ω od $-\infty$ do $+\infty$ wynosi $(n \cdot \pi)$:

$$\Delta Arg M(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = n \cdot \pi \quad (5.10)$$

Ponieważ funkcja $M(j\omega)$ jest symetryczna względem osi rzeczywistej, więc analizę można prowadzić tylko dla dodatnich wartości pulsacji, dla których kąt zmienia się o połowę:

$$\Delta Arg M(j\omega) \Big|_0^{+\infty} = n \cdot \frac{\pi}{2} \quad (5.11)$$

Wynika stąd następująca postać tego kryterium: wszystkie bieguny transmitancji (5.4) mają ujemną część rzeczywistą, jeśli charakterystyka częstotliwościowa funkcji $M(j\omega)$, $0 < \omega < \infty$, przechodzi dokładnie przez n ćwiartek w kierunku dodatnim.

Jednocześnie, jeśli g pierwiastków leży w prawej półpłaszczyźnie, to zachodzi następująca zależność:

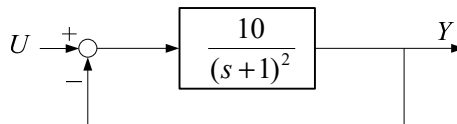
$$\Delta Arg M(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = (n - 2g)\pi \quad (5.12)$$

Jeśli nie ma pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie, a p pierwiastków leży na osi liczb urojonych, to prawdziwy jest związek:

$$\Delta Arg M(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = (n - p)\pi \quad (5.13)$$

Również w ostatnich dwóch zależnościach przyrost kąta zmniejsza się o połowę, jeśli obszar zmian pulsacji ograniczyć tylko do dodatnich wartości. Możliwość stosowania tego kryterium jest ograniczona do przypadku, gdy $M(j\omega) \neq 0$ (wówczas argument tej funkcji nie może być określony). Jeśli jednak zachodzi przypadek, że $M(j\omega) = 0$, to transmitancja ma biegun leżący na osi urojonej i układ nie jest stabilny asymptotycznie.

Przykład 5.7. Posługując się kryterium Michajłowa zbadać stabilność podanego układu.



Transmitancja wypadkowa układu zamkniętego ma następującą formę:

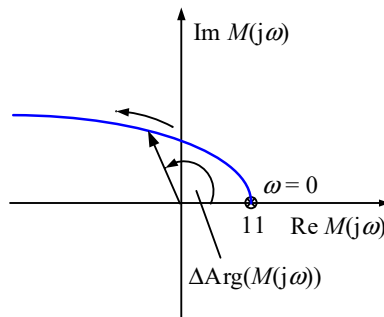
$$G(s) = \frac{10}{1 + \frac{10}{(s+1)^2}} = \frac{10}{s^2 + 2s + 11} = \frac{L(s)}{M(s)}$$

Funkcja charakterystyczna:

$$M(s) = s^2 + 2s + 11$$

oraz jej postać widmowa:

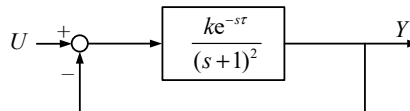
$$M(j\omega) = (j\omega)^2 + 2j\omega + 11 = (11 - \omega^2) + j2\omega = \operatorname{Re}(M(j\omega)) + j\operatorname{Im}(M(j\omega))$$



Rys. 5.4. Przyrost kąta funkcji $M(j\omega)$

Na podstawie rys. 5.4 widać, że przy zmianie pulsacji ω w zakresie $(0, \infty)$, argument funkcji charakterystycznej zmienia się o $\pi = 2(\pi/2)$, przy czym $n = 2$. Kryterium Michajłowa jest spełnione, zatem układ jest stabilny.

Przykład 5.8. Z badać stabilność podanego układu za pomocą kryterium Michajłowa.



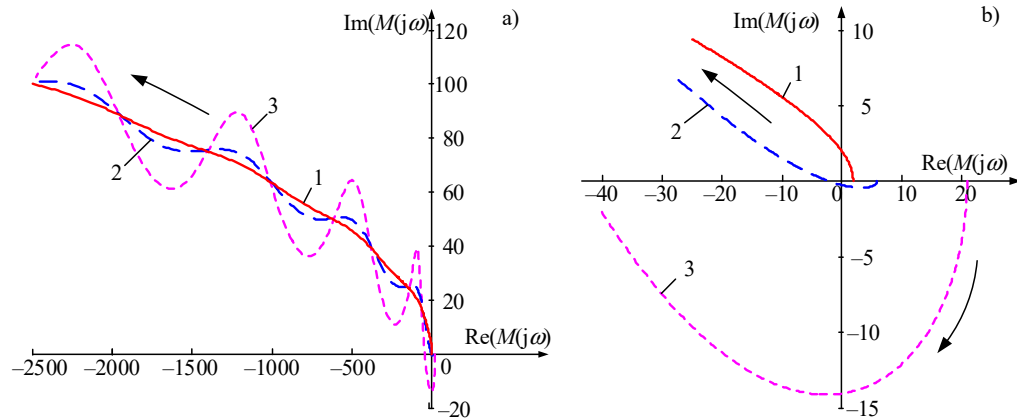
Obliczamy transmitancję układu zamkniętego:

$$G(s) = \frac{ke^{-s\tau}}{s^2 + 2s + 1 + ke^{-s\tau}}$$

oraz widmową funkcję charakterystyczną:

$$M(j\omega) = (1 - \omega^2) + j2\omega + ke^{-j\omega\tau} = (1 - \omega^2 + k \cos \omega\tau) + j(2\omega - k \sin \omega\tau)$$

Do graficznej analizy przyjęto następujące parametry: $\tau = 0,5s$, $k = k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $k_3 = 20$. Przebiegi funkcji na płaszczyźnie zespolonej dla poszczególnych wartości wzmocnienia k są pokazane na rys. 5.5. Rys. 5.5b pokazuje przebiegi tych funkcji dla początkowych wartości pulsacji ω .



Rys. 5.5. Przebiegi rozpatrywanej funkcji charakterystycznej dla różnych wartości parametru k :
 $1 - k = 1$, $2 - k = 5$, $3 - k = 20$; strzałki ukazują kierunek narastania pulsacji ω

Widać, że w miarę wzrostu pulsacji argument funkcji będzie dążył do wartości π , jednak o całkowitej zmianie argumentu decyduje w tym przypadku zachowanie się funkcji $M(j\omega)$ dla małych wartości pulsacji (rys. 5.5b). Stabilny jest tylko układ oznaczony krzywą 1, gdyż w pozostałych dwóch przypadkach (dla większych wartości parametru k) argument zmienia kierunek na ujemny (wirowanie zgodne ze wskazówkami zegara) i łączna zmiana tego argumentu wynosi $-\pi$.

Na podstawie powyższej analizy widać, że w tych przypadkach, gdy wyznaczenie wykresu funkcji $M(j\omega)$ na płaszczyźnie zespolonej jest proste, kryterium Michajłowa jest łatwym narzędziem oceny stabilności systemu.

5.4. Kryterium Nyquista

A.W. Michajłow opracował prezentowaną powyżej częstotliwościową metodę oceny stabilności układów ciągłych na podstawie wcześniejszej o kilka lat pracy H. Nyquista²⁰, który sformułował zasady częstotliwościowej analizy systemów regulacji i oceny ich stabilności znane jako kryterium Nyquista. Metoda ta odnosi się do grupy kryteriów częstotliwościowych, za pomocą której wnioskuje się o stabilności układu zamkniętego na podstawie analizy układu otwartego.

Kryterium Nyquista jest bezpośrednio związane z twierdzeniem Cauchy'ego, znanym jako *zasada argumentu*, które odnosi się do zespolonych funkcji analitycznych [39]. Stosowany tu wniosek z tego twierdzenia jest następujący.

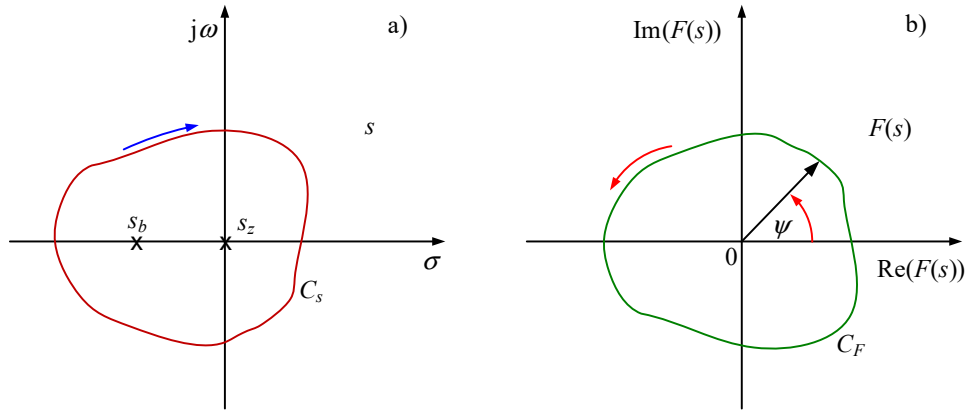
Założmy, że funkcja $F(s) = N(s)/D(s)$ jest analityczna wewnątrz i na konturze C_s z wyjątkiem skończonej liczby biegunów wewnątrz C_s , a ponadto na konturze C_s nie występują zera funkcji. Jeśli kontur C_s obiega w kierunku ujemnym Z zer funkcji (z

²⁰ H. Nyquist, *Regeneration Theory*, Bell Systems Tech. J., January 1932, pp. 126-147.

uwzględnieniem ich krotności) oraz P biegunów (z uwzględnieniem ich krotności), to odpowiada mu kontur C_F obiegający także w kierunku ujemnym początek układu współrzędnych płaszczyzny $F(s) = \text{Re}(F(s)) + j\text{Im}(F(s))$ N liczbę razy, która jest określona według następującej zależności:

$$N = Z - P \quad (5.14)$$

Wynika stąd, że zera zachowują kierunek obiegu konturu na płaszczyźnie odwzorowania, natomiast bieguny zmieniają ten kierunek na przeciwny. Odpowiedni przykład dla funkcji: $F(s) = s/(s+1)^2$ jest pokazany na rys. 5.6. Funkcja $F(s)$ ma jedno pojedyncze zero: $s_z = 0$, które jest rozwiązaniem równania $N(s) = s = 0$ oraz jeden podwójny biegun: $s_b = -1$, który jest pierwiastkiem równania $D(s) = (s+1)^2 = 0$. Wobec tego: $Z = 1$, $P = 2$ i na podstawie (5.14), otrzymujemy: $N = 1 - 2 = -1$. Oznacza to, że kontur C_F jednokrotnie obiega początek układu współrzędnych w kierunku przeciwnym (ujemna wartość N) do konturu C_s z rys. 5.6a. Daje to dodatnią zmianę kąta ψ (rys. 5.6b).



Rys. 5.6. Przekształcenie płaszczyzny s w płaszczyznę $F(s)$

Zasada argumentu może być także zapisana w odniesieniu do przyrostu kąta na płaszczyźnie $F(s)$: jeśli kontur C_s obiega w kierunku ujemnym Z zer funkcji $F(s)$ (z uwzględnieniem ich krotności) oraz P jej biegunów (z uwzględnieniem ich krotności), to wektor, którego koniec porusza się po konturze C_F na płaszczyźnie $F(s)$, zmienia swój kąt o wartość:

$$\psi = 2\pi N = 2\pi Z - 2\pi P \quad (5.15)$$

która jest liczona w tę samą stronę, w którą obiegany jest kontur C_s na płaszczyźnie s (na rys. 5.6b kąt ψ ma więc znak przeciwny: wartość ujemną).

Można zauważyć, że funkcja $F(s)$ może być tu traktowana jako odwzorowanie płaszczyzny s na płaszczyznę $F(s)$ (rys. 5.6).

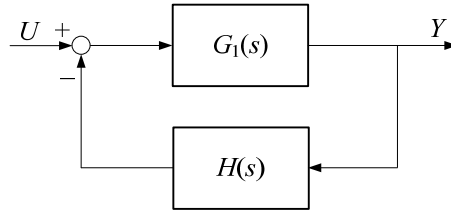
Przechodząc do kryterium Nyquista, rozpatrzmy układ regulacji z rys. 5.7. Załóżmy, że poszczególne bloki mają następujące transmitancje:

$$G_1(s) = \frac{L_1(s)}{M_1(s)}, \quad H(s) = \frac{L_H(s)}{M_H(s)}.$$

Transmitancja układu zamkniętego jest określona według znanej zasady:

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_o(s)} \quad (5.16)$$

gdzie $G_o(s) = G_1(s)H(s)$ jest transmitancją ‘otwartego’ układu regulacji obejmującego połączone szeregowo bloki w torze głównym i w torze sprzężenia zwrotnego.



Rys. 5.7. Układ regulacji z dodatnim sprzężeniem zwrotnym

Widać ponadto, że:

$$G_o(s) = M(s) - 1 = \frac{L_1(s)L_H(s)}{M_1(s)M_H(s)} = \frac{L_o(s)}{M_o(s)} \quad (5.17)$$

Układ objęty sprzężeniem zwrotnym (układ ‘zamknięty’) jest stabilny, gdy wszystkie pierwiastki (zera) funkcji charakterystycznej:

$$M(s) = 1 + G_o(s) = \frac{M_1(s)M_H(s) + L_1(s)L_H(s)}{M_1(s)M_H(s)} \quad (5.18)$$

(bieguny transmitancji $G(s)$) leżą w lewej części płaszczyzny s , lub, co jest równoważne, że żaden z nich nie leży w prawej części płaszczyzny (po pominięciu tych, co mają zerową część rzeczywistą). Do dalszej analizy ważne jest spostrzeżenie, że bieguny funkcji $G_o(s)$ oraz $M(s)$ są takie same. Ponadto układ zamknięty jest stabilny, gdy funkcja $M(s)$ nie ma zer w prawej części płaszczyzny s : $Z = 0$.

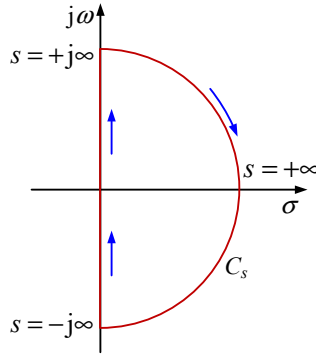
Założmy, że funkcja charakterystyczna (5.18) ma Z zer oraz P biegunów w prawej części płaszczyzny s . Zgodnie z zasadą argumentu Cauchy’ego, jeśli obejmiemy wszystkie te zera i bieguny konturem C_s obieganym jednokrotnie w kierunku ujemnym, to odpowiadać mu będzie przyrost argumentu funkcji $M(s) = 1 + G_o(s)$ o wartość: $\psi = 2\pi(Z - P)$ – także liczony w kierunku ujemnym. Ponieważ postulujemy stabilność wypadkowego systemu zamkniętego, więc $Z = 0$. W stabilnym systemie zamkniętym po-

wyższe badanie powinno dać zmianę argumentu funkcji $M(s)$ o wartość: $\psi = -2\pi P$, przy czym wartość P jest także liczbą biegunów funkcji $G_o(s)$ w prawej części płaszczyzny s (jeśli $P > 0$, to układ otwarty o transmitancji $G_o(s)$ jest niestabilny).

Określenie kąta ψ wymaga, aby kontur C_s obejmował wszystkie zera i bieguny funkcji $M(s)$ leżące w prawej półpłaszczyźnie s . Taki kontur, zwany konturem Nyquista, jest pokazany na rys. 5.8 [12, 15]. Dalej zakłada się, że kierunek tego konturu jest taki, jak zaznaczono na rys. 5.8. Zatem przejście wzdłuż rozpatrywanego konturu obejmuje oś urojoną: $s = j\omega$ w kierunku $(-\infty, +\infty)$ oraz półokrąg o nieskończonej wartości promienia. W ostatnim przypadku zakłada się, że kryterium Nyquista stosuje się do sytuacji, gdy spełniona jest zależność [12]:

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ \sigma > 0}}(M(s)) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ \sigma > 0}}(1 + G_1(s)H(s)) = C \quad (5.19)$$

gdzie C jest stałą wartością, przez co nie zmienia się argument funkcji $M(s)$ ²¹.



Rys. 5.8. Kontur Nyquista

Do określenia zakresu zmiany argumentu funkcji $M(s)$ przy pełnym obiegu konturu, obejmującego prawą część płaszczyzny s (rys. 5.8), wystarczy ograniczyć się do przejścia wzdłuż osi urojonej: $s = j\omega$ w granicach $(-\infty, +\infty)$, gdyż wartość stała C nie zmienia argumentu. Należy zatem badać zakres zmian funkcji:

$$\psi = \Delta \underset{-\infty < \omega < \infty}{\text{Arg}}(M(j\omega)) = \Delta \underset{-\infty < \omega < \infty}{\text{Arg}}(1 + G_1(j\omega)H(j\omega)) = \Delta \underset{-\infty < \omega < \infty}{\text{Arg}}(1 + G_o(j\omega)) \quad (5.20)$$

W rezultacie liczba N pełnych zmian kąta ψ (czyli argumentu funkcji $M(s)$) o wartość 2π przy zmianie pulsacji w zakresie $(-\infty, +\infty)$ wynosi:

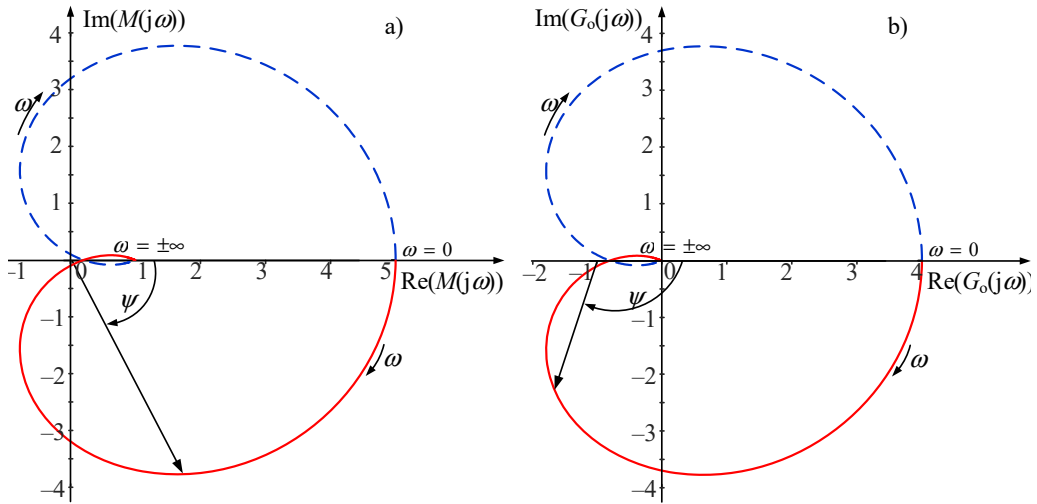
²¹ To wymaganie odpowiada założeniu, że transmitancja $G_o(s) = G_1(s)H(s)$ reprezentuje swego rodzaju filtr dolnoprzepustowy, dla którego: $\lim_{s \rightarrow \infty} (G_1(s)H(s)) = 0$.

$$N = \frac{\psi}{2\pi} = Z - P \quad (5.21)$$

Ze względu na symetrię funkcji $M(j\omega)$ względem osi rzeczywistej zakres zmian pulsacji w (5.20) można ograniczyć do nieujemnych wartości: $0 \leq \omega < \infty$, co w efekcie daje dodatnią zmianę kąta ψ w (5.20) o wielokrotność π (jeśli kierunek tej zmiany jest zgodny z kierunkiem obiegu konturu C_s).

W praktyce korzystanie z funkcji $M(j\omega)$ w powyższym badaniu nie jest wygodne, gdyż zazwyczaj nie jest ona bezpośrednio dostępna w rozkładzie iloczynowym, w odróżnieniu od funkcji $G_o(j\omega)$, która jest widmową transmitancją układu otwartego. Wybierając funkcję $G_o(j\omega)$ zamiast $M(j\omega) = 1 + G_o(j\omega)$, zachowujemy wszystkie podstawowe cechy powyższego wywodu, jedynie pomiar kąta ψ , który jest liczony względem początku układu współrzędnych $M(j\omega)$, należy odnieść do punktu $(-1 + j0)$ płaszczyzny $G_o(j\omega)$. Ilustruje to rys. 5.9, gdzie są pokazane trajektorie funkcji:

$$M(s) = 1 + \frac{4(0,2s+1)}{(s+1)(s^2+s+1)} = 1 + G_o(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (\text{rys. 5.9a}) \text{ oraz } G_o(s) \quad (\text{rys. 5.9b}).$$



Rys. 5.9. Trajektorie przykładowych funkcji $M(j\omega) = 1 + G_o(j\omega)$ (a) oraz $G_o(j\omega)$ (b)

Można zauważyć, że w obu przypadkach przyrost kąta ψ przy zmianie pulsacji zarówno w zakresie $(-\infty, +\infty)$, jak i połowie tego zakresu $(0, +\infty)$ wynosi 0, natomiast początek układu współrzędnych na płaszczyźnie $M(j\omega)$ oraz punkt $-1 + j0$ na płaszczyźnie $G_o(j\omega)$ nie są objęte przez analizowane trajektorie ($N = 0$).

Na podstawie powyższej analizy można podać następującą procedurę oceny stabilności układu zamkniętego według kryterium Nyquista:

1. Określić liczbę P biegunów transmitancji układu otwartego $G_o(s)$, które znajdują się w prawej części płaszczyzny s . Można w tym celu posłużyć się kryterium Routha-Hurwitza lub Michajłowa. Jeśli układ otwarty jest stabilny (co często ma miejsce), to $P = 0$; w innym przypadku $P > 0$.
2. Wyznaczyć kąt ψ , który jest przyrostem argumentu funkcji $G_o(j\omega)$ przy zmianie pulsacji ω w zakresie $(0, +\infty)$:

$$\psi = \Delta \operatorname{Arg}(G_o(j\omega)) \quad 0 \leq \omega < \infty$$

Na tej podstawie można wyznaczyć liczbę N przyrostów tego kąta o wartość π :

$$N = \psi / \pi$$

Znak kąta ψ jest ujemny, jeśli trajektoria $G_o(j\omega)$ ma zwrot przeciwny (kierunek narastania przy rosnącym ω) do kierunku konturu C_s na płaszczyźnie s (rys. 5.8).

Do obliczenia tych wielkości wygodnie jest posłużyć się wykresem trajektorii funkcji $G_o(j\omega) = \operatorname{Re}(G_o(j\omega)) + j\operatorname{Im}(G_o(j\omega))$ – jak na rys. 5.9b, z ograniczeniem zakresu pulsacji do wartości dodatnich (linia ciągła).

3. Układ zamknięty jest stabilny ($Z = 0$), jeśli: $N = -P$ (punkt $(-1, j0)$ jest objęty przez trajektorię $G_o(j\omega)$ P razy w kierunku odwrotnym niż kierunek konturu C_s). Stosowanie tego kryterium jest ilustrowane w kolejnych przykładach.

Przykład 5.9. W układzie jak na rys. 5.7 transmitancje obu elementów określone są następująco:

$$G_1(s) = \frac{k}{(s+1)(2s+1)}, \quad H(s) = \frac{0,01s+1}{5s+1}.$$

Zbadać stabilność układu zamkniętego według kryterium Nyquista. Jakie znaczenie dla stabilności ma wartość wzmocnienia k .

Określamy transmitancję układu otwartego:

$$G_o(s) = G_1(s)H(s) = \frac{k(0,01s+1)}{(s+1)(2s+1)(5s+1)} = \frac{L_o(s)}{M_o(s)}.$$

Biegunki tej transmitancji są pierwiastkami funkcji $M_o(j\omega)$:

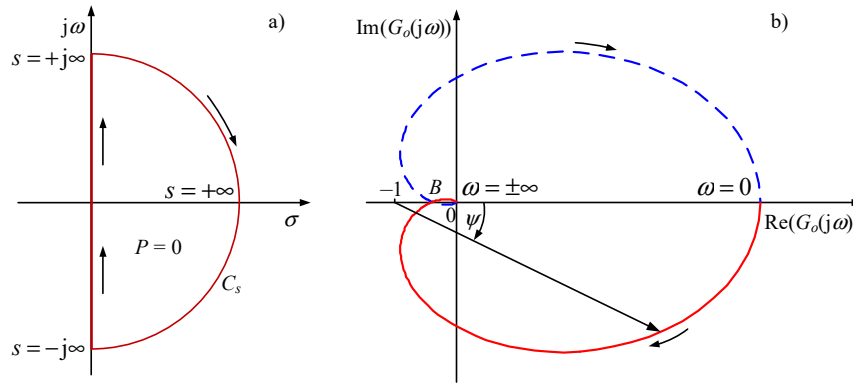
$$s_1 = -1, s_2 = -0,5, s_3 = -0,2.$$

Wszystkie biegunki są ujemne, zatem układ otwarty jest stabilny: liczba biegunów P w prawej części płaszczyzny $G_o(s)$ jest równa zero ($P = 0$).

Aby narysować trajektorię funkcji $G_o(j\omega) = \operatorname{Re}(G_o(j\omega)) + j\operatorname{Im}(G_o(j\omega))$ określimy jej składowe:

$$G_o(j\omega) = \frac{k(j0,01\omega+1)}{(j\omega+1)(j2\omega+1)(j5\omega+1)} = \frac{k((1-16,92\omega^2-0,1\omega^4) - j\omega(7,99-9,83\omega^2))}{1+30\omega^2+129\omega^4+100\omega^6}$$

Trajektoria tej funkcji dla $k = 5$ jest pokazana na rys. 5.10b.



Rys. 5.10. Kontur Nyquista (a) oraz trajektoria transmitancji $G_o(j\omega)$ układu otwartego (b)

Analizując przebieg trajektorii dla dodatniego zakresu zmian pulsacji $(0, +\infty)$ widać, że sumaryczny przyrost kąta ψ (który jest tu określany względem punktu $(-1 + j0)$) jest zerowy ($N = 0$). Trajektoria przechodzi przez trzy kolejne ćwiartki płaszczyzny $G_o(j\omega)$ w tym samym kierunku, jaki przyjęto dla konturu C_s , jednak nie obejmuje punktu $(-1 + j0)$). Zgodnie z p. 3 kryterium spełniony jest warunek: $N = -P$, a więc układ jest stabilny.

Warto zauważyć, że o stabilności układu decyduje położenie punktu B , w którym trajektoria przecina oś rzeczywistą. Można go wyznaczyć z warunku zerowania się części urojonej funkcji: $\text{Im}(G_o(j\omega)) = 0$, skąd otrzymamy pulsację ω_B , odpowiadającą punktowi B . Wartość OB wyznacza się przez podstawienie: $OB = \text{Re}(G_o(j\omega_B)) = G_o(j\omega_B)$.

W rozpatrywanym przypadku: $\omega_B \approx 0,9$, natomiast $OB \approx -0,078k$. Położenie punktu B zależy od współczynnika wzmocnienia i po przekroczeniu wartości $k \approx 12,9$ trajektoria obejmie krytyczny punkt $(-1 + j0)$ przez co układ staje się niestabilny.

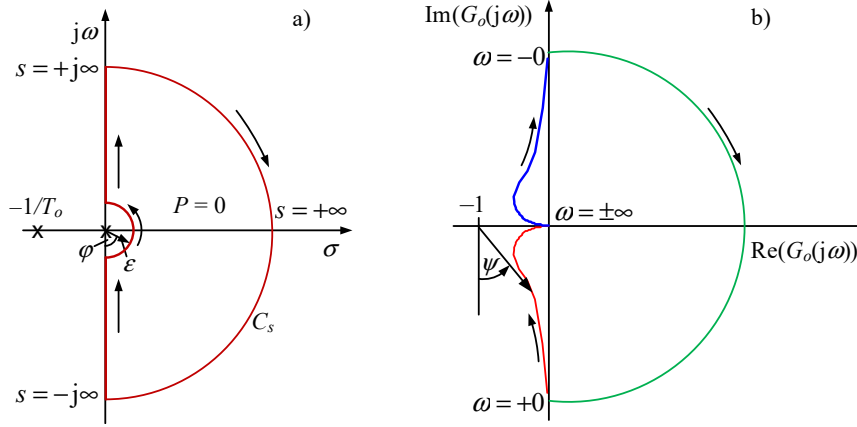
W istocie określenie stabilności systemu na podstawie kryterium Nyquista nie wymaga szczegółowego kreślenia przebiegu trajektorii układu otwartego. Zazwyczaj wystarczy ocenić ogólną formę tej trajektorii, natomiast ważna jest ocena jej przebiegu względem punktu $(-1 + j0)$, zwłaszcza gdy układ otwarty jest stabilny ($P = 0$). Kolejny przykład pokazuje sposób postępowania w sytuacji, gdy transmitancja układu otwartego ma bieguny położone na osi urojonej.

Przykład 5.10. Przeprowadzić ocenę warunków stabilności układu zamkniętego, gdy transmitancja układu otwartego ma następującą postać:

$$G_o(s) = \frac{k}{s(sT_o + 1)}, \quad k > 0, \quad T_o > 0.$$

Bieguny transmitancji $G_o(s)$ są następujące: $s_1 = 0$, $s_2 = -1/T_o$. Biegun zerowy uniemożliwia bezpośrednie zastosowanie procedury objęcia konturem wszystkich biegunów decydujących o niestabilności układu, jak to pokazuje rys. 5.8. Analityczność transmitancji $G_o(s)$ pozwala jednak łatwo obejść ten kłopot przez zastąpienie oryginalnej transmitancji przez inną funkcję,

która w granicy jest jej równoważna. Pomysł polega na zaliczeniu zerowego bieguna transmitancji układu otwartego do lewej części płaszczyzny (rys. 5.11a) w ten sposób, że kontur C_s w tym rejonie obchodzi punkt odpowiadający zerowemu biegunowi łukiem o promieniu $\varepsilon \rightarrow 0$. Dzięki temu układ otwarty jest rozpatrywany jako stabilny ($P = 0$).



Rys. 5.11. Kontur Nyquista z obejściem bieguna zerowego

Łatwo zauważyć, że ten łuk (w obszarze jego występowania) modyfikuje oryginalną transmitancję układu otwartego do następującej postaci [15]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_o(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k}{\varepsilon e^{j\varphi}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k}{\varepsilon} e^{-j\varphi}, \text{ gdzie } \varphi - \text{kąt wektora, którego koniec porusza się po łuku.}$$

Widać, że obrazem rozważanego łuku na płaszczyźnie $G_o(s)$ jest półokrąg o nieskończonym promieniu (k/ε , $\varepsilon \rightarrow 0$, rys. 5.11b). Pozostała część konturu C_s pozostaje bez zmian.

W celu oceny stabilności układu zamkniętego należy określić całkowitą zmianę kąta ψ , jaka zachodzi przy jednokrotnym obejściu konturu C_s : $-\infty < \omega < +\infty$ (lub tylko połowę tego zakresu – rys. 5.11). Z rys. 5.11b widać, że trajektoria $G_o(s)$ nie obejmuje punktu $(-1+j0)$, a więc $N = 0$ (sumaryczna zmiana kąta ψ jest równa zero). Zatem: $N = Z - P = 0$, skąd $Z = 0$, co świadczy o stabilności układu zamkniętego.

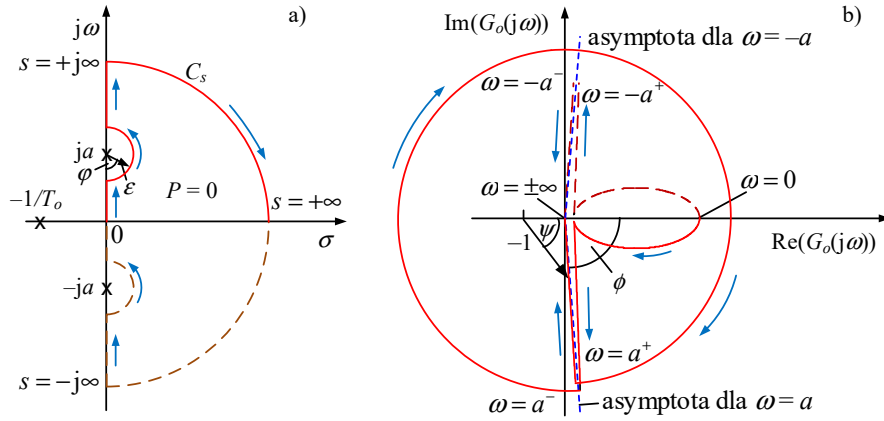
Podobny sposób postępowania można stosować także w pozostałych przypadkach, gdy bieguny transmitancji układu otwartego $G_o(s)$ leżą na osi urojonej. W następnym przykładzie analizowany jest przypadek podwójnego bieguna urojonego.

Przykład 5.11. Przeprowadzić ocenę warunków stabilności układu zamkniętego, gdy transmitancja układu otwartego ma następującą postać:

$$G_o(s) = \frac{k}{(s^2 + a^2)^2 (sT_o + 1)}, \quad k > 0, T_o > 0.$$

Bieguny podanej transmitancji są następujące: $s_{1,2} = \pm ja$, $s_{3,4} = \pm ja$, $s_5 = -1/T_o$. Występuje tu zatem podwójny biegun zespolony o zerowej części rzeczywistej. Zauważmy, że układ otwarty jest w tym przypadku niestabilny (wielokrotny biegun D na rys. 5.1).

Znów modyfikujemy transmitancję $G_o(s)$ w taki sposób, aby wszystkie bieguny znalazły się poza trasą konturu C_s obejmującego prawą część płaszczyzny s , a więc $P = 0$ (rys. 5.12).



Rys. 5.12. Kontur Nyquista z obejściem biegunów urojonych

W tym przypadku parametr s w pobliżu biegunów zapiszemy następująco:

$$s = \pm ja + \varepsilon e^{j\varphi}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5.22)$$

odpowiednio dla dodatniej i ujemnej wartości biegunu.

Rozpatrzmy obraz funkcji $G_o(s)$ dla dodatnich wartości pulsacji ω . W pobliżu pulsacji $\omega \approx a$ funkcja ta przyjmuje więc następującą postać:

$$G_o(s) = \frac{k}{((ja + \varepsilon e^{j\varphi})^2 + a^2)^2 (1 + (ja + \varepsilon e^{j\varphi})T_o)} = \frac{k}{\varepsilon^2 e^{j2\varphi} (\varepsilon e^{j\varphi} + ja)^2 (1 + jaT_o + \varepsilon T_o e^{j\varphi})}$$

Funkcja ta może być przybliżona następującą zależnością:

$$G_o(s) = \frac{1}{D} e^{j\varphi}, \quad \varphi = -(2\phi + \pi + \arctg(aT_o)), \quad \text{przy czym } D \rightarrow 0.$$

Jest to zatem wektor o kierunku określonym przez kąt $-\phi$, którego amplituda dąży do nieskończoności (asymptota). Podstawiając skrajne wartości kąta ϕ można określić położenie tego wektora przy dojściu pulsacji ω do wartości a od dolnych i od górnych wartości (rys. 5.12):

$$\omega \rightarrow a^- \quad \varphi = -\pi/2 \quad \varphi = -\arctg(aT_o), \quad \omega \rightarrow a^+ \quad \varphi = \pi/2 \quad \varphi = -2\pi - \arctg(aT_o).$$

Widać, że w obu przypadkach wektory mają te same położenia.

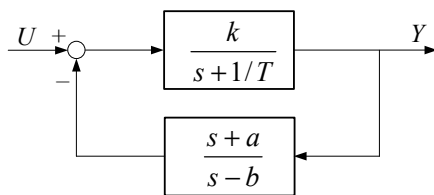
Trajektoria transmitancji $G_o(j\omega)$ jest pokazana na rys. 5.12b. Przyjęto następujące parametry: $k = 0,5$, $a = 1$, $T_o = 100$. Obejście w nieskończoności jest pokazane tylko dla biegunu dodatniego: $s = ja$. Linia oznaczoną kropkami pokazano położenia dwóch asymptot trajektorii w punktach nieciągłości: $s = \pm ja$. Są one nachylone do osi rzeczywistej pod kątem, odpowiednio $\pm\phi$. W tym przypadku asymptoty trajektorii w punkcie nieciągłości są wspólne dla obu kierunków zbliżania się do tego punktu: zarówno dla $\omega \rightarrow a^-$, jak i dla $\omega \rightarrow a^+$.

Śledząc przyrost kąta ψ wyznaczonego względem punktu $(-1+j0)$ przy zmianie pulsacji w przedziale: $0 \leq \omega < +\infty$, widać, że koniec wektora zatacza pełen okrąg w tym samym kierunku, co kontur C_s na płaszczyźnie s . Kąt ψ ma zatem wartość dodatnią: $\psi = 2\pi$, a więc $N = 2$ (5.21). Można więc określić liczbę zer funkcji charakterystycznej w prawej części płaszczyzny $M(s)$: $Z = P + N = 0 + 2 = 2$. Układ zamknięty jest więc niestabilny.

Warto zauważyć, że ominięcie biegunów transmitancji $G_o(s)$ leżących na osi urojonej (zarówno zerowych – jak w przykładzie 5.10, czy też o niezerowej wartości części urojonej – jak w przykładzie 5.11) za pomocą podstawienia (5.22), prowadzi do tego, że są one traktowane jak bieguny leżące w lewej części płaszczyzny s . Droga obejścia tych biegunów odpowiednim łukiem (rys. 5.12a) jest częścią konturu C_s , który ma kierunek przeciwny do wskazówek zegara. Jeśli więc kierunek narastania kąta ψ jest taki sam, to obliczana na tej podstawie liczba N przyjmuje wartość dodatnią. Wynika to z zasady argumentu Cauchy'ego. Przyjęty tu kierunek obiegu konturu C_s na płaszczyźnie s jest utrwalony długą tradycją, chociaż można ustalać ten kierunek dowolnie, konsekwentnie stosując zasadę argumentu w całym wywodzie.

Kolejny przykład pokazuje sposób określania stabilności układu według kryterium Nyquista w przypadku, gdy układ otwarty jest niestabilny.

Przykład 5.12. Określić stabilność podanego układu za pomocą kryterium Nyquista.



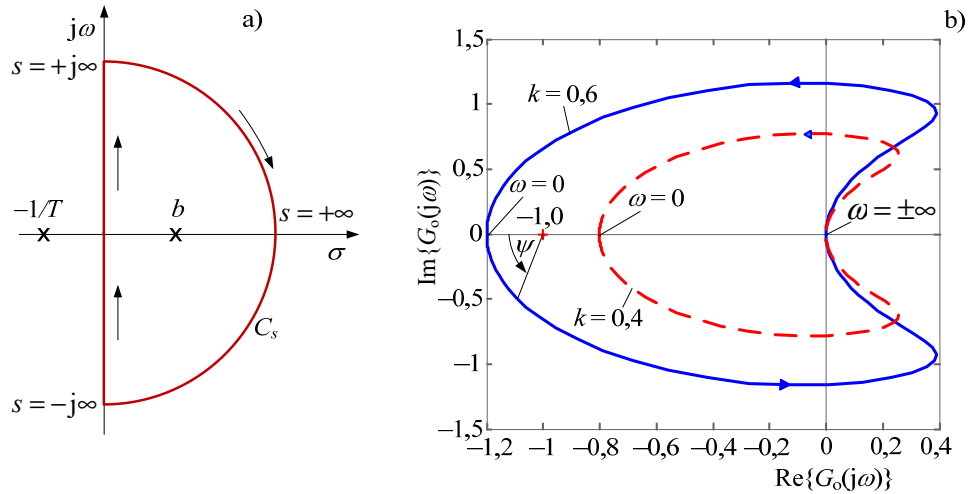
Zbadać wpływ współczynnika k przy następujących parametrach podanej transmitancji: $a = 0,1$, $b = 0,1$, $T = 2$.

Transmitancja układu otwartego jest następująca:

$$G_o(s) = \frac{k(s+a)}{(s+1/T)(s-b)} = \frac{sk + ak}{s^2 + s(1/T - b) - b/T}$$

Bieguny transmitancji: $s_1 = -1/T$, $s_2 = b$ (oba są rzeczywiste – rys. 5.13a), a zatem jeden biegun leży w prawej części płaszczyzny s ($P = 1$).

Przebieg trajektorii funkcji $G_o(j\omega)$ jest pokazany na rys. 5.13b. Pokazane są przebiegi trajektorii transmitancji układu otwartego dla dwóch wartości współczynnika k . Widać, że dla $k = 0,6$, punkt $(-1 + j0)$ jest objęty jeden raz przez trajektorię w kierunku przeciwnym do kierunku konturu C_s , a zatem: $N = -1$. Na podstawie (5.21) obliczamy liczbę zer funkcji charakterystycznej w prawej części płaszczyzny s : $Z = N + P = -1 + 1 = 0$, a więc układ jest stabilny. Dla przypadku, gdy $k = 0,4$ (rys. 5.13b, linia przerywana), trajektoria nie obejmuje punktu $(-1 + j0)$ i warunek stabilności układu zamkniętego nie jest spełniony: $N = 0$ przy $P = 1$.

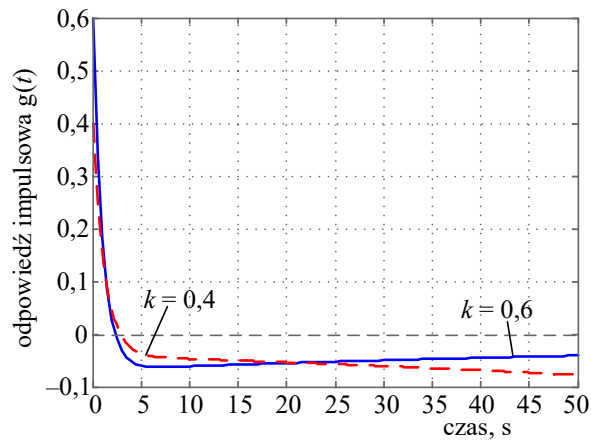


Rys. 5.13. Kontur Nyquista (a) oraz trajektorie funkcji $G_o(s)$ dla dwóch wartości k (b)

Rozróżnienie między dwoma stanami analizowanego układu można także obserwować, śledząc ich charakterystyki czasowe. Zauważmy, że wnioski płynące z powyższych rozważań odnoszą się do układu zamkniętego. Łatwo określić jego transmitancję:

$$G(s) = \frac{\frac{k}{s+1/T}}{1 + \frac{k(s+a)}{(s+1/T)(s-b)}} = \frac{sk - bk}{s^2 + s(1/T + k - b) + ka - b/T}$$

Odpowiedź impulsowa (funkcja wagi) układu jest transformatą odwrotną: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Przebiegi odpowiedzi impulsowej dla dwóch analizowanych (rys. 5.13b) wartości współczynnika k są pokazane na rys. 5.14.



Rys. 5.14. Odpowiedzi impulsowe układu stabilnego ($k = 0,6$) oraz niestabilnego ($k = 0,4$)

Przebiegi tych odpowiedzi potwierdzają wnioski z powyższego badania: dla $k = 0,4$ amplituda odpowiedzi impulsowej z czasem narasta (przeciwnie do odpowiedzi dla $k = 0,6$, która z czasem zmierza do zera). Obserwacja ta potwierdza ogólny warunek stabilności określony zależnością (5.1).

Znajomość powyższych zasad stosowania metody Nyquista do badania stabilności zamkniętego układu regulacji pozwala uprościć zapis tego kryterium, a także procedurę jego stosowania. Jeśli przyjąć, że kontur C_s obejmujący prawą część płaszczyzny s ma kierunek jak na rys. 5.8, to kryterium Nyquista może być sformułowane następująco: Zamknięty układ regulacji jest stabilny jeśli suma niestabilnych biegunów (P) transmitancji układu otwartego $G_o(s)$ i liczby (N) dodatnich (w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara) pół-okrążeń punktu $(-1 + j0)$ na płaszczyźnie $G_o(j\omega)$ przez trajektorię funkcji $G_o(j\omega)$, przy zmianie $0 \leq \omega < +\infty$, jest równa zero:
 $Z = N + P = 0$.

Kryterium Nyquista stanowi bazę analityczną do wielu innych sposobów oceny stabilności układów zamkniętych.

5.5. Zapas fazy i zapas wzmocnienia

Jednym z wniosków płynących z kryterium Nyquista jest możliwość oceny stopnia ‘odległości’ układu zamkniętego od granicy stabilności. Wprowadzono dwa ilościowe wskaźniki, które wynikają ze sposobu zachowania się charakterystyki widmowej układu w pobliżu punktu $(-1+j0)$ na płaszczyźnie $G_o(j\omega)$.

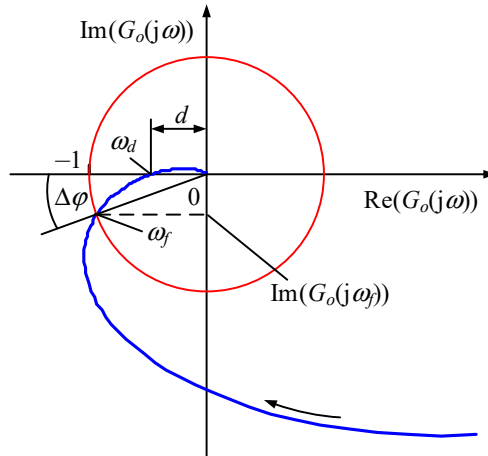
Rozważmy przypadek, gdy układ otwarty jest stabilny (niekoniecznie asymptotycznie). Oznacza to, że pierwiastki mianownika jego transmitancji (a także transmitancji układu zamkniętego) nie znajdują się w prawej części płaszczyzny pierwiastków s . Jeśli niektóre z nich są położone na osi urojonej, to można je zaliczyć do pierwiastków stabilnych na zasadzie ‘obejścia’ od strony prawej, jak to pokazuje przykład 5.10. W takim przypadku charakterystyka układu otwartego w pobliżu punktu $(-1+j0)$ ma postać jak na rys. 5.15. Zapas stabilności układu zamkniętego można ocenić przez badanie punktu przecięcia tej trajektorii z okręgiem wyznaczonym przez krytyczny punkt $(-1+j0)$. Stosowane są dwa wskaźniki znane jako zapas amplitudy i zapas fazy.

Zapas amplitudy jest definiowany następująco:

$$g = \frac{1}{d} = \frac{1}{|G_o(j\omega_d)|} \quad (5.23)$$

gdzie ω_d jest pulsacją, przy której trajektoria przecina oś rzeczywistą na prawo od punktu $(-1+j0)$.

Pulsację ω_d można określić z warunku: $\text{Im}(G_o(j\omega)) = 0$, wybierając właściwą wartość w przypadku kilku rozwiązań. Zapas wzmocnienia często określa się w decybelach:



Rys. 5.15. Przebieg trajektorii transmitancji stabilnego układu otwartego

$$g = 10 \log_{10} \frac{1}{|G_o(j\omega_d)|} = 10 \log_{10} \frac{1}{|\operatorname{Re} G_o(j\omega_d)|}, \text{ dB} \quad (5.24)$$

Zapas fazy jest wyznaczony przez kąt, który dopełnia punkt przecięcia okręgu o promieniu 1,0 z analizowaną trajektorią do kąta 180° :

$$\Delta\varphi = 180 + \operatorname{Arg} G_o(j\omega_f) \quad (5.25)$$

gdzie ω_f jest pulsacją, przy której trajektoria przecina okrąg jednostkowy poniżej osi rzeczywistej.

Pulsację, która odpowiada punktowi przecięcia trajektorii $G_o(j\omega)$ z okręgiem jednostkowym (rys. 5.16), można określić według następującej zależności:

$$\operatorname{Im} G_o(j\omega_f) = \sin \Delta\varphi \quad (5.26)$$

Zasadę posługiwania się tymi wskaźnikami pokazuje kolejny przykład.

Przykład 5.13. Badany układ otwarty ma następującą transmitancję:

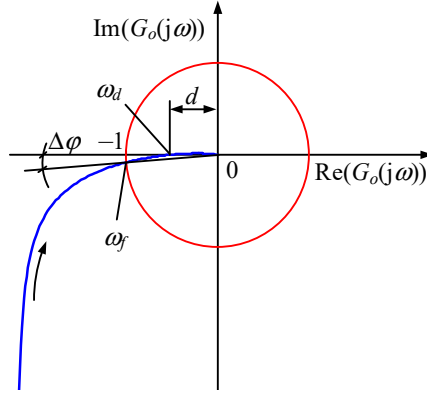
$$G_o(s) = \frac{k}{s(1,2s+1)(s+1)}$$

Określić wartość wzmocnienia k przy której:

- zapas wzmocnienia g wynosi 10dB;
- zapas fazy $\Delta\varphi$ wynosi $\pi/6$.

Po podstawieniu: $s = j\omega$ transmitancja układu otwartego przyjmuje następującą postać:

$$G_o(j\omega) = \frac{-k(2,2\omega^2 + j\omega(1-1,2\omega^2))}{\omega^2(1-1,2\omega^2)^2 + 4,84\omega^4}$$



Rys. 5.16. Trajektoria transmitancji układu otwartego

Przebieg trajektorii transmitancji układu otwartego dla wzmacnienia $k = 1$ jest pokazany na rys. 5.16. Pulsację dla punktu przecięcia trajektorii z osią rzeczywistą można wyznaczyć z równania:

$$\text{Im } G_o(j\omega) = \frac{k\omega(1,2\omega^2 - 1)}{4,84\omega^4 + \omega^2(1 - 1,2\omega^2)^2} = 0.$$

Skąd: $\omega = \omega_d \approx 0,9129 \text{ s}^{-1}$ (pozostałe rozwiązania: $\omega_d = 0$ oraz $\omega_d = -0,9129$ pominięto).

Z warunków zadania można określić wielkość d : $20\log(1/d) = 10\text{dB}$, a zatem: $d = 10^{-1/2} = 1/\sqrt{10} \approx 0,316$.

Poszukiwana wartość współczynnika k , który zapewnia powyższą wielkość obliczamy z następującego warunku:

$$-\text{Re } G_o(j\omega_d) = \frac{2,2\omega_d^2 k}{4,84\omega_d^4 + \omega_d^2(1 - 1,2\omega_d^2)^2} = d, \text{ a zatem: } k = d \frac{(2,2\omega_d)^2 + (1 - 1,2\omega_d^2)^2}{2,2}.$$

Po podstawieniu otrzymamy: $k \approx 0,5793$. Można zauważyć, że wartość wzmacnienia $k = 1$, której odpowiada przebieg na rys. 5.16, zapewnia znacznie mniejszy niż żądany w zadaniu zapas wzmacnienia 10dB.

W celu spełnienia warunków odnośnie do zadanego zapasu fazy należy obliczyć argument transmitancji (5.25):

$$\text{Arg } G_o(j\omega_f) = \Delta\varphi - 180 = \frac{180\pi}{6\pi} - 180 = -150^\circ.$$

A zatem:

$$\text{Arg } G_o(j\omega_f) = \arctg \frac{\text{Im } G_o(j\omega_f)}{\text{Re } G_o(j\omega_f)} = \arctg \frac{k(1 - 1,2\omega_f^2)}{2,2k\omega_f} = -150^\circ, \text{ skąd: } \frac{1 - 1,2\omega_f^2}{2,2\omega_f} = \text{tg}(-150^\circ).$$

Ostatecznie otrzymujemy następujące równanie:

$$1,2\omega_f^2 - 1 = 1,27\omega_f,$$

które ma dwa rozwiązania: $\omega_f \approx 0,5259 \text{ s}^{-1}$ oraz $\omega_f \approx -1,5 \text{ s}^{-1}$. Wybieramy rozwiązanie z dodatnią pulsacją, gdyż to drugie dotyczy dopełnienia kąta $\Delta\varphi$ do 90° dla pulsacji ujemnych. Zatem: $\omega_f = 0,44 \text{ s}^{-1}$. Przy tej pulsacji powinien zachodzić związek (5.26):

$$\operatorname{Im} G_o(j\omega_f) = \sin \Delta\varphi, \text{ czyli: } \frac{-k\omega_f(1-1,2\omega_f^2)}{4,84\omega_f^4 + (1-1,2\omega_f^2)^2} = \frac{1}{2}.$$

Po podstawieniu uzyskanej wartości pulsacji ω_f dla tego punktu otrzymamy: $k = 0,7026$.

Podsumowując wyniki, widać, że zapas wzmocnienia $g = 10\text{dB}$ osiąga się dla wzmocnienia $k = 0,5793$, natomiast zapas fazy $\Delta\varphi = \pi/6$ uzyskuje się dla $k = 0,7026$.

W celu usprawnienia obliczeń w podobnych zadaniach wygodnie jest posługiwać się narzędziami programowymi, w których dostępna jest arytmetyka liczb zespolonych, czy też gotowe procedury obliczeniowe. Na przykład, aby skorzystać z procedur programu MATLAB [41] należy zapisać transmitancję rozważanego układu otwartego w postaci ilorazu wielomianów:

$$G_o(s) = \frac{k}{1,2s^3 + 2,2s^2 + s}, \text{ gdzie dla } k = 1 \text{ wielomian licznika jest określony przez współ-}$$

czynnik 1, natomiast współczynniki wielomianu mianownika są następujące: (1,2; 2,2; 1; 0) (dla kolejnych malejących potęg zmiennej s).

Aby uzyskać wykres Nyquista tej transmitancji, można posłużyć się następującą procedurą:

```
licz=1;
mian=[1.2 2.2 1 0];
nyquist(licz,mian);
```

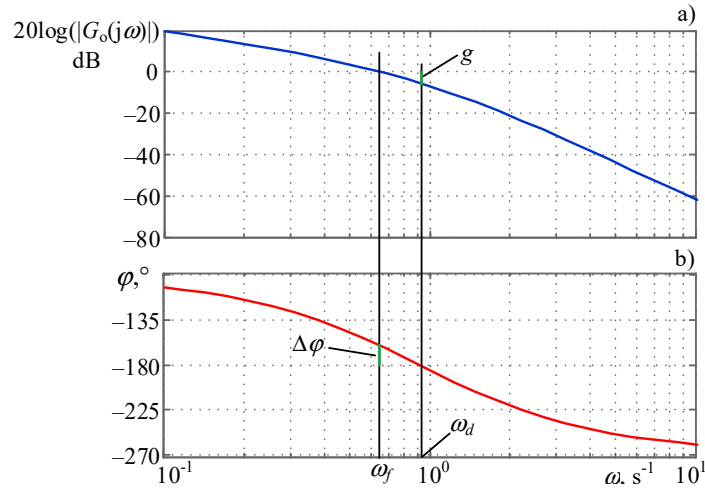
Po uruchomieniu tego programu uzyskamy wykres charakterystyki częstotliwościowej. Modyfikacje tego wykresu można otrzymać przez odpowiednie ustawienie parametrów funkcji `nyquist`. Podobnie parametry związane z zapasem wzmocnienia i zapasem fazy można otrzymać po uruchomieniu następującej funkcji:

```
[g,fi,omf,omg]=margin(licz,mian);
```

gdzie: g jest zapasem wzmocnienia (g), fi przedstawia liczbową wartość zapasu fazy ($\Delta\varphi$), omf jest pulsacją (ω_f), natomiast omg – pulsacją (ω_l).

5.6. Kryterium logarytmiczne

Kryterium logarytmiczne wynika bezpośrednio z przeniesienia rozważań dotyczących zapasu wzmocnienia i zapasu fazy z płaszczyzny Nyquista we współrzędnych prostokątnych: $G_o(j\omega) = \operatorname{Re}(G_o(j\omega)) + j\operatorname{Im}(G_o(j\omega))$ na płaszczyznę współrzędnych biegunowych: $G_o(j\omega) = |G_o(j\omega)|\angle\operatorname{Arg}(G_o(j\omega))$ z logarytmiczną skalą pulsacji i modułu (wykres Bodego). Zauważmy, że na płaszczyźnie Bodego krytyczny punkt $(-1 + j0)$ określony jest współrzędnymi: $20\log(1) = 0\text{dB}$ – w odniesieniu do amplitudy oraz $\varphi = -180^\circ$ – w odniesieniu do fazy. Ilustruje to przykład pokazany na rys. 5.17, który odnosi się do przykładu z rys. 5.16. Dwa wykresy, przedstawiające logarytmiczną charakterystykę amplitudy (rys. 5.17a) oraz fazy (rys. 5.17b), można uzyskać za pomocą następującej procedury w języku MATLAB:



Rys. 5.17. Charakterystyka amplitudowa (a) oraz fazowa (b) z zaznaczeniem zapasu fazy i zapasu wzmocnienia

```

licz=1;
mian=[1.2 2.2 1 0];
bode(licz,mian);

```

Zapas fazy $\Delta\varphi$ jest wyznaczony na charakterystyce fazowej dla pulsacji ω_f , przy której charakterystyka logarytmiczna amplitudy przecina oś o współrzędnej $20\log|G_o(j\omega)| = 0$. Wartość numeryczna wielkości $\Delta\varphi$ jest określona przez długość odcinka pomiędzy współrzędną (-180°) , a punktem na charakterystyce fazowej dla pulsacji ω_f . Z kolei zapas wzmocnienia jest zdefiniowany dla pulsacji ω_d , przy której charakterystyka fazowa przyjmuje wartość -180° (rys. 5.17b). W stabilnym układzie zamkniętym charakterystyka amplitudowa powinna przy tej częstotliwości przebiegać poniżej osi o wartości 0. Odcinek, który jest równy odległości charakterystyki amplitudowej dla ω_d do tej osi, jest równy zapasowi wzmocnienia (dB, rys. 5.17).

Zaletą kryterium logarytmicznego jest możliwość łatwej oceny stabilności układu zamkniętego, jeśli transmitancja układu otwartego jest dostępna w postaci iloczynowej, to znaczy rozłożonej na proste czynniki. Można wówczas szybko naszkicować logarytmiczną charakterystykę amplitudy w postaci asymptotycznej.

Przykład 5.14. Zbadać warunki stabilności układu zamkniętego w przypadku, gdy układ otwarty ma następującą transmitancję:

$$G_o(s) = \frac{k(sT_1 + 1)}{s(sT_2 + 1)(sT_3 + 1)^2}, \text{ gdzie: } T_2 > T_1 > T_3 > 0.$$

Przyjmujemy następujące parametry: $T_1 = 1,0$; $T_2 = 5,0$; $T_3 = 0,5$; $k = 1$. Widać, że wszystkie bieguny są ujemne, więc układ otwarty jest stabilny. Podstawienie podanych parametrów daje następującą postać iloczynową transmitancji:

$$G_o(s) = \frac{s+1}{s(5s+1)(0,5s+1)^2}.$$

W celu łatwiejszego stosowania programu MATLAB do rysowania charakterystyk zapisujemy transmitancję w postaci wielomianowej:

$$G_o(s) = \frac{skT_1 + k}{s^4T_2T_3^2 + s^3(2T_2T_3 + T_3^2) + s^2(T_2 + 2T_3) + s}.$$

Współczynniki wielomianów licznika i mianownika są następujące:

$$\text{licz} = [kT_1 \quad k]; \text{ mian} = [T_2T_3^2 \quad 2T_2T_3 + T_3^2 \quad T_2 + 2T_3 \quad 1 \quad 0].$$

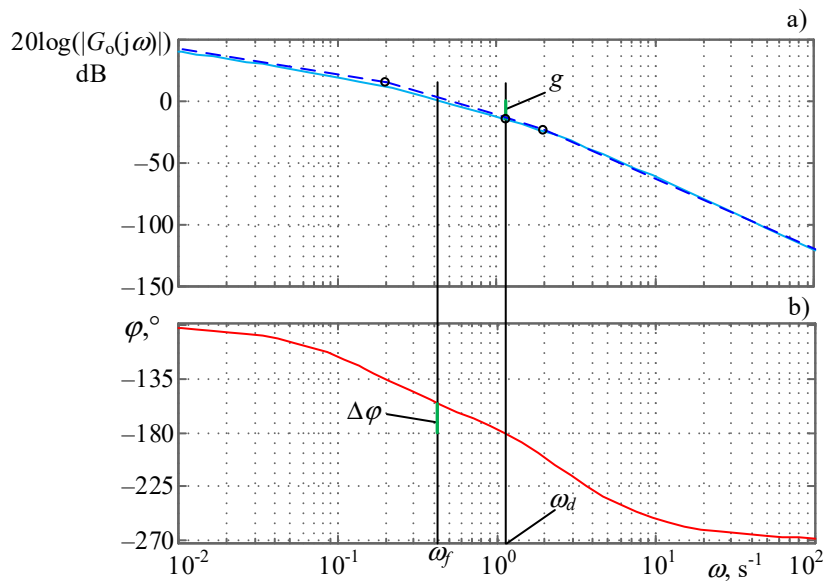
Po podstawieniu przyjętych parametrów można narysować charakterystyki logarytmiczne amplitudy i fazy na podstawie następującego programu.

```

licz= [1 1];
mian=[1.25 5.25 6 1 0];
bode(licz,mian);

```

Charakterystyka amplitudowa i fazowa badanej transmitancji układu otwartego jest pokazana na rys. 5.18. Linia przerywaną zaznaczono charakterystykę amplitudową asymptotyczną z zaznaczeniem punktów ograniczających poszczególne przedziały nachylenia charakterystyki.



Rys. 5.18. Charakterystyka amplitudowa (a) oraz fazowa (b) badanego układu; zaznaczono zapas fazy $\Delta\varphi$ i zapas wzmocnienia g

Charakterystyka asymptotyczna amplitudy i fazy może być łatwo narysowana bez potrzeby korzystania z obliczeń komputerowych, co upraszcza analizę.

Można zauważyć, że dla pulsacji ω_L , gdy charakterystyka fazowa osiąga -180° , charakterystyka amplitudowa znajduje się poniżej współrzędnej zerowej, a zatem układ jest stabilny.

5.7. Stabilność układów ze zwłoką czasową

Występowanie zwłoki czasowej w układzie regulacji stwarza zazwyczaj kłopoty z osiągnięciem żadanego zapasu fazy oraz wzmocnienia. Łatwo to uzasadnić, gdyż element z czasem zwłoki nie wprowadza zmiany amplitudy charakterystyki, natomiast zwiększa w kierunku ujemnym jej fazę. Dla transmitancji: $G_r(s) = e^{-s\tau}$ otrzymamy następujący obraz częstotliwościowy:

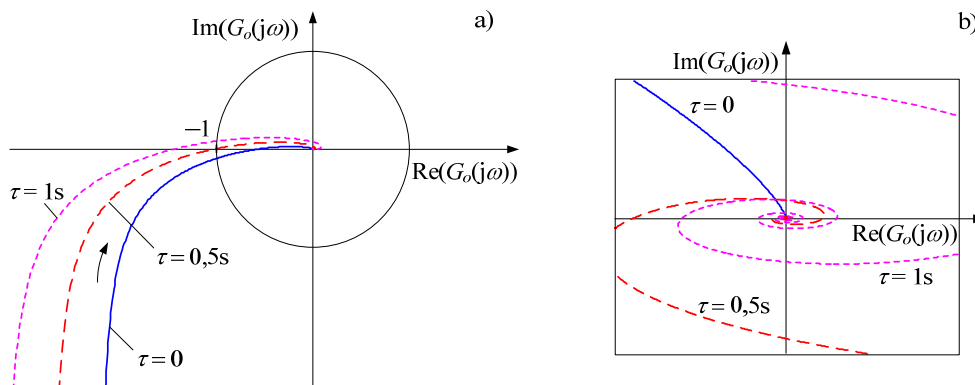
$$G_r(j\omega) = 1 \angle -\omega\tau \quad (5.27)$$

Gdy element taki jest dołączony do transmitancji tradycyjnego układu, który ma właściwości dolnoprzepustowe, to ekwiwalentna charakterystyka amplitudowo-fazowa może przeciąć oś rzeczywistą ujemną (tzn. gdy faza przyjmie wartość -180°) przed dostateczną redukcją amplitudy, gdy jej moduł będzie większy od 1. Wówczas układ zamknięty jest niestabilny. Ilustruje to następny przykład.

Przykład 5.15. Zbadać warunki stabilności układu z przykładu 5.13, w którym umieszczono element z czasem zwłoki τ . Transmitancja ekwiwalentnego układu otwartego jest następująca:

$$G_o(s) = \frac{ke^{-s\tau}}{s(1,2s+1)(s+1)}, \text{ gdzie: } k=1; \tau=0,5s$$

Charakterystyki amplitudowo-fazowa układu otwartego dla trzech wartości opóźnienia: $\tau=0$, $\tau=0,5s$ oraz $\tau=1,0s$ są pokazane na rys. 5.19. Na rys. 5.19b pokazano powiększenie tych trajektorii w pobliżu początku układu współrzędnych.



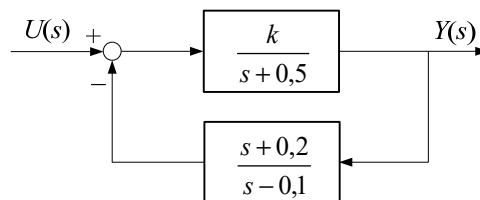
Rys. 5.19. Trajektorie analizowanego układu otwartego dla trzech różnych wartości opóźnienia τ (a); powiększenie w pobliżu punktu $(0 + j0)$ (b)

Widać, że dodanie opóźnienia powoduje przyspieszenie ekwiwalentnej fazy trajektorii transmitancji, co pogarsza warunki stabilności układu zamkniętego.

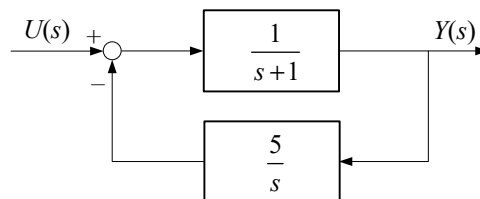
Zachowanie odpowiednich zapasów stabilności układu zamkniętego w przypadku występowania opóźnienia w transmitancji układu otwartego, wymaga redukcji tego opóźnienia lub zmniejszenia współczynnika wzmocnienia. W rzeczywistych systemach opóźnienie jest cechą sterowanego procesu, więc korekcja wymaga odpowiedniej modyfikacji jego transmitancji.

Zadania

- 5.1. Stosując kryterium Routha-Hurwitza, określić zakres zmian współczynnika wzmocnienia k w podanym układzie, dla którego jest on stabilny.



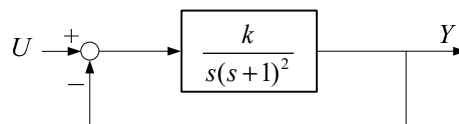
- 5.2. Określić stabilność podanego układu według kryterium Michajłowa



- 5.3. Stosując kryterium Nyquista, zbadać stabilność układu zamkniętego, w którym transmitancja układu otwartego jest określona następującą funkcją:

$$G_o(s) = \frac{k(s+0,1)}{(s+0,5)(s-0,1)} \quad \text{dla wartości wzmocnienia: a) } k = 1; \text{ b) } k = 0,4.$$

- 5.4. Określić stabilność podanego układu ($k = 1$) według kryterium Nyquista.



- 5.5. Stosując kryterium Nyquista, zbadać stabilność układu o strukturze jak na rys. 5.7, przy czym:

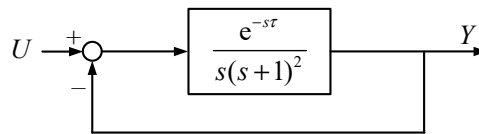
$$G_1(s) = \frac{5s}{(s-1)(s-2)}, \quad H(s) = 1$$

$$G_1(s) = \frac{k(s+3)(s+5)}{(s-2)(s-4)}, \quad H(s) = 1. \text{ Dla jakich wartości } k \text{ układ jest stabilny?}$$

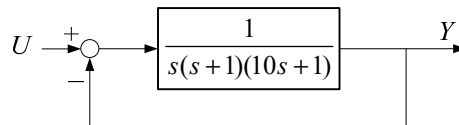
$$G_1(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+1/T_1)}, \quad H(s) = 1. \text{ Dla jakich wartości } T_1 > 0 \text{ układ jest stabilny.}$$

5.6. Określić zapas fazy i zapas wzmocnienia układu z zadania 5.4 dla $k = 0,5$.

5.7. Stosując kryterium Nyquista określić przedział zmian opóźnienia τ w którym podany układ jest stabilny.



5.8. Stosując kryterium logarytmiczne, zbadać stabilność podanego układu.



5.9. Transmitancja układu otwartego ma następującą postać:

$$G_o(s) = \frac{0,5s}{(s^2 + 1)(100s + 1)}$$

5.10. Narysować trajektorię układu otwartego i wyznaczyć asymptoty w punktach nieciągłości. Określić stabilność układu zamkniętego na podstawie kryterium Nyquista. Wyniki porównać z przykładem 5.11.

5.11. Transmitancja układu otwartego ma następującą postać:

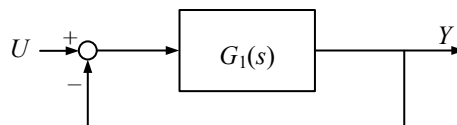
$$G_o(s) = \frac{k(10s+1)}{s^2(s+1)(2s+1)(5s+1)}$$

Narysować charakterystykę amplitudowo-fazową transmitancji $G_o(s)$ dla $k = 1$. Określić przedział zmienności k , dla którego układ zamknięty jest stabilny.

5.12. Transformata odpowiedzi podanego układu na skok jednostkowy jest następująca:

$$Y_1(s) = \frac{s+2}{s^3 + s^2 + 0,5s}$$

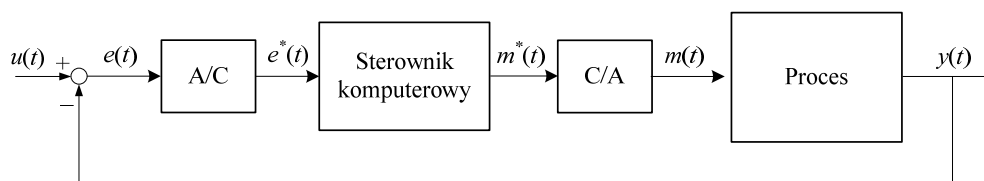
Sprawdzić: - czy jest to układ stabilny? – czy układ otwarty jest stabilny?



6. LINIOWE SYSTEMY DYSKRETNE

6.1. Wprowadzenie

Pojęcie systemu dyskretnego łączy się ze sterowaniem komputerowym i jest związane z dyskretnym w czasie i w poziomie przetwarzaniem danych we współczesnych procesorach cyfrowych. Tego typu układy zazwyczaj współpracują z układami ciągłymi. W takim przypadku na granicach obu typów układów występują urządzenia zapewniające przetwarzanie sygnałów ciągłych (analogowych) na postać dyskretną (cyfrową²²) (A/C) oraz sygnałów dyskretnych na postać ciągłą (C/A). Struktura typowego układu sterowania komputerowego (cyfrowego) jest pokazana na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Struktura typowego komputerowego układu sterowania

Wielkości oznaczone gwiazdką: $e^*(t)$ oraz $m^*(t)$ należy rozpatrywać jako funkcje czasu ciągłego, przy czym ich wartości mogą być różne od zera tylko w ściśle określonych jednostkach czasu zwanych okresami impulsowania – są to zatem sygnały ciągłe. Także pozostałe oznaczenia na rys. 6.1 odnoszą się do sygnałów ciągłych.

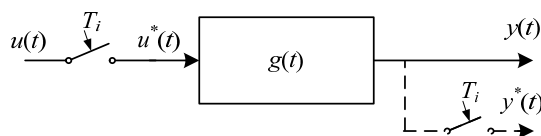
Przetwornik A/C realizuje dwie funkcje:

- próbkowanie (zamiana czasu ciągłego na dyskretny);
- kodowanie (zamiana ciągłej wartości chwilowej amplitudy na postać cyfrową).

Podstawowym elementem układu próbkującego jest impulsator, który w określonych odcinkach czasu wyznacza wartość sygnału wejściowego (rys. 6.2). Impulsowanie odbywa się zazwyczaj ze stałą częstotliwością f_i wyznaczoną przez okres T_i : $f_i = 1/T_i$. Umieszczenie impulsatora na wyjściu układu z rys. 6.2 podkreśla fakt, że jego

²² Sygnał dyskretny oznacza funkcję względem dyskretnego czasu. Funkcja odpowiadająca sygnałowi cyfrowemu przyjmuje także dyskretnie wartości (dyskretyzacja w poziomie).

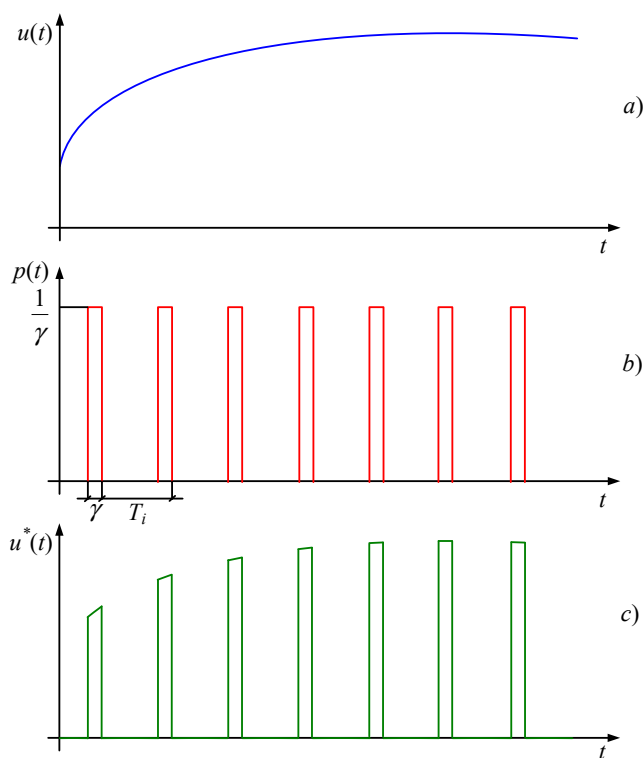
analiza może być prowadzona w zakresie wartości dyskretnych (wejście $u^*(t)$, wyjście $y^*(t)$) lub ciągłych (wejście $u(t)$, wyjście $y(t)$). W pierwszym przypadku także funkcja wagi $g(t)$, reprezentująca układ ciągły, powinna być zapisana w postaci dyskretniej.



Rys. 6.2. Struktura układu dyskretnego

Operacja impulsowania jest ilustrowana na rys. 6.3. Jak widać, jest ona równoważna procesowi modulacji, w którym sygnał $u_p^*(t) = u^*(t)$, powstaje w wyniku mnożenia sygnału $u(t)$, przez sygnał próbkujący $p(t)$:

$$u_p^*(t) = p(t)u(t) \quad (6.1)$$



Rys. 6.3. Operacja impulsowania sygnału ciągłego

Funkcja próbkująca $p(t)$ może być przedstawiona w postaci następującego zespolonego szeregu Fouriera:

$$p(t) = \frac{1}{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_i t} \quad (6.2)$$

gdzie: $\omega_i = 2\pi/T_i$,

$$C_n = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} p(t) e^{jn\omega_i t} dt = \frac{1}{T_i} \frac{\sin(n\omega_i \gamma/2)}{n\omega_i \gamma/2} e^{-jn\omega_i \gamma/2}.$$

W wyniku próbkowania funkcji ciągłej, uzyskuje się jej postać dyskretną, którą można przedstawić za pomocą następującego zespolonego szeregu Fouriera:

$$u_p^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n u(t) e^{jn\omega_i t} \quad (6.3)$$

6.2. Przekształcenie Z

W przypadku analizy teoretycznej wygodnie jest przyjąć, że sygnał próbkujący ma cechy sygnału impulsowego powtarzającego się wzdłuż całej osi czasu z okresem T_i :

$$p(t)|_{\gamma \rightarrow 0} = \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_i) \quad (6.4)$$

Wówczas, operacja próbkowania (6.1) przyjmuje następującą postać [25, 46]:

$$u^*(t) = \delta_T(t) u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_i) u(t) \quad (6.5)$$

W przypadku, gdy funkcja $u(t)$ jest różna od zera tylko dla dodatnich wartości czasu: $u(t) = 0$ dla $t < 0$, zapis procesu próbkowania sprowadzi się do następującej relacji:

$$u^*(t) = \begin{cases} u(kT_i) & \text{dla } t = kT_i \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_i) \delta(t - kT_i) \quad (6.6)$$

Na podstawie właściwości przekształcenia Laplace'a otrzymamy następującą postać transformaty sygnału dyskretnego:

$$\begin{aligned} U^*(s) &= \mathcal{L}\{u^*(t)\} = u(0)\mathcal{L}\{\delta(t)\} + u(T_i)\mathcal{L}\{\delta(t - T_i)\} + u(2T_i)\mathcal{L}\{\delta(t - 2T_i)\} + \dots \\ &= u(0) + u(T_i)e^{-T_i s} + u(2T_i)e^{-2T_i s} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_i)e^{-kT_i s} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Operowanie transformatą $U^*(s)$ sygnału dyskretnego $u(kT_i)$ w postaci sumy szeregu trygonometrycznego (6.7) naraża na wiele kłopotów obliczeniowych. Podstawienie:

$$z = e^{T_i s} \quad (6.8)$$

sprowadza transformatę (6.7) do algebraicznej postaci szeregu potęgowego:

$$U(z) = U^*(s) \Big|_{s=(1/T_i)\ln(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_i) z^{-k} \quad (6.9)$$

Funkcja $U(z)$ jest transformatą Z sygnału $u^*(t)$: $U(z) = Z\{U^*(s)\}$, w którym bierze się pod uwagę tylko dyskretne wartości funkcji - jest to więc dyskretny ekwiwalent jej transformaty Laplace'a. Dla nieujemnych wartości indeksu k mamy do czynienia z transformatą jednostronną, która odnosi się do systemów przyczynowych. Dalsze rozważania odnoszą się tylko do takich właśnie systemów. Właściwości tego przekształcenia można łatwo dostrzec, zapisując zależność (6.9) w postaci rozwiniętej:

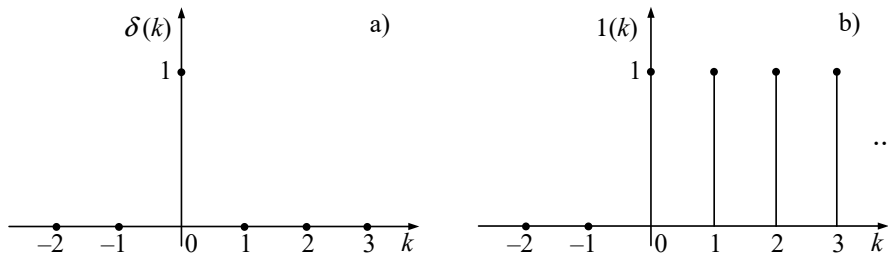
$$U(z) = u(0) + u(T_i)z^{-1} + u(2T_i)z^{-2} + \dots = u_0 + u_1z^{-1} + u_2z^{-2} + \dots \quad (6.10)$$

Jak widać, do określenia transformaty Z badanego sygnału wystarczy znać wartości jego reprezentacji dyskretnej (wartości kolejnych próbek sygnału). W istocie zależności (6.9) oraz (6.10) podają nieco różne definicje przekształcenia Z . Pierwsza z nich nawiązuje do oryginalnego sygnału jako funkcji czasu $u(t)$, który po spróbkowaniu jest reprezentowany funkcją czasu ciągłego $u^*(t)$. Transformata Laplace'a tego sygnału: $U^*(s)$ prowadzi bezpośrednio do transformaty Z po podstawieniu (6.8). W zapisie (6.10) nie ma bezpośredniego powiązania z czasem, czy też z przekształceniem Laplace'a (prawa część zależności (6.10)): transformata Z jest tu szeregiem potęgowym zmiennej $1/z$ o współczynnikach danych w postaci uporządkowanego ciągu $\{u_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Obie definicje prowadzą do równoważnej funkcji zmiennej zespolonej z (transformaty Z), która może mieć różne interpretacje fizyczne.

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych również do analizy systemów dyskretnych wygodnie jest korzystać z dyskretnych odpowiedników standardowych funkcji testujących. Odpowiednikiem impulsu Diraca $\delta(t)$ (2.11) jest dyskretny impuls Diraca (rys. 6.4a):

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases} \quad (6.11)$$

Zauważmy, że $\delta(k - m) = 1$ dla $k = m$ oraz $\delta(k - m) = 0$ w każdym innym przypadku.



Rys. 6.4. Dyskretny impuls (a) oraz dyskretny skok jednostkowy (b)

Przykład 6.1. Określić transformatę Z dyskretnego impulsu Diraca.

Stosując bezpośrednio definicję (6.10) w odniesieniu do funkcji (6.11), otrzymamy:

$$U(z) = Z\{\delta(k)\} = u_0 = 1$$

Podobny wynik otrzymamy na podstawie (6.9):

$$U(z) = U^*(s) = \mathcal{L}\{u^*(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

W tym przypadku rozpatrywana funkcja ciągła jest impulsem Diraca.

Funkcja dyskretnego skoku jednostkowego $1(k)$ jest definiowana jako ciąg jedynek dla $k \geq 0$ (rys. 6.4b):

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k \geq 0 \\ 0 & \text{dla } k < 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

co jest równoważne rezultatowi próbkowania ciągłego skoku jednostkowego: $1(k) = 1(t)\delta(t - kT_i)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Uzyskanie zwartej postaci nieskończonego szeregu względem zmiennej $1/z$ może być niekiedy prostym zabiegiem, co pokazują kolejne przykłady.

Przykład 6.2. Określić transformatę Z funkcji dyskretnej odpowiadającej skokowi jednostkowemu.

W tym przypadku wszystkie współczynniki szeregu definiującego przekształcenie (6.10) są równe 1:

$$U(z) = Z\{1(k)\} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Warunkiem zbieżności tego szeregu jest $|z| > 1$.

Przykład 6.3. Określić transformatę Z dyskretnej funkcji: $f(kT_i) = e^{-akT_i}$, $k \geq 0$.

Współczynniki szeregu (6.10) są określone przez kolejne wartości funkcji $f(kT_i)$. Wobec tego:

$$F(z) = Z\{f(kT_i)\} = Z\{e^{-akT_i}\} = 1 + e^{-aT_i} z^{-1} + e^{-2aT_i} z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kaT_i} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-aT_i} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_i}}$$

dla $|z| > |e^{-aT_i}|$.

Zauważmy, że w powyższym przykładzie $f(kT_i) = e^{-akT_i} \neq 0$ dla $k < 0$, więc dla uniknięcia nieporozumień co do warunku jednostronnego przekształcenia Z należy uzupełnić zapis transformowanej funkcji o dyskretny skok jednostkowy:

$$F(z) = Z\{e^{-kaT_i} 1(kT_i)\} = \frac{z}{z - e^{-aT_i}}$$

W bardziej złożonych przypadkach można się posłużyć właściwościami przekształcenia Z, które są definiowane w postaci odpowiednich twierdzeń analizy matematycznej odnoszących się do zespolonych funkcji liniowych. Niektóre z nich są przedstawione w Tabeli 6.1.

Tabela 6.1. Podstawowe właściwości przekształcenia Z

liniowość: $Z\{\alpha p(kT_i) + \beta q(kT_i)\} = \alpha Z\{p(kT_i)\} + \beta Z\{q(kT_i)\}$ oraz: $Z^{-1}\{\alpha P(z) + \beta Q(z)\} = \alpha Z^{-1}\{P(z)\} + \beta Z^{-1}\{Q(z)\}$
przesunięcie w dziedzinie czasu: $Z\{f(kT_i - pT_i)\} = z^{-p} F(z)$ - opóźnienie $Z\{f(kT_i + pT_i)\} = z^p F(z) + z^{1-p} f(-1) + z^{2-p} f(-2) + \dots + f(-p)$ - z warunkami początkowymi: $Z\{f(kT_i + pT_i)\} = z^p F(z) - \sum_{k=0}^{p-1} f(kT_i) z^{p-k}$ - wyprzedzenie $Z\{f(kT_i + T_i)\} = z(F(z) - f(0))$, $Z\{f(kT_i + pT_i)\} = z^p F(z) - z^p f(0) - z^{p-1} f(1) - \dots - z f(p-1)$
wartość graniczna (jeśli $f(\infty)$ istnieje): $\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_i) = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)F(z))$ wartość początkowa (jeśli istnieje $\lim_{z \rightarrow \infty} (F(z))$): $\lim_{k \rightarrow 0} f(kT_i) = \lim_{z \rightarrow \infty} (F(z))$
skalowanie w czasie: $Z\{a^{kT_i} f(kT_i)\} = F(a^{-T_i} z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_i) (a^{-T_i} z)^k$
mnożenie przez k lub kT_i – różniczkowanie w dziedzinie z : $Z\{k f(kT_i)\} = -z \frac{dF(z)}{dz}$, $Z\{kT_i f(kT_i)\} = -T_i z \frac{dF(z)}{dz}$
splot: $Z\{f(kT_i) \otimes g(kT_i)\} = Z\{f(kT_i) \otimes g(kT_i)\} = Z\left\{\sum_{n=0}^{\infty} f(nT_i) g(kT_i - nT_i)\right\} = F(z) \cdot G(z)$
transmitancja: $G(z) = Z\{g(kT_i)\} = \frac{Y(z)}{U(z)}$

W wielu przypadkach zamiast ciągłej funkcji czasu znana jest transmitancja Laplace'a analizowanego sygnału. W celu określenia transformaty Z tego sygnału poddanego próbkowaniu można zastosować następujące przetwarzanie:

$$F(s) \Rightarrow f(t) \Rightarrow f(kT_i) \Rightarrow F(z)$$

Procedurę tę można wykonać bezpośrednio, stosując zależność (3.31). W odniesieniu do dyskretnego czasu ma ona następującą formę:

$$f(kT_i) = \sum_{k=1}^P (s - s_k) F(s) e^{skT_i} \Big|_{s=s_k} \quad (6.13)$$

gdzie P – liczba biegunów (pojedynczych) transformaty $F(s)$.

Poddając (6.13) transformacji Z, otrzymamy:

$$F(z) = Z\{f(kT_i)\} = \sum_{k=1}^P \operatorname{res}_{s=s_k} \left\{ F(s) \frac{z}{z - e^{sT_i}} \right\} = \sum_{k=1}^P (s - s_k) F(s) \frac{z}{z - e^{sT_i}} \Big|_{s=s_k} \quad (6.14)$$

przy czym $Z\{e^{s_k T_i}\} = \frac{z}{z - e^{s_k T_i}}$ (Tabela 6.2).

W przypadku, gdy transformata $F(s)$ ma bieguny wielokrotne, należy zastosować odpowiednią procedurę jej rozkładu na ułamki proste (3.33). W przypadku ogólnym otrzymujemy następujący związek (patrz Tabela 6.2 dla $Z\left\{\frac{(kT_i)^n}{n} \cdot 1(kT_i)\right\}$):

$$F(z) = Z\{f(kT_i)\} = \sum_{m=1}^P \sum_{j=1}^{l_m} \frac{(-1)^{l_m-j} A_{mj}}{(l_m - j)!} \left[\frac{d^{l_m-j}}{ds^{l_m-j}} \left(\frac{1}{1 - e^{-sT_i}} \right) \right] \Big|_{s=s_m} \Big|_{e^{sT_i}=z} \quad (6.15)$$

gdzie:

$$A_{mj} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left((s - s_m)^{l_m} F(s) \right) \right] \Big|_{s=s_m}, \quad (6.16)$$

P – liczba różnych biegunów funkcji $F(s)$, l_m – krotność m -tego bieguna.

Przykład 6.4. Transformata Laplace’a sygnału ciągłego jest następująca (przykład 3.8):

$$F(s) = \frac{s+2}{s^3 + 4s^2 + 3s}.$$

Jest on próbkowany z okresem $T_i = 1$ s. Określić transformatę Z sygnału dyskretnego.

Pierwiastki mianownika transformaty $F(s)$ są następujące: $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, $s_3 = -3$. A zatem:

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}.$$

Zgodnie z (6.14) otrzymamy:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \frac{z}{z - e^{sT_i}} \Big|_{s=0} + \frac{s+2}{s(s+3)} \frac{z}{z - e^{sT_i}} \Big|_{s=-1} + \frac{s+2}{s(s+1)} \frac{z}{z - e^{sT_i}} \Big|_{s=-3} \\ &= \frac{2}{3} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{-T_i}} - \frac{1}{6} \frac{z}{z - e^{-3T_i}} \end{aligned}$$

Na podstawie tablicy transformat (Tabela 6.2) łatwo określić postać czasową sygnału.

Przykład 6.5. Transformata Laplace’a sygnału ciągłego jest następująca:

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}.$$

Jest on próbkowany z okresem $T_i = 0,1$ s. Określić transformatę Z sygnału dyskretnego.

Pierwiastki mianownika transformaty $F(s)$ są następujące: $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = -2$. Do obliczenia transformaty Z zastosujemy zależność (6.15). Transmitancja $F(s)$ ma $P = 2$ różne bieguny, zatem:

$$F(z) = \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{l_m} \frac{(-T_i)^{l_m-j} A_{mj}}{(l_m-j)!} \left[\frac{d^{l_m-j}}{ds^{l_m-j}} \left(\frac{1}{1-e^{-sT_i}} \right) \right] \Bigg|_{s=s_m} \Bigg|_{e^{sT_i}=z}, \text{ gdzie: } l_1 = 2, l_2 = 1, \text{ przy czym:}$$

$$A_{11} = \left[(s-0)^2 \frac{1}{s^2(s+2)} \right] \Bigg|_{s=0} = \frac{1}{2}, \quad A_{12} = \left[\frac{d}{ds} \left((s-0)^2 \frac{1}{s^2(s+2)} \right) \right] \Bigg|_{s=0} = \frac{-1}{(s+2)^2} \Bigg|_{s=0} = -\frac{1}{4},$$

$$A_2 = \left[(s+2) \frac{1}{s^2(s+2)} \right] \Bigg|_{s=-2} = \frac{1}{4}.$$

Ponadto dla podwójnego bieguna należy obliczyć (z uwzględnieniem T_i):

$$(-T_i)^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{1-e^{-sT_i}} \right) \Bigg|_{s=s_0} \Bigg|_{e^{sT_i}=z} = \frac{T_i e^{-sT_i}}{(1-e^{-sT_i})^2} \Bigg|_{e^{sT_i}=z} = \frac{T_i z}{(z-1)^2}.$$

Można więc już obliczyć wszystkie składniki transformaty $F(z)$:

$$F(z) = \left[\frac{1}{2} \frac{T e^{-sT_i}}{(1-e^{-sT_i})^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{1-e^{-sT_i}} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-e^{-sT_i} e^{-2T_i}} \right] \Bigg|_{e^{sT_i}=z} = \frac{1}{4} \left(\frac{2T_i z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-2T_i}} \right)$$

$$= \frac{z(z(2T_i + e^{-2T_i}) - 2T_i e^{-2T_i} - e^{-2T_i} + 1)}{4(z-1)^2(z-e^{-2T_i})} = \frac{0,0187z(z+0,9355)}{4(z-1)^2(z-0,8187)}$$

Należy podkreślić, że warunkiem istnienia transformaty Z określonego ciągu $f(kT_i)$ jest zbieżność szeregu (6.10). Łatwo zauważyć, że skończona wartość tego szeregu zależy zarówno od charakteru sygnału dyskretnego, jak i od wartości zmiennej z .

Przykład 6.6. Określić obszar zbieżności transformaty Z dyskretnej funkcji wykładniczej: $f(kT_i) = a^k 1(kT_i)$.

Na podstawie (6.10), dla rozpatrywanego sygnału wykładniczego otrzymamy:

$$F(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$$

Suma tego szeregu geometrycznego jest równa:

$$F(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \text{ przy czym: } |az^{-1}| < 1, \text{ skąd: } |z| > |a|.$$

Tabela 6.2. Transformaty Z wybranych funkcji

ciągła funkcja czasu $f(t)$	dyskretna funkcja czasu $f(kT_i)$	transformata Z
$\delta(t)$	$\delta(kT_i)$	1
$1(t)$	$1(kT_i)$	$\frac{z}{z-1}$
$t1(t)$	$kT_i \cdot 1(kT_i)$	$\frac{T_i z}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}1(t)$	$\frac{(kT_i)^2}{2} \cdot 1(kT_i)$	$\frac{T_i^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{t^n}{n}1(t)$	$\frac{(kT_i)^n}{n} \cdot 1(kT_i)$	$\frac{(-T_i)^n}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{z}{z-e^x} \right)$
$a^t 1(t)$	$a^k \cdot 1(kT_i)$	$\frac{z}{z-a}, z > a $
$e^{-at}, a \geq 0$	$e^{-akT_i} \cdot 1(kT_i)$	$\frac{z}{z-e^{-aT_i}}$
te^{-at}	$kT_i e^{-akT_i}$	$\frac{T_i z e^{-aT_i}}{(z-e^{-aT_i})^2}$
$\sin at$	$\sin akT_i$	$\frac{z \sin aT_i}{z^2 - 2z \cos aT_i + 1}$
$\cos at$	$\cos akT_i$	$\frac{z(z - \cos aT_i)}{z^2 - 2z \cos aT_i + 1}$

Właściwości częstotliwościowe transformaty Z można badać za pomocą (6.8):

$$z = e^{T_i s} = e^{T_i(\sigma + j\omega)} = r e^{j\omega T_i} \quad (6.17)$$

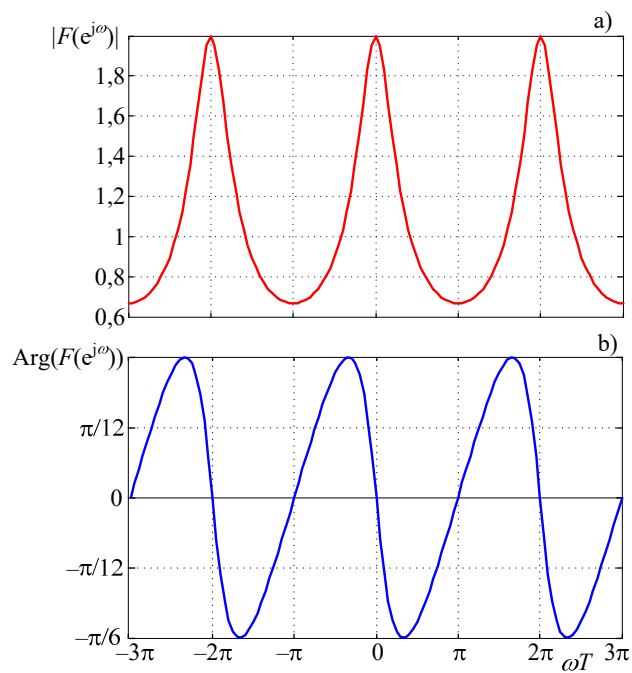
Jeśli założyć, że $r = 1$ ($\sigma = 0$), to właściwości częstotliwościowe przekształcenia Z nie różnią się od podobnych właściwości przekształcenia Fouriera rozpatrywanej funkcji dyskretnej. W przypadku transformaty funkcji wykładniczej, która jest analizowana w przykładzie 6.6, otrzymamy:

$$F(j\omega) = F(e^{j\omega}) = \frac{z}{z-a} \bigg|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega T_i}}{e^{j\omega T_i} - a} = \frac{\cos \omega T_i + j \sin \omega T_i}{\cos \omega T_i - a + j \sin \omega T_i}$$

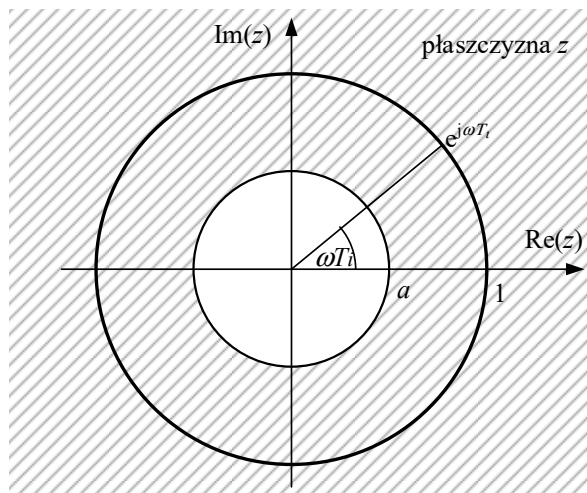
Charakterystyki amplitudy i fazy tej funkcji dla $a = 1/2$, $T_i = 1$ są pokazane na rys. 6.5.

Oznaczenie $F(e^{j\omega})$ przyjęto stosować w odniesieniu do charakterystyki częstotliwościowej sygnału (systemu) dyskretnego. Obszar zbieżności transformaty Z rozpatrywanego sygnału wykładniczego jest pokazany na rys. 6.6 (zakresowany obszar).

Zaznaczono tam także okrąg jednostkowy, który odpowiada położeniom wektora $e^{j\omega T_i}$ przy zmianie pulsacji.



Rys. 6.5. Charakterystyka amplitudowa (a) i fazowa (b) transformaty funkcji $f(kT_i) = a^k 1(kT_i)$



Rys. 6.6. Obszar zbieżności na płaszczyźnie z

Na podstawie rys. 6.5. oraz rys. 6.6 widać, że charakterystyki częstotliwościowe transformaty Z są funkcjami okresowymi. Długość okresu tych funkcji względem pulsacji ω zależy od okresu próbkowania i wynosi $2\pi/T_i$.

6.3. Odwrotna transformata Z

Operacja odwrotna do (6.9) definiuje odwrotne przekształcenie Z:

$$u(kT_i) = Z^{-1}\{U(z)\} \quad (6.18)$$

co oznacza wyznaczenie współczynników szeregu (6.10). W prostych przypadkach jest to możliwe na podstawie elementarnych właściwości przekształcenia Z.

Przykład 6.7. Obliczyć odwrotną transformatę Z następującej funkcji:

$$U(z) = \frac{5}{z(z-0,5)}. \text{ Okres próbkowania } T_i = 1\text{ s.}$$

Podaną transformatę $U(z)$ można przekształcić do postaci:

$$U(z) = \frac{5}{z(z-0,5)} = \frac{5z}{z^2(z-0,5)} = 5z^{-2}U_1(z), \text{ gdzie } U_1(z) = \frac{z}{z-0,5}.$$

Widać, że funkcja $U_1(z)$ jest transformatą Z dyskretnej funkcji wykładniczej (przykład 6.3),

przy czym: $e^{-aT_i} = 0,5$, skąd, dla podanej wartości $T_i = 1$, otrzymamy: $a = 0,693$.

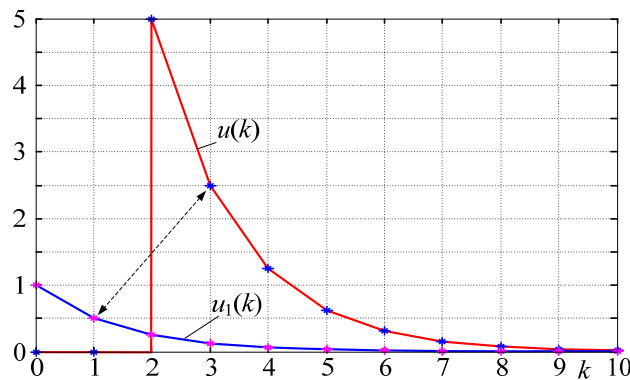
Na podstawie rezultatu z przykładu 6.3 łatwo zauważyć, że:

$$Z^{-1}\{U_1(z)\} = u_1(kT_i) = e^{-akT_i} = e^{-0,693k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Transformata $U(z)$ różni się od transformaty $U_1(z)$ czynnikiem $5z^{-2}$, co oznacza, że rozpatrywany sygnał $u(kT_i)$ jest opóźniony o dwie próbki w stosunku do $u_1(kT_i)$, a jego amplituda jest pięciokrotnie większa:

$$u(kT_i) = Z^{-1}\{U(z)\} = Z^{-1}\{5z^{-2}U_1(z)\} = 5u_1((k-2)T_i) = 5e^{-0,693(k-2)} \cdot 1(k-2), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Przebieg tej funkcji jest pokazany na rys. 6.7.



Rys. 6.7. Przebieg uzyskanych funkcji dyskretnych

Pokazane funkcje są obliczane dla $k = 0, 1, 2, \dots$, co daje następujące wartości: $u(0) = 5e^{0,693 \cdot 2} \cdot 1(-2) = 0$, $u(1) = 0$, $u(2) = 5$, $\dots$. Linia przerywaną zaznaczono przesunięcie wartości funkcji $u(kT_i)$ względem funkcji $u_1(kT_i)$.

Powyższa metoda obliczania transformaty odwrotnej niekiedy jest nazywana metodą przegłądania, gdy w transformacie szuka się znanych, prostych reguł.

Do obliczania prostego i odwrotnego przekształcenia Z niezbyt złożonych funkcji można posługiwać się tablicą transformat (Tabela 6.2). Istnieją jednak bardziej ogólne metody obliczania odwrotnej transformaty Z . Szczegółowe procedury zależą od postaci, w której może być przedstawiona analizowana transformata $F(z)$.

6.3.3. Rozkład transformaty w szereg potęgowy

Współczynniki $f(kT_i)$ tworzące funkcję dyskretną, która ma transformatę $F(z)$ w postaci funkcji wymiernej, można określić przez rozkład tej transformaty w szereg potęgowy (Taylora) względem zmiennej z^{-1} . W tym celu wygodnie jest przedstawić transformatę $F(z)$ jako iloraz wielomianów względem zmiennej z^{-1} , co pozwala określić poszukiwany szereg przez bezpośrednie dzielenie wielomianu licznika przez wielomian mianownika:

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} = f(0) + f(T_i)z^{-1} + f(2T_i)z^{-2} + \dots \quad (6.19)$$

Przykład 6.8. Obliczyć odwrotną transformatę Z następującej funkcji:

$$F(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + 2z + 3}. \text{ Okres próbkowania } T_i = 1s.$$

Wykonamy dzielenie wielomianu licznika przez wielomian mianownika:

$$\begin{array}{r} 1 - z^{-1} - z^{-2} + 5z^{-3} + \dots \\ \hline z^2 + z \quad : \quad z^2 + 2z + 3 \\ \hline -z^2 - 2z - 3 \\ \hline -z - 3 \\ \hline z + 2 + 3z^{-1} \\ \hline -1 + 3z^{-1} \\ \hline 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \\ \hline 5z^{-1} + 3z^{-2} \\ \hline -5z^{-1} - 10z^{-2} - 15z^{-3} \\ \hline -7z^{-2} - 15z^{-3} \dots \end{array}$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$F(z) = 1 - z^{-1} - z^{-2} + 5z^{-3} + \dots = f(0) \cdot 1 + f(T_i)z^{-1} + f(2T_i)z^{-2} + f(3T_i)z^{-3} + \dots$$

skąd: $f(0) = 1$, $f(T_i) = -1$, $f(2T_i) = -1$, $f(3T_i) = 5$, ...

Reguła dzielenia wielomianów pozwala sformułować następującą rekurencyjną zależność do określania kolejnych współczynników rozkładu (6.19):

$$\begin{aligned} f(0) &= b_0 / a_0 \\ f(T_i) &= (b_1 - f(0)a_1) / a_0 \\ f(2T_i) &= (b_2 - f(T_i)a_1 - f(0)a_2) / a_0 \\ &\vdots \\ f(kT_i) &= (b_k - f((k-1)T_i)a_1 - f((k-2)T_i)a_2 - \dots - f(0)a_k) / a_0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Można sprawdzić, że zależność (6.20) prowadzi do tego samego ciągu, jak obliczony w przykładzie 6.8 metodą dzielenia wielomianów. Do określenia wartości $f(0)$ można także zastosować twierdzenie o wartości początkowej (Tabela 6.1):

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT_i) = \lim_{z \rightarrow \infty} (F(z)) \quad (6.21)$$

6.3.4. Rozkład transformaty na ułamki proste

Metoda rozkładu transformaty w szereg potęgowy pozwala łatwo obliczyć liczbowe wartości próbek sygnału dyskretnego, jednak określenie na tej podstawie jego postaci analitycznej może nie być proste. Załóżmy, że $F(z)$ w (6.19) jest funkcją wymierną ściśle przyczynową, co oznacza: $N > M$ [27]. Jeśli $N = M$, to w wyniku dzielenia wielomianu licznika przez wielomian mianownika uzyska się sumę składnika stałego z funkcją ściśle przyczynową. Możemy zatem ograniczyć rozważania do transformaty (6.19), która jest funkcją ściśle przyczynową. Na podstawie (6.19) otrzymamy:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \dots + b_M z^{N-M-1}}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} \quad (6.22)$$

Transformata $F(z)$ ma więc N biegunów, co prowadzi do następującej postaci (6.22):

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \dots + b_M z^{N-M-1}}{a_0 (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} = \quad (6.23)$$

Jeśli wszystkie **bieguny są pojedyncze**, to możemy napisać:

$$\frac{a_0 F(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_N}{z - p_N} \quad (6.24)$$

lub:

$$F(z) = \frac{A_1}{a_0} \frac{z}{z - p_1} + \frac{A_2}{a_0} \frac{z}{z - p_2} + \dots + \frac{A_N}{a_0} \frac{z}{z - p_N}, \quad (6.25)$$

skąd:

$$f(kT_i) = \frac{A_1}{a_0}(p_1)^k + \frac{A_2}{a_0}(p_2)^k + \dots + \frac{A_N}{a_0}(p_N)^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.26)$$

Przykład 6.9. Stosując metodę rozkładu na ułamki proste obliczyć odwrotną transformatę Z funkcji z przykładu 6.8: $F(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + 2z + 3}$. Okres próbkowania $T_i = 1$ s.

Mianownik funkcji $F(z)$ ma następujące pierwiastki:

$$p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2} = \sqrt{3}e^{\pm j\phi_0} = re^{\pm j\phi_0}, \quad \text{gdzie: } r = \sqrt{3}, \quad \phi_0 = \pi - \arctg\sqrt{2}.$$

Na podstawie (6.24) można napisać ($a_0 = 1$):

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} = \frac{z + 1}{z^2 + 2z + 3} = \frac{z + 1}{(z - p_1)(z - p_2)},$$

skąd:

$$A_1(z - p_2) + A_2(z - p_1) = z + 1.$$

Przyrównując współczynniki stojące przy tych samych potęgach zmiennej z , otrzymamy następujący układ równań:

$$A_1 + A_2 = 1$$

$$A_1 - A_2 = 0$$

a więc: $A_1 = A_2 = 1/2$.

Rozpatrywana transformata przyjmuje więc następującą postać (6.25):

$$F(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - p_1} + \frac{z}{z - p_2} \right)$$

Dyskretna funkcja czasu jest zatem złożona z dwóch funkcji potęgowych, co daje następującą jej postać:

$$f(kT_i) = \frac{1}{2} \left((p_1)^k + (p_2)^k \right) = \frac{(\sqrt{3})^k}{2} (e^{j\phi_0 k} + e^{-j\phi_0 k}) = r^k \cos(\phi_0 k).$$

Otrzymaliśmy zwartą analityczną postać funkcji dyskretniej, której początkowe wartości są następujące: $f(0) = 1$, $f(T_i) = -1$, $f(2T_i) = -1$, $f(3T_i) = 5$, ..., a więc takie same, jakie otrzymaliśmy w przykładzie 6.8.

Uzyskany ciąg $f(kT_i)$ dla podanych wartości transformaty $F(z)$ jest oscylacyjnie rozbieżny. Obszar zbieżności jest określony przez warunek: $|z| > |r|$, co w tym przypadku oznacza, że moduł biegunów transmitancji (oba mają ten sam moduł) musi być mniejszy od jedności.

W przypadku **biegunów wielokrotnych** możemy stosować zależności przedstawione w p. 3.2.3. Transformatę $F(z)$ reprezentowaną w postaci funkcji wymiernej można rozłożyć na składniki:

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) \dots \quad (6.27)$$

tak, że $F_1(z)$ ma jeden l_1 -krotny biegun p_1 :

$$F_1(z) = \frac{F_{11}(z)}{(z - p_1)^{l_1}} \quad (6.28)$$

Rozkład transformaty $F(z)$ na ułamki proste jest następujący:

$$F(z) = \frac{A_{11}}{z - p_1} + \dots + \frac{A_{1(l_1-1)}}{(z - p_1)^{l_1-1}} + \frac{A_{1l_1}}{(z - p_1)^{l_1}} + \frac{A_2}{z - p_2} + \frac{A_3}{z - p_3} + \dots \quad (6.29)$$

gdzie $p_2, p_3, \dots$ są prostymi (jednokrotnymi) biegunami transformaty $F(z)$.

Ogólna formuła na obliczanie współczynników rozkładu w przypadku wielokrotnych pierwiastków mianownika transformaty jest następująca:

$$A_{1(l_1-r)} = \left(\frac{1}{r!} \frac{d^r}{dz^r} \left((z - p_1)^{l_1} F_1(z) \right) \right)_{z=p_1}, \quad r = 0, 1, \dots, l_1-1, \quad (6.30)$$

gdzie $(z - p_1)^{l_1} F_1(z) = F_{11}(z)$.

Przykład 6.10. Stosując metodę rozkładu na ułamki proste obliczyć odwrotną transformatę Z funkcji: $Y(z) = \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(z - 1)^2}$. Okres próbkowania $T_i = 1$ s.

Widać, że pierwiastki mianownika transformaty są następujące: $p_1 = 1, p_2 = -1$. Funkcję $Y(z)$ zapisujemy w postaci (6.28):

$$Y(z) = \frac{Y_1(z)}{(z - 1)^2}, \text{ gdzie } Y_1(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1}.$$

Współczynniki rozkładu na ułamki proste, związane z podwójnym pierwiastkiem są następujące:

$$A_{11} = \left. \frac{d}{dz} \frac{z^2 + 1}{z + 1} \right|_{z=1} = \left. \frac{2z(z + 1) - (z^2 + 1)}{(z + 1)^2} \right|_{z=1} = \frac{1}{2}, \quad A_{12} = \left. \frac{z^2 + 1}{z + 1} \right|_{z=1} = 1.$$

Na podstawie (6.32) otrzymamy:

$$Y(z) = \frac{1}{(z - 1)^2} + \frac{1/2}{z - 1} + \frac{A_2}{z + 1}.$$

Współczynnik A_2 powinien spełniać warunek równości otrzymanej sumy ułamków z pierwotną transmitancją, co oznacza równość ich liczników:

$$1 \cdot (z + 1) + \frac{1}{2} (z - 1)(z + 1) + (z - 1)^2 A_2 = z^2 + 1,$$

skąd: $A_2 = 1/2$.

Ostateczna postać transformaty:

$$Y(z) = \frac{1}{(z - 1)^2} + \frac{1/2}{z - 1} + \frac{1/2}{z + 1}.$$

W celu określenia odwrotnego przekształcenia Z można ten zapis przekształcić do następującej postaci:

$$Y(z) = z^{-1} \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{1}{2} z^{-1} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} z^{-1} \frac{z}{z+1}.$$

Można już napisać postać czasową funkcji, pamiętając, że: $z^{-1}F(z) \Leftrightarrow f((k-1)T_i)1(kT_i)$:

$$y(kT_i) = (k-1) \cdot 1((k-1)T_i) + \frac{1}{2} 1((k-1)T_i) + \frac{1}{2} (-1)^{k-1} 1((k-1)T_i).$$

6.3.5. Metoda residuów

Ogólna postać odwrotnego przekształcenia Z jest określona za pomocą następującego związku:

$$y(kT_i) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C Y(z) z^{k-1} dz = \sum_{i=1}^P \text{res}_{z=z_i} \{Y(z) z^{k-1}\} \quad (6.31)$$

gdzie: C jest konturem, który obejmuje wszystkie punkty osobliwe transformaty $Y(z) \cdot z^{k-1}$ (zera i bieguny); P jest liczbą biegunów funkcji $Y(z) \cdot z^{k-1}$.

Obowiązują tu podobne zasady jak w odniesieniu do odwrotnego przekształcenia Laplace'a (3.45). Jeśli p_m jest pojedynczym biegunem funkcji $Y(z) \cdot z^{k-1}$, to związany z nim składnik sygnału dyskretnego jest obliczany następująco:

$$y_m(kT_i) = (z - p_m) Y(z) z^{k-1} \Big|_{z=p_m} \quad (6.32)$$

W przypadku, gdy biegun p_n funkcji $Y(z) \cdot z^{k-1}$ jest l -krotny, to odpowiadający mu składnik funkcji dyskretny $y(kT_i)$ oblicza się według następującej zależności:

$$y_n(kT_i) = \frac{1}{(l-1)!} \left(\frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} \left[(z - p_n)^l Y(z) z^{k-1} \right] \right)_{z=p_n} \quad (6.33)$$

Można zauważyć, że rozróżnienie pomiędzy biegunami funkcji $Y(z)$ i $Y(z) \cdot z^{k-1}$ jest istotne tylko dla $k = 0$ (wartość początkowa), gdyż wówczas czynnik z pojawia się w mianowniku, tworząc dodatkowy biegun zerowy funkcji $Y(z)$ ²³. Należy jeszcze rozważyć przypadek gdy funkcja $Y(z)$ ma m - krotny biegun zerowy $m > 1$, na przykład $Y(z) = F(z)/z^2$, $m = 2$, $F(z)$ - funkcja bez bieguna zerowego. Jednak wówczas funkcję $Y(z)$ można przedstawić następująco: $Y(z) = z^{-1} \{F(z)/z\}$, co prowadzi do opóźnienia o $m-1$ próbek dyskretny funkcji czasu, będącej rezultatem transformacji:

$$y(kT_i) = Z^{-1} \left\{ z^{m-1} F(z) / z \right\} = f_1((k-m+1)T_i), \text{ gdzie } f_1(kT_i) = Z^{-1} \{F(z) / z\}.$$

²³ Takie rozróżnienie nie występuje w przypadku określania residuum funkcji ciągłych, gdyż czynnik e^{st} (3.45) nie generuje dodatkowych biegunów.

Ostatecznie poszukiwana odwrotna transformata Z jest sumą składowych sygnału dyskretnego, związanych z poszczególnymi biegunami funkcji $Y(z) \cdot z^{k-1}$:

$$y(kT_i) = \sum_{m=1}^P y_m(kT_i) \quad (6.34)$$

Przykład 6.11. Stosując metodę residuów obliczyć odwrotną transformatę Z funkcji z

przykładu 6.10: $Y(z) = \frac{z^2 + 1}{(z+1)(z-1)^2}$. Okres próbkowania $T_i = 1$ s.

Bieguny transformaty są następujące: $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, przy czym pierwszy jest podwójny. Funkcja dyskretna jest obliczana jako suma dwóch składników:

$$\begin{aligned} y(kT_i) &= (z+1) \frac{z^2+1}{(z+1)(z-1)^2} z^{k-1} \Big|_{z=-1} + \frac{1}{(2-1)!} \left(\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[(z-1)^2 \frac{z^2+1}{(z+1)(z-1)^2} z^{k-1} \right] \right) \Big|_{z=1} \\ &= \frac{z^2+1}{(z-1)^2} z^{k-1} \Big|_{z=-1} + \left(\frac{z^2+2z-1}{(z+1)^2} + (k-1) \frac{z^2+1}{z(z+1)} \right) z^{k-1} \Big|_{z=1} = \left(k - \frac{1}{2} (1 + (-1)^k) \right) 1(k-1) \end{aligned}$$

Ciąg próbek sygnału jest następujący: 0, 1, 1, 3, 3, ...

Widać, że rezultat jest taki sam, jak w przykładzie 6.10.

Przykład 6.12. Stosując metodę dzielenia wielomianów oraz metodę residuów, obliczyć

odwrotną transformatę Z następującej funkcji: $Y(z) = \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2 + z}$.

Okres próbkowania $T_i = 1$ s.

Porównać wyniki z rezultatami obliczeń za pomocą rachunku symbolicznego w programie Matlab.

a) Dzielenie wielomianu licznika przez wielomian mianownika.

$$\begin{array}{r} 2 + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} + \dots \\ 2z^2 + 2z + 1 \quad : \quad z^2 + z \\ \hline -2z^2 - 2z \\ \hline 1 \\ \hline -1 - z^{-1} \\ -z^{-1} \\ \hline z^{-1} + z^{-2} \\ z^{-2} \\ \hline -z^{-2} - z^{-3} \\ -z^{-3} \dots \end{array}$$

a więc: $Y(z) = 2 + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} + \dots$,

skąd otrzymujemy: $Z^{-1}\{Y(z)\} = 2\delta(kT_i) + \delta((k-2)T_i) - \delta((k-3)T_i) + \delta((k-4)T_i) + \dots$,

co można zapisać następująco: $y(kT_i) = 2\delta(kT_i) + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{k-i} \delta((k-i)T_i)$.

Przebieg funkcji $y(kT_i)$ jest pokazany na rys. 6.8.

b) Metoda residuów. Zgodnie z (6.31) napiszemy:

$$y(kT_i) = \sum_{i=1}^P \operatorname{res}_{z=z_i} \{Y(z)z^{k-1}\} = \sum_{i=1}^P \operatorname{res}_{z=z_i} \left\{ \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2 + z} z^{k-1} \right\}.$$

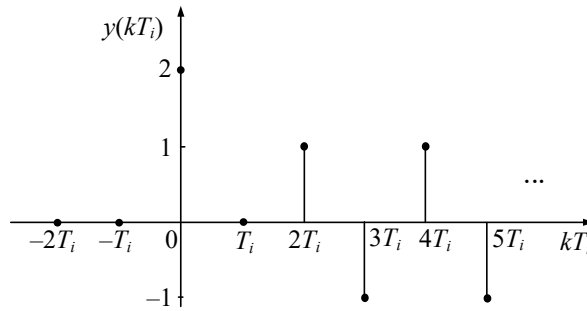
Przy określaniu liczby i wartości biegunów funkcji, dla której są obliczane residua, należy postępować ostrożnie, gdyż dla $k = 0$ (wartość początkowa) w mianowniku tej funkcji pojawia się czynnik z , który zmienia jej postać: $Y(z)z^{k-1}|_{k=0} = Y(z)/z = F(z)$. Obliczanie residuów należy więc rozdzielić na trzy etapy: dla $k = 0$, $k = 1$ oraz $k \geq 2$.

Dla $k = 0$ otrzymamy:

$$y(0) = \sum_{i=1}^P \operatorname{res}_{z=z_i} \left\{ \frac{Y(z)}{z} \right\} = \sum_{i=1}^P \operatorname{res}_{z=z_i} \left\{ \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2(z+1)} \right\}, P = 2, z_1 = 0 \text{ (podwójny)}, z_2 = -1, \text{ a więc:}$$

$$y(0) = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2(z+1)} \Big|_{z=0} + (z+1) \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2(z+1)} \Big|_{z=-1} = \frac{(4z+2)(z+1) - (2z^2 + 2z + 1)}{z+1} \Big|_{z=0} + \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2} \Big|_{z=-1} =$$

$$1 + 1 = 2$$



Rys. 6.8. Przebieg funkcji $y(kT_i)$

Uzyskany wynik jest zgodny z zastosowaniem twierdzenia o wartości początkowej (6.21):

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT_i) = \lim_{z \rightarrow \infty} (F(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2 + z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4 + 1/z}{2 + 1/z} = 2,$$

gdzie do obliczania granicy funkcji zastosowano regułę de L'Hospitala [38].

$$\text{Dla } k = 1: y(T_i) = \frac{2z^2 + 2z + 1}{z+1} z^0 \Big|_{z=0} + \frac{2z^2 + 2z + 1}{z} z^0 \Big|_{z=-1} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{Dla } k \geq 2: y(kT_i) = \frac{2z^2 + 2z + 1}{z+1} z^{k-1} \Big|_{z=0} + \frac{2z^2 + 2z + 1}{z} z^{k-1} \Big|_{z=-1} = (-1)^{k-2} 1((k-2)T_i)$$

Ogólne rozwiązanie jest więc takie samo jak w przypadku a):

$$y(kT_i) = 2\delta(kT_i) + (-1)^{k-2} 1((k-2)T_i)$$

c) Za pomocą rachunku symbolicznego w programie Matlab.

Obliczenia symboliczne, a więc w zakresie przekształcania funkcji i relacji między nimi, są dostępne w bloku programu Matlab (toolbox) Symbolic Math Toolbox [41]. W tym przypadku wymagana jest tylko deklaracja zmiennej symbolicznej z oraz deklaracja samej funkcji $Y(z)$,

a także odwołanie do funkcji `iztrans(Y)`. Całość jest zapisana w pliku `Inv_Transform.m`, który zawiera zaledwie trzy wiersze:

```
syms z
Y = (2*z^2+2*z+1)/(z^2+z);
iztrans(Y)
```

Uruchomienie tej procedury daje następujący wiersz odpowiedzi w bloku Command Window:

```
ans = kroneckerDelta(n - 1, 0) + (-1)^n + kroneckerDelta(n, 0)
```

Jest tu użyta funkcja o nazwie *delta Kroneckera*²⁴ (*symbol Kroneckera*), która jest definiowana następująco (nie mylić z funkcją delta Diraca):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad (6.35)$$

W odpowiedzi programu Matlab numer kroku jest oznaczany zmienną n (w miejsce stosowanej tu zmiennej k) wobec czego, uzyskaną odpowiedź można zapisać następująco:

$$y(kT_i) = (\delta_{(k-1)0} + (-1)^k + \delta_{k0})1(kT_i)$$

Podstawiając za k kolejne wartości $k = 0, 1, 2, \dots$, łatwo sprawdzić, że uzyskuje się taki sam ciąg jak w poprzednich rozwiązaniach (rys. 6.8).

6.4. Transmitancja układu dyskretnego

Na rys. 6.2 jest pokazany model układu dyskretnego w dziedzinie czasu. Jeśli występujące tam sygnały poddamy przekształceniu Laplace'a, to otrzymamy:

$$Y(s) = U^*(s)G(s) \quad (6.36)$$

gdzie: $U^*(s) = \mathcal{L}\{u^*(t)\}$, $u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(t)\delta(t - kT_i)$, T_i = okres impulsowania (6.5).

Jeśli sygnał wyjściowy $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ zostanie poddany próbkowaniu w fikcyjnym impulsatorze o okresie impulsowania T_i , to otrzymamy sygnał $y^*(t)$, przy czym: $y^*(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y^*(s)\}$, gdzie [20, 22]:

$$Y^*(s) = U^*(s)G^*(s) \quad (6.37)$$

$G^*(s)$ jest impulsową transmitancją układu, która fizykalnie jest interpretowana jako transformata spróbkowanej funkcji wagi:

$$G^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT_i)e^{-skT_i} \quad (6.38)$$

²⁴ Leopold Kronecker (1823 – 1891) – niemiecki matematyk i logik.

Funkcja $G^*(s)$ charakteryzuje się właściwością okresowości, co prowadzi do [20]:

$$G^*(s) = \frac{1}{T_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G^*(s + jn\omega_i), \quad \omega_i = \frac{2\pi}{T_i} \quad (6.39)$$

Należy zauważyć, że właściwości (6.40), (6.39) odnoszą się także do transformat sygnałów ciągłych, np.: $F^*(s) = F^*(s + jm\omega)$ dla dowolnej liczby całkowitej m .

Podstawienie zależności (6.8) do (6.37) prowadzi do reprezentacji sygnału wyjściowego w postaci transformaty z :

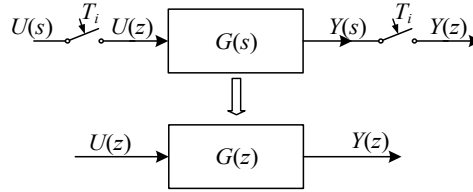
$$Y(z) = U(z)G(z) \quad (6.40)$$

gdzie $U^*(s)G^*(s)\big|_{e^{sT_i}=z} = U(z)G(z) = Z\{U^*(s)G(s)\} = U(z)Z\{G(s)\}$ ²⁵.

Zależność (6.40) wynika także z twierdzenia o splocie dyskretnego sygnału wejściowego i dyskretnej funkcji wagi: $y(kT_i) = u(kT_i) \otimes g(kT_i)$, który w dziedzinie z jest iloczynem transformat obu splatanych sygnałów (Tabela 6.2). Na tej zasadzie można także określić sposób obliczania transmitancji Z na podstawie transformat Z sygnałów na wyjściu i wejściu układu:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (6.41)$$

Struktura tych zależności jest pokazana na rys. 6.9.



Rys. 6.9. Obliczanie transmitancji układu dyskretnego

Założmy, że transmitancja $G(z)$ w (6.41) ma postać funkcji wymiernej, będącej ilorazem wielomianu licznika przez wielomian mianownika. Wówczas można ją przedstawić w postaci wielomianów względem zmiennej z^{-1} (6.19):

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (6.42)$$

skąd: $Y(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}) = U(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M})$.

²⁵ Relację $G(z) = Z\{G(s)\}$ należy rozumieć jako skrótowy zapis procedury określonej przez zależności (6.13) - (6.16) przy założonym okresie impulsowania T_i .

Po uporządkowaniu, otrzymamy ($a_0 \neq 0$):

$$Y(z) = U(z) \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M} \right) / a_0 - Y(z) \left(a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N} \right) / a_0 \quad (6.43)$$

Poddając powyższą zależność odwrotnemu przekształceniu Z, otrzymamy:

$$\begin{aligned} y(kT_i) &= \frac{b_0}{a_0} u(kT_i) + \dots + \frac{b_M}{a_0} u((k-M)T_i) - \frac{a_1}{a_0} y((k-1)T_i) - \dots - \frac{a_N}{a_0} y((k-N)T_i) \\ &= \sum_{l=0}^M \frac{b_l}{a_0} u((k-l)T_i) - \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{a_0} y((k-j)T_i) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Zależność (6.44) przedstawia rekursywny algorytm przetwarzania próbek sygnału wejściowego $u(kT_i)$ w sekwencję próbek sygnału wyjściowego $y(kT_i)$. Związek ten jest zachowany niezależnie od charakteru sygnału wejściowego, co pozwala obliczyć sygnał wyjściowy przy dowolnym wymuszeniu.

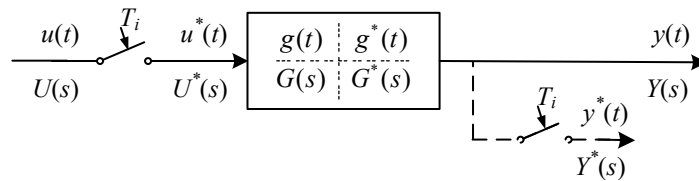
Zauważmy, że transmitancja $G(z)$ w powyższej analizie odpowiada transmitancji $G(s)$ układu ciągłego, w którym zastosowano impulsatory z okresem impulswania T_i jak na rys. 6.9. W rezultacie blok o transmitancji $G(z)$ przedstawia dyskretny model układu ciągłego o transmitancji $G(s)$, w którym następuje dyskretyzacja czasu o zadanym okresie T_i . Następny przykład pokazuje wynikające stąd zależności w dziedzinie czasu.

Przykład 6.13. Na wejście układu ciągłego o transmitancji: $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ jest podany

sygnał w postaci skoku jednostkowego próbkowanego z okresem impulswania $T_i = 1$ s. Obliczyć dyskretną odpowiedź układu.

Zagadnienie to może być rozwiązane na kilka sposobów. Rozpatrzmy niektóre z nich.

a) W pierwszym podejściu zastosujemy przetwarzanie według schematu z rys. 6.2, gdzie $u(t) = 1(t)$, natomiast $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Dla lepszego przybliżenia proponowanego przetwarzania będziemy się posługiwać rozszerzoną wersją schematu, jak na rys. 6.10, gdzie blok układu ciągłego jest opisany różnymi reprezentacjami tej samej funkcji przetwarzania o transmitancji $G(s)$.



Rys. 6.10. Struktura przetwarzania sygnałów

Poszczególne kroki przetwarzania zawierają następujące operacje.

1. Określenie skoku jednostkowego na wyjściu impulsatora (funkcja ciągła), jego transformaty Laplace'a oraz transformaty z:

$$u^*(t) = 1^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT_i) \delta(t - kT_i)$$

$$U^*(s) = 1^*(s) = \mathcal{L}\{1^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT_i) e^{-skT_i}$$

$$U(z) = U^*(s) \Big|_{e^{sT_i}=z} = 1^*(s) \Big|_{e^{sT_i}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT_i) e^{-skT_i} \Big|_{e^{sT_i}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT_i) z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

2. Określenie transformaty Laplace'a na wyjściu układu ciągłego:

$$Y(s) = U^*(s)G(s) = 1^*(s)G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT_i) e^{-skT_i}$$

Jak widać, określenie czasowej postaci sygnału wyjściowego $y(t)$ na podstawie powyższej zależności może być dosyć złożone. Celem dalszego postępowania jest jednak określenie dyskretnego postaci sygnału wyjściowego, co pomija potrzebę określania odwrotnego przekształcania transformaty $Y(s)$. W to miejsce można bezpośrednio przetwarzać ciągły sygnał wyjściowy poddany próbkowaniu oraz jego transformatę Laplace'a (transformatę impulsową).

3. Określenie transformaty Laplace'a na wyjściu układu ciągłego po operacji próbkowania (transformata impulsowa) [20]:

$$Y^*(s) = U^*(s)G^*(s) = 1^*(s)G^*(s),$$

$$\text{gdzie } G^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT_i) e^{-skT_i}.$$

Funkcja $g(kT_i)$, $k = 0, 1, \dots$ jest ciągiem impulsów tworzących 'szkielet' funkcji wagi układu ciągłego, poddanej próbkowaniu. Można więc ją określić następująco (Tabela 3.4):

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{1/(s(s+1))\} = 1 - e^{-t},$$

skąd po podstawieniu: $t = kT_i$ otrzymamy: $g(kT_i) = 1 - e^{-kT_i}$

4. Określenie transformaty z układu ciągłego o transmitancji impulsowej $G^*(s)$:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G^*(s)\} = G^*(s) \Big|_{e^{sT_i}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT_i) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-kT_i}) z^{-k} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T_i}}$$

5. Określenie transformaty z sygnału wyjściowego oraz odpowiedzi impulsowej:

$$Y(z) = U(z)G(z) = \frac{z}{z-1} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T_i}} \right) = \frac{z^2}{(z-1)^2} - \frac{z^2}{(z-1)(z - e^{-T_i})},$$

skąd, po podzieleniu w obu składnikach licznika przez mianownik, otrzymamy:

$$Y(z) = \frac{2z-1}{(z-1)^2} - \frac{z(1+e^{-T_i}) - e^{-T_i}}{(z-1)(z - e^{-T_i})}$$

Transformatę odwrotną, prowadzącą do sygnału $y(kT_i)$, obliczamy oddzielnie dla obu składników transformaty $Y(z)$. Dla pierwszego składnika otrzymamy:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z-1}{(z-1)^2}\right\} = \frac{2}{T_i} kT_i \cdot 1(kT_i) - \frac{1}{T_i} (k-1)T_i \cdot 1((k-1)T_i).$$

Drugi składnik można przedstawić w postaci sumy dwóch ułamków:

$$\frac{z(1+e^{-T_i}) - e^{-T_i}}{(z-1)(z - e^{-T_i})} = \frac{1}{(1 - e^{-T_i})(z-1)} - \frac{e^{-2T_i}}{(1 - e^{-T_i})(z - e^{-T_i})} = \frac{1}{1 - e^{-T_i}} z^{-1} \frac{z}{z-1} - \frac{e^{-2T_i}}{1 - e^{-T_i}} z^{-1} \frac{z}{z - e^{-T_i}},$$

a więc: $Z^{-1} \left\{ \frac{z(1 + e^{-T_i}) - e^{-T_i}}{(z-1)(z - e^{-T_i})} \right\} = \frac{1}{1 - e^{-T_i}} 1((k-1)T_i) - \frac{e^{-T_i}}{1 - e^{-T_i}} e^{-kT_i} \cdot 1((k-1)T_i).$

Ostatecznie, dla $T_i = 1$:

$$y(k) = 2k \cdot 1(k) - (k-1) \cdot 1(k-1) - \frac{e}{e-1} \cdot 1(k-1) + \frac{1}{e-1} e^{-k} \cdot 1(k-1).$$

b) W drugim podejściu bezpośrednio zastosujemy transmittancję dyskretną $G(z)$ do określenia dyskretnej procedury obliczania odpowiedzi układu na zadane wymuszenie. W tym celu zapiszemy transmittancję w postaci ułamka utworzonego z wielomianów licznika i mianownika:

$$G(z) = \frac{z(1 - e^{-T_i})}{z^2 - z(1 + e^{-T_i}) + e^{-T_i}} \quad (\text{patrz p. 4 powyższej procedury}).$$

Dzieląc licznik i mianownik prawej strony przez najwyższą potęgę z , otrzymamy:

$$G(z) = \frac{z^{-1}(1 - e^{-T_i})}{1 - z^{-1}(1 + e^{-T_i}) + z^{-2}e^{-T_i}} = \frac{Y(z)}{U(z)}, \text{ skąd:}$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}(1 + e^{-T_i}) + z^{-2}e^{-T_i}) = U(z)(z^{-1}(1 - e^{-T_i})) \text{ i dalej:}$$

$$Y(z) = z^{-1}(1 - e^{-T_i})U(z) + Y(z)(z^{-1}(1 + e^{-T_i}) - z^{-2}e^{-T_i}).$$

Przejście do postaci czasowej jest tu proste:

$$y(k) = (1 - e^{-T_i})u(k-1) + (1 + e^{-T_i})y(k-1) - e^{-T_i}y(k-2).$$

Powyższa zależność jest słuszna przy dowolnym wymuszeniu $u(k)$. W danym przypadku: $u(k) = 1(k)$, więc dla $T_i = 1$:

$$y(k) = (1 - e^{-1}) \cdot 1(k-1) + (1 + e^{-1})y(k-1) - e^{-1}y(k-2).$$

Widać, że uzyskane rozwiązanie ma formę rekursywną. Można sprawdzić, że dla zerowych warunków początkowych: $y(-1) = y(-2) = 0$, oba rozwiązania dają ten sam ciąg wyjściowy: 0, 0,6321, 1,4968, 2,4470, 3,4287, ..., chociaż postacie rozwiązania są różne. Sygnał wyjściowy w miarę jednostajnie narasta do nieskończoności, co nie jest zaskoczeniem, gdyż transmittancja $G(s)$ zawiera czynnik całkujący (zerowy biegun), co przy stałym jednostkowym wymuszeniu daje na wyjściu narastający sygnał.

W przypadku układów dyskretnych o transmittancji (6.42), dla $N > 0$, odpowiedź jest formowana na podstawie określonej sekwencji sygnałów wejściowych oraz zdefiniowanej kombinacji poprzednich wartości sygnału wyjściowego (6.44). Transmittancja takiego układu może być zapisana w następującej postaci:

$$G(z) = \frac{\sum_{i=0}^M \frac{b_i}{a_0} z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{a_0} z^{-j}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (6.45)$$

która pozwala bezpośrednio przejść do (6.44).

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych, funkcja wagi jest odpowiedzią impulsową układu, którą można określić następująco:

$$g(kT_i) = Z^{-1}\{G(z)\} = Z^{-1}\{Z\{\delta(kT_i)\}G(z)\}, \quad (6.46)$$

gdzie $Z\{\delta(kT_i)\} = 1$.

Odwrotna transformata Z transmitancji $G(z)$ może być obliczona według jednej z przedstawionych metod. W tym celu wygodnie jest zapisać transmitancję (6.42) w następującej formie:

$$G(z) = z^{N-M} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + b_2 z^{M-2} + \dots + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N} \quad (6.47)$$

Przy $N \geq M$ bieguny transmitancji są zerami równania charakterystycznego:

$$a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N = 0 = (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N) \quad (6.48)$$

Algorytm obliczania odpowiedzi impulsowej można także określić na podstawie (6.44), przyjmując wymuszenie w postaci $u(kT_i) = \delta(kT_i)$:

$$g(kT_i) = \sum_{l=0}^M \frac{b_l}{a_0} \delta((k-l)T_i) - \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{a_0} g((k-j)T_i) \quad (6.49)$$

przy zerowych warunkach początkowych: $g(kT_i) = 0$ dla $k < 0$.

Można zauważyć, że ze względu na rekursywny charakter procedury (6.49), w ogólnym przypadku funkcja $g(kT_i)$ nie zanika dla dowolnie dużej wartości indeksu k . Tego typu układy przyjęto nazywać układami o Nieskończonej Odpowiedzi Impulsowej (NOI) (ang. *Infinite Impulse Response – IIR*).

W przypadku, gdy $N = 0$ (odpowiedź nie zależy od historii procesu), transmitancja jest bezpośrednio zdefiniowana przez współczynniki wielomianu licznika (6.47):

$$G(z) = \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + b_2 z^{M-2} + \dots + b_M}{a_0 z^M} = \frac{1}{a_0} (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}) \quad (6.50)$$

Transmitancja układu ma więc M -krotne zero w początku układu współrzędnych na płaszczyźnie z . Odpowiedź impulsowa (funkcja wagi) jest następująca:

$$g(kT_i) = \frac{b_0}{a_0} \delta(kT_i) + \frac{b_1}{a_0} \delta((k-1)T_i) + \dots + \frac{b_M}{a_0} \delta((k-M)T_i) \quad (6.51)$$

Funkcja ta ogranicza się więc do kolejnych $M + 1$ współczynników. Stąd nazwa tego rodzaju układu: układ o Skończonej Odpowiedzi Impulsowej (SOI) (ang. *Finite Impulse Response – FIR*). Można zauważyć, że stan przejściowy w takim układzie jest ograniczony do skończonej liczby M kroków przetwarzania. Cecha ta jest stosowana przy projektowaniu pewnej oddzielnej klasy układów sterowania (patrz str. 373). Oznaczenia: NOI oraz SOI stosowane są głównie w odniesieniu do układów dyskretnych w kontekście ich zastosowania w charakterze filtrów cyfrowych [46] (często taką formę transmitancji nazywa się transmitancją o postaci filtru cyfrowego).

Przykład 6.14. Na wejściu układu ciągłego o transmitancji: $G(s) = \frac{(s+0,5)}{(s+0,1)(s+1)}$ znajduje się impulsator o okresie impulsowania $T_i = 0,5$ s. Określić funkcję wagi utworzonego w ten sposób zastępczego układu dyskretnego.

Transmitancję $G(z)$ można określić na podstawie (6.14), przy czym, bieguny transmitancji $s_1 = -0,1$, $s_2 = -1$:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = (s+0,1) \frac{(s+0,5)}{(s+0,1)(s+1)} \frac{z}{z-e^{sT_i}} \Big|_{s=-0,1} + (s+1) \frac{(s+0,5)}{(s+0,1)(s+1)} \frac{z}{z-e^{sT_i}} \Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{4}{9} \frac{z}{z-e^{-0,1T_i}} + \frac{5}{9} \frac{z}{z-e^{-T_i}}$$

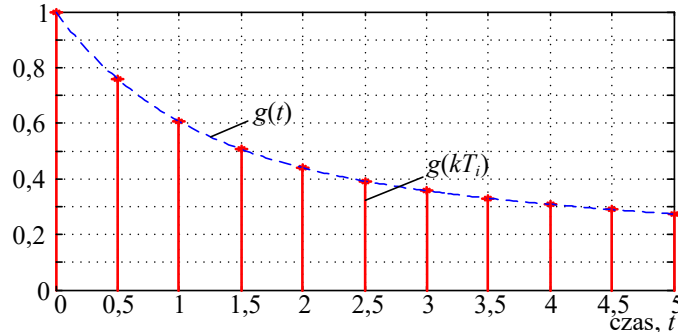
Bieguny transmitancji układu dyskretnego: $z_1 = e^{-0,1T_i}$, $z_2 = e^{-T_i}$. Odpowiedź impulsowa tego układu przybiera więc następującą postać:

$$g(kT_i) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \frac{4}{9} e^{-0,1T_i k} + \frac{5}{9} e^{-T_i k} = \frac{4}{9} e^{-0,05k} + \frac{5}{9} e^{-0,5k}$$

W celu porównania określimy odpowiedź impulsową układu ciągłego:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{9} \frac{1}{s+0,1} + \frac{5}{9} \frac{1}{s+1}\right\} = \frac{4}{9} e^{-0,1t} + \frac{5}{9} e^{-t}$$

Przebiegi obu odpowiedzi impulsowych są pokazane na rys. 6.11. Widać, że odpowiedź impulsowa układu dyskretnego pokrywa się z funkcją wagi układu ciągłego w momentach próbkowania, co jest zgodne z definicją próbkowania sygnału ciągłego (rys. 6.3).



Rys. 6.11. Odpowiedź impulsowa układu ciągłego i dyskretnego

Przykład 6.15. Układ dyskretny przetwarza próbki sygnału wejściowego zgodnie z następującym algorytmem:

$$y(k) = 0,5x(k) + x(k-1) - x(k-3) - 0,5x(k-4)$$

Określić transmitancję $G(z) = Y(z)/X(z)$ oraz charakterystykę częstotliwościową, przyjmując $T_i = 0,01$ s.

Transmitancję $G(z)$ można określić przez dokonanie przekształcenia Z podanego algorytmu:

$$Y(z) = 0,5X(z) + z^{-1}X(z) - z^{-3}X(z) - 0,5z^{-4}X(z) = (0,5 + z^{-1} - z^{-3} - 0,5z^{-4})X(z),$$

skąd:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0,5 + z^{-1} - z^{-3} - 0,5z^{-4} = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + h(4)z^{-4},$$

co w ogólnej formie można zapisać następująco:

$$G(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-m}.$$

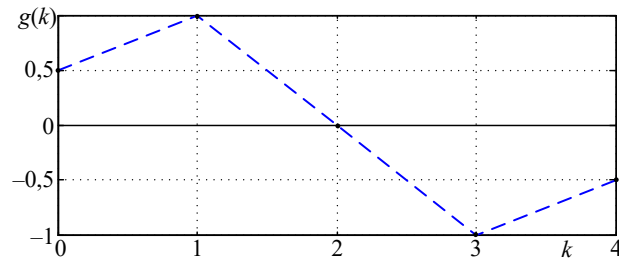
W zadaniu parametry tej transmitancji są następujące:

$$N = 5, h(0) = 0,5, h(1) = 1, h(2) = 0, h(3) = -1, h(4) = -0,5.$$

Charakterystyka impulsowa ma następującą postać (rys. 6.12):

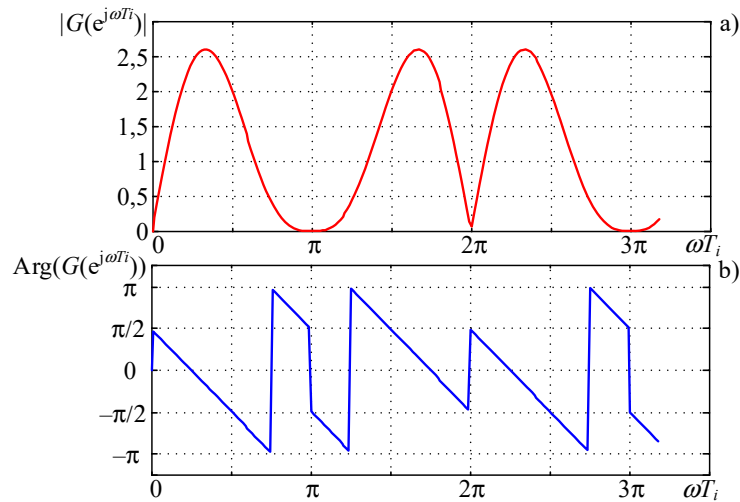
$$g(kT_i) = 0,5 + \delta((k-1)T_i) - \delta((k-3)T_i) - 0,5\delta((k-4)T_i).$$

Można zauważyć, że funkcja wagi jest antysymetryczna względem jej środka.



Rys. 6.12. Funkcja wagi analizowanego układu

Postać widmową tej transmitancji uzyskuje się przez podstawienie $z = e^{j\omega T_i}$: $G(e^{j\omega T_i}) = 0,5 + e^{-j\omega T_i} - e^{-3j\omega T_i} - 0,5e^{-4j\omega T_i}$. Charakterystyki: amplitudy i fazy są pokazane na rys. 6.13.



Rys. 6.13. Amplituda (a) oraz faza (b) transmitancji układu

Można zauważyć następujące cechy tych charakterystyk:

- obie charakterystyki są funkcjami okresowymi z okresem $\omega T_i = 2\pi$;
- charakterystyka fazy (rys. 6.13b) jest funkcją liniową; ta cecha występuje wówczas, gdy współczynniki $h(m)$ transmitancji tworzą funkcję symetryczną lub antysymetryczną względem jej środka: $h(m) = h(N - m - 1)$ lub: $h(m) = -h(N - m - 1)$.

Możliwość uzyskania liniowej charakterystyki fazy transmitancji układu dyskretnego jest bardzo cenną cechą takich układów, którą wykorzystuje się przy projektowaniu filtrów cyfrowych. Właściwość tę mają filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej (SOI).

6.5. Równania różnicowe

Transmitancja (6.42) układu dyskretnego przedstawia relację pomiędzy transformatami sygnału wyjściowego i wejściowego. W dziedzinie czasu ta relacja wyraża się w postaci zależności (6.44), za pomocą której można określić odpowiedź układu na dowolne wymuszenie przy znanych warunkach początkowych. Jest to równanie różnicowe, które w układach dyskretnych pełni podobną rolę, jak równanie różniczkowe w układach ciągłych (p. 2.4). W przypadku układu liniowego przyczynowego, inwariantnego względem czasu współczynniki równania różnicowego mają stałe wartości, a bieżąca próbka sygnału wyjściowego nie może zależeć od przyszłych próbek sygnału wejściowego. Ilustruje to kolejny przykład.

Przykład 6.16. Układ dyskretny jest określony następującą transmitancją:

$$G(z) = \frac{z^2 + 2}{z - 1} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Napisać odpowiadające mu równanie różnicowe i zbadać, czy układ jest przyczynowy.

W celu określenia równania różnicowego postępujemy według znanej metody, zgodnie z którą licznik i mianownik należy podzielić przez składnik z najwyższą potęgą zmiennej z :

$$\frac{1 + 2z^{-2}}{z^{-1} - z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

skąd otrzymujemy:

$$z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = X(z) + 2z^{-2}X(z)$$

Stąd już łatwo przejść do postaci czasowej tego równania:

$$y(k - 1) = x(k) + 2x(k - 2) + y(k - 2)$$

Zmieniając indeks próbek tak, aby otrzymać na wyjściu próbkę wskazującą na bieżący czas dyskretny, otrzymamy:

$$y(k) = x(k + 1) + 2x(k - 1) + y(k - 1)$$

Widać, że bieżące wartości wyjścia zależą od przyszłych próbek na wejściu układu.

Wywód ten jest potwierdzeniem warunku przyczynowości sformułowanego względem wielomianów licznika i mianownika transmitancji: stopień wielomianu licznika transmitancji nie może być wyższy od stopnia wielomianu mianownika.

Powyższy przykład pokazuje, że równania różnicowe mogą być rozwiązywane z zastosowaniem transformaty Z (podobnie jak liniowe równania różniczkowe łatwo jest rozwiązywać za pomocą przekształcenia Laplace'a). Ogólną postać równania różnicowego można określić na podstawie (6.45):

$$y(k) = \sum_{i=0}^M \frac{b_i}{a_0} x(k-i) - \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{a_0} y(k-j) \quad (6.52)$$

Dla $N = 0$ układ nie zależy od poprzednich wartości wyjścia (układ bez pamięci), a więc jego odpowiedź impulsowa jest skończona (układ SOI).

Przykład 6.17. Liniowy układ dyskretny jest opisany za pomocą następującego równania:

$$4y(k) + 3y(k-1) - y(k-2) = 2x(k-1) - 5x(k-2)$$

Określić $y(k)$ z uwzględnieniem warunków początkowych: $y(-1) = -1$, $y(-2) = 2$. W charakterze wymuszenia $x(k)$ przyjąć skok jednostkowy.

Podane równanie różnicowe z warunkami początkowymi poddajemy przekształceniu Z . Zgodnie z właściwościami podanymi w Tabeli 6.1 (opóźnienie z zadanymi warunkami początkowymi), otrzymamy:

$$4Y(z) + 3z^{-1}(Y(z) + y(-1)z) - z^{-2}(Y(z) + y(-1)z + y(-2)z^2) = 2z^{-1}X(z) - 5z^{-2}X(z)$$

Przekształcamy uzyskane równanie w celu wyznaczenia $Y(z)$:

$$(4 + 3z^{-1} - z^{-2})Y(z) = -3y(-1) + y(-1)z^{-1} + y(-2) + 2z^{-1}X(z) - 5z^{-2}X(z)$$

skąd:

$$Y(z) = \frac{-3y(-1)z^2 + y(-1)z + y(-2)z^2}{4z^2 + 3z - 1} + \frac{2z - 5}{4z^2 + 3z - 1} X(z)$$

Po wstawieniu odpowiednich wartości początkowych, otrzymamy:

$$Y(z) = \frac{3z^2 - z + 2z^2}{4z^2 + 3z - 1} + \frac{2z - 5}{4z^2 + 3z - 1} X(z)$$

Wymuszenie jest w postaci skoku jednostkowego: $X(z) = \frac{z}{z-1}$, więc:

$$Y(z) = \frac{3z^2 - z + 2z^2}{4z^2 + 3z - 1} + \frac{2z - 5}{4z^2 + 3z - 1} \frac{z}{z-1} = \frac{z((z-1)(5z-1) + 2z-5)}{(4z-1)(z+1)(z-1)} = \frac{z(5z^2 - 4z - 4)}{(4z-1)(z+1)(z-1)}$$

W celu znalezienia postaci czasowej odpowiedzi prawą stronę ostatniego wyrażenia zapisujemy w postaci funkcji wymiernej:

$$z^{-1}Y(z) = \frac{5z^2 - 4z - 4}{(4z-1)(z+1)(z-1)}, \text{ co można łatwo przedstawić w postaci sumy ułamków:}$$

$$z^{-1}Y(z) = \frac{5z^2 - 4z - 4}{(4z-1)(z+1)(z-1)} = \frac{A}{4z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-1},$$

gdzie: $A = 5$, $B = 0,5$, $C = -0,5$.

Transformata odpowiedzi przyjmuje następującą postać:

$$Y(z) = 5 \frac{z}{4z-1} + 0,5 \frac{z}{z+1} - 0,5 \frac{z}{z-1}$$

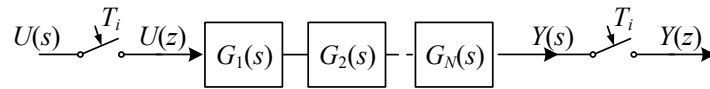
Na podstawie Tabeli 6.2 można łatwo określić czasową postać odpowiedzi:

$$y(k) = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^k + \frac{1}{2} (-1)^k - \frac{1}{2} (1)^k$$

Widać, że dzięki zastosowaniu przekształcenia Z można łatwo uzyskać zwartą postać odpowiedzi układu opisanego za pomocą równania różnicowego.

6.6. Algebra przekształcenia Z

Układ ciągły poddany wymuszeniu w postaci sygnału dyskretnego o okresie impulsowania T_i wygodnie jest analizować w dziedzinie częstotliwości za pomocą przekształcenia Z . Prześledźmy teraz warunki stosowania tego narzędzia analizy układów w odniesieniu do układów o różnej strukturze. Podstawowa zasada transformacji układu ciągłego do układu dyskretnego jest ilustrowana na rys. 6.9. Układ ciągły reprezentowany za pomocą transmitancji $G(s)$ może być dowolnie złożony. Przykład takiego układu jest pokazany na rys. 6.14.



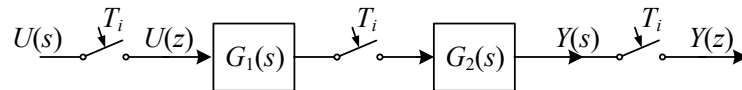
Rys. 6.14. Układ impulsowy z szeregowym połączeniem elementów ciągłych

Wyjściowy sygnał dyskretny jest określony następująco:

$$Y(z) = U(z) Z\{G_1(s)G_2(s)\cdots G_N(s)\} = U(z)G_{1N}(z) \quad (6.53)$$

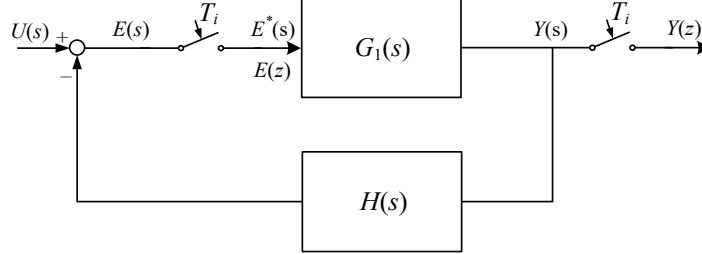
W przypadku, gdy na wejściu każdego elementu ciągłego znajdują się impulsatory (synchronizowane, o jednakowym okresie impulsowania – rys. 6.15), to transformata sygnału wyjściowego jest określona następująco:

$$Y(z) = U(z) Z\{G_1(s)\} Z\{G_2(s)\} = U(z)G_1(z)G_2(z) \quad (6.54)$$



Rys. 6.15. Układ impulsowy z szeregowym połączeniem elementów ciągłych, rozdzielonych jednakowymi impulsatorami

W podobny sposób można określić transmitancję zastępczego układu dyskretnego jak na rys. 6.16.



Rys. 6.16. Zamknięty dyskretny układ regulacji z elementami ciągłymi w torze głównym i w sprzężeniu zwrotnym

W kolejnych krokach podstawiania otrzymamy:

1. $Y(s) = E^*(s)G_1(s)$, $Y^*(s) = [E^*(s)G_1(s)]^*$ oraz: $Y(z) = E(z)G_1(z)$
2. $E(s) = U(s) - Y(s)H(s) = U(s) - E^*(s)G_1(s)H(s)$

Po obustronnym przekształceniu Z otrzymamy:

3. $E(z) = U(z) - E(z)Z\{G_1(s)H(s)\} = U(z) - E(z)G_1H(z)$, skąd:
4. $E(z) = \frac{U(z)}{1 + G_1H(z)} = \frac{Y(z)}{G_1(z)}$.

Ostatecznie otrzymamy:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1H(z)} \quad (6.55)$$

W przypadku, gdy element w torze sprzężenia zwrotnego jest także wymuszany sygnałem dyskretnym (rys. 6.17), w kroku 2 poprzedniego wyprowadzenia otrzymamy:

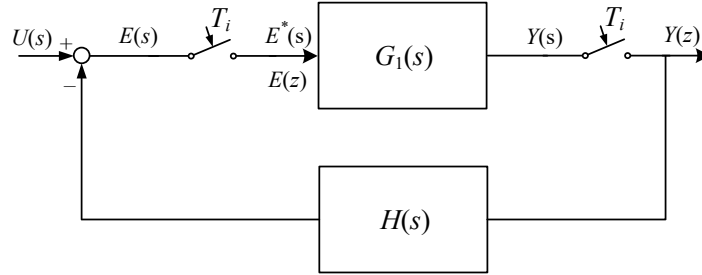
2. $E(s) = U(s) - Y^*(s)H(s)$, $E^*(s) = U^*(s) - [Y^*(s)H(s)]^*$, co prowadzi do:
3. $E(z) = U(z) - Y(z)H(z) = U(z) - E(z)G_1(z)H(z)$,

skąd:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)H(z)} \quad (6.56)$$

Jeśli w torze sprzężenia zwrotnego: $H(s) = 1$, to obie transmitancje zastępcze są sobie równe:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)} \quad (6.57)$$



Rys. 6.17. Zamknięty dyskretny układ regulacji z dyskretnymi wymuszeniami elementów ciągłych w torze głównym i w sprzężeniu zwrotnym

6.7. Ekstrapolacja impulsów

Idealny impulsator jest układem, który zamienia wartość sygnału w momencie impulsowania na impuls o nieskończonej amplitudzie i polu równym wartości mierzonego sygnału. Ten idealny układ kodujący nie może być praktycznie zrealizowany i w jego miejsce stosowane są układy aproksymujące wynik pomiaru wartości sygnału ciągłego. Są to tzw. ekstrapolatory. Połączenie impulsatora z ekstrapolatorem tworzy układ próbkująco-pamiętający (ang. *sample and hold* – S/H). Operacja ‘pamiętania’ generuje ciągłą funkcję czasu $v(t)$ na podstawie ciągu impulsów $n(kT_i)$. Sygnał $v(t)$ w przedziale $kT_i \leq t \leq (k+1)T_i$ może być aproksymowany za pomocą wielomianu względem czasu τ , ($0 \leq \tau \leq T_i$):

$$v(kT_i + \tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots + a_n\tau^n, \quad a_0 = n(kT_i) \quad (6.58)$$

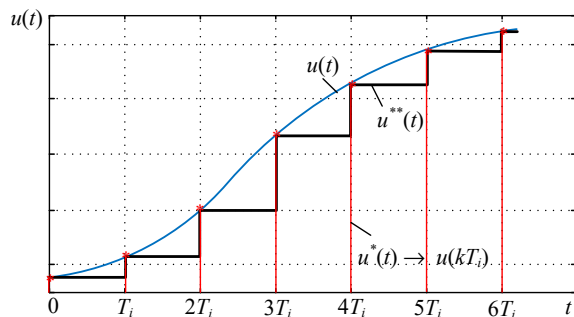
Układ, który realizuje operację (6.58) jest właśnie ekstrapolatorem. Ekstrapolacja może się odbywać z różną dokładnością, co zależy od rzędu n wielomianu (6.58), przy czym n jest także liczbą ostatnich próbek, na podstawie których obliczany jest wielomian ($n = 0$ – oznacza bieżącą próbkę).

Ekstrapolator zerowego rzędu ($n = 0$) (ang. *zero order hold*) jest układem, który przechowuje wartość próbki sygnału ciągłego do momentu kolejnego impulsowania (rys. 6.18). Transformata Laplace’a sygnału wyjściowego z ekstrapolatora (rys. 6.19) jest następująca:

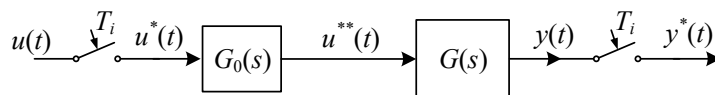
$$\mathcal{L}\{v(kT_i + \tau)\} = \mathcal{L}\{u^{**}(t)\} = u(kT_i) \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT_i}}{s} \right) = u(kT_i) \frac{1 - e^{-sT_i}}{s} = U^{**}(s), \quad (6.59)$$

co prowadzi do następującej transmitancji ekstrapolatora zerowego rzędu:

$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT_i}}{s} \quad (6.60)$$



Rys. 6.18. Zasada przetwarzania w impulsorze zerowego rzędu



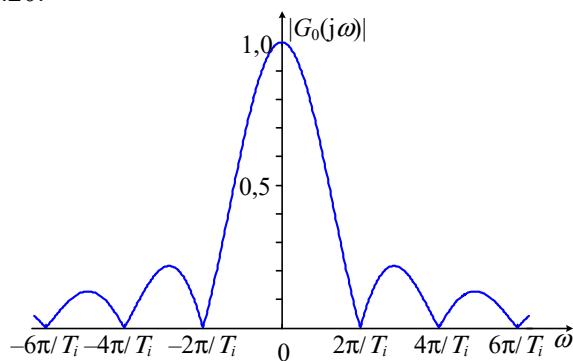
Rys. 6.19. Struktura układu dyskretnego z ekstrapolatorem

Właściwości częstotliwościowe ekstrapolatora można analizować na podstawie transmitancji widmowej:

$$G_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_i}}{j\omega}, \quad (6.61)$$

skąd: $|G_0(j\omega)| = T_i \left| \frac{\sin(\omega T_i / 2)}{\omega T_i / 2} \right| = T_i \left| \text{Sa} \frac{\omega T_i}{2} \right|$, $\text{Arg}(G_0(j\omega)) = -\frac{\omega T_i}{2}$.

Częstotliwościowa charakterystyka amplitudy ekstrapolatora zerowego rzędu jest pokazana na rys. 6.20.



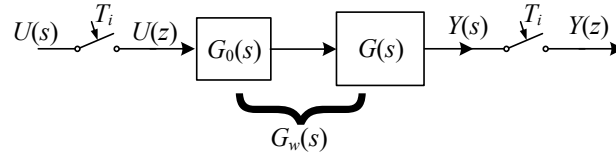
Rys. 6.20. Częstotliwościowa charakterystyka amplitudy ekstrapolatora zerowego rzędu

Do analizy układów dyskretnych z ekstrapolatorem zerowego rzędu można połączyć transmitancję ekstrapolatora z transmitancją układu ciągłego (rys. 6.21):

$$G_w(s) = (1 - e^{-sT_i}) \frac{G(s)}{s} \quad (6.62)$$

oraz:

$$G_w(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (6.63)$$



Rys. 6.21. Transmitancja zastępcza układu ciągłego z ekstrapolatorem

Przykład 6.18. Na wejściu układu ciągłego o transmitancji: $G(s) = \frac{s}{(s+0,2)(s+0,5)}$ znajduje się ekstrapolator zerowego rzędu. Określić odpowiedź tego układu na dyskretny skok jednostkowy: $u(kT_i) = 1(kT_i)$, $T_i = 1$ s.

Transmitancję zastępczą układu dyskretnego określamy zgodnie z (6.63):

$$G_w(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{(s+0,2)(s+0,5)} \right\}.$$

Pierwiastki równania charakterystycznego transmitancji układu ciągłego: $s_1 = -0,2$, $s_2 = -0,5$.

Zatem:

$$\begin{aligned} Z \left\{ \frac{1}{(s+0,2)(s+0,5)} \right\} &= \frac{1}{(s+0,5)} \frac{z}{z - e^{sT_i}} \Big|_{s=-0,2} + \frac{1}{(s+0,2)} \frac{z}{z - e^{sT_i}} \Big|_{s=-0,5} \\ &= \frac{1}{0,3} \left(\frac{z}{z - e^{-0,2T_i}} - \frac{z}{z - e^{-0,5T_i}} \right) \end{aligned}$$

Zastępcza transmitancja ma więc następującą postać:

$$G_w(z) = \frac{(1 - z^{-1})}{0,3} \left(\frac{z}{z - e^{-0,2T_i}} - \frac{z}{z - e^{-0,5T_i}} \right) = \frac{10}{3} \left(\frac{z-1}{z - e^{-0,2T_i}} - \frac{z-1}{z - e^{-0,5T_i}} \right).$$

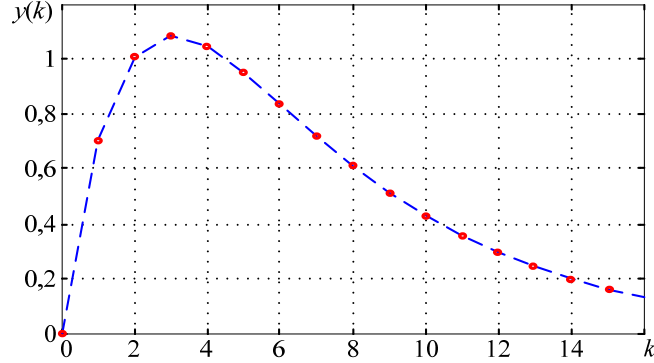
Transformata odpowiedzi na skok jednostkowy:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} G_w(z) = \frac{10}{3} \left(\frac{z}{z - e^{-0,2T_i}} - \frac{z}{z - e^{-0,5T_i}} \right) = \frac{10}{3} \left(\frac{z}{z - e^{-0,2}} - \frac{z}{z - e^{-0,5}} \right).$$

Stąd odpowiedź układu na dyskretny skok jednostkowy:

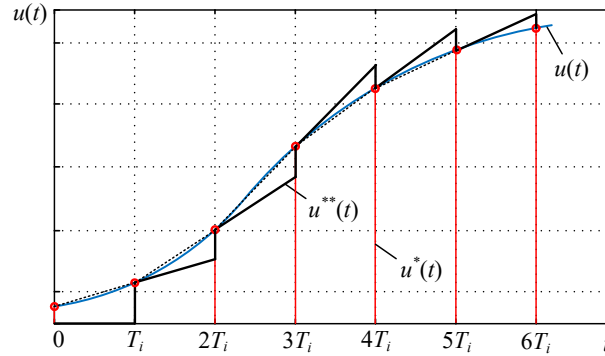
$$y(k) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \frac{10}{3} Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z - e^{-0,2}} - \frac{z}{z - e^{-0,5}} \right\} = \frac{10}{3} (e^{-0,2k} - e^{-0,5k}).$$

Przebieg odpowiedzi pokazano na rys. 6.22. Kropkami zaznaczono próbki sygnału wyjściowego.



Rys. 6.22. Odpowiedź układu z przykładu 6.18 na skok jednostkowy

Ekstrapolator rzędu pierwszego ($n = 1$) charakteryzuje się stałą wartością pierwszej różnicy próbkowanego sygnału na ostatnim przedziale, przy czym, w chwili impulsowania wartość sygnału wyjściowego jest równa wartości sygnału wejściowego (rys. 6.23). Do generacji kolejnego odcinka sygnału wyjściowego układ korzysta z historii poprzedniego okresu, więc pierwszy odcinek jest zerowy.



Rys. 6.23. Zasada tworzenia sygnału wyjściowego w impulsatorze pierwszego rzędu

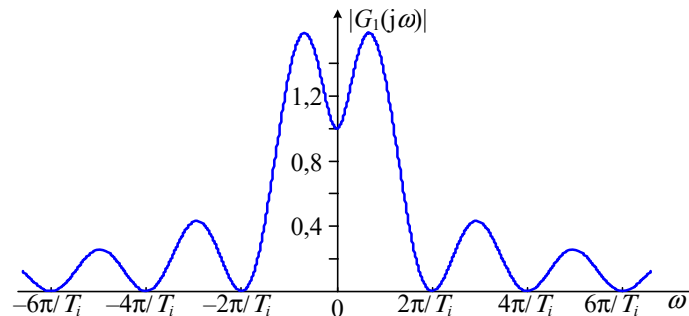
Transformata Laplace'a sygnału wyjściowego z ekstrapolatora jest następująca (przy oznaczeniach jak na rys. 6.19) [24]:

$$u(kT_i) \frac{T_i e^{-sT_i}}{(1 - e^{-sT_i})^2} = U^{**}(s) \left(\frac{T_i}{s} + \frac{1}{s^2} \right) e^{-sT_i}, \quad (6.64)$$

skąd:

$$G_1(s) = \frac{\left(\frac{T_i}{s} + \frac{1}{s^2} \right) e^{-sT_i}}{\frac{T_i e^{-sT_i}}{(1 - e^{-sT_i})^2}} = \frac{sT_i + 1}{s^2 T_i} (1 - e^{-sT_i})^2 \quad (6.65)$$

Podstawienie $s = j\omega$ w (6.65) daje transmitancję widmową ekstrapolatora pierwszego rzędu. Częstotliwościowa charakterystyka amplitudy jest pokazana na rys. 6.24.



Rys. 6.24. Częstotliwościowa charakterystyka amplitudy ekstrapolatora pierwszego rzędu

Niekiedy są stosowane ekstrapolatory wyższych rzędów lub układy o specjalnie zaprojektowanych charakterystykach czasowych i częstotliwościowych. Układy takie powinny mieć dolnoprzepustową charakterystykę częstotliwościową, aby usunąć powtarzające się (okresowe) widma sygnału dyskretnego.

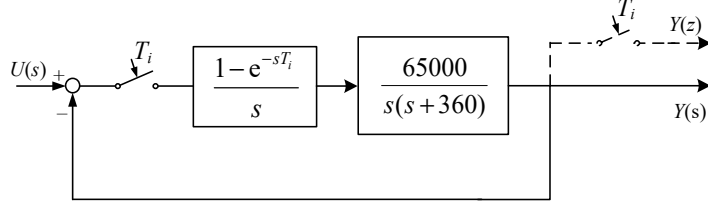
6.8. Modelownie cyfrowe systemów ciągłych

Można zauważyć, że zastosowanie impulsatora wraz z ekstrapolatorem umożliwia dyskretną aproksymację układu ciągłego. W ogólnym przypadku operację tę można zastosować do dowolnej funkcji ciągłej. Dyskretny zapis funkcji ciągłych prowadzi do wygodnego sposobu analizy systemów ciągłych za pomocą narzędzi komputerowych. W dziedzinie czasu operacja ta polega na przejściu z opisu systemów dynamicznych za pomocą równań różniczkowych do równań różnicowych. Te ostatnie mogą być bezpośrednio użyte do zapisu odpowiedniej procedury w postaci programu komputerowego. W dziedzinie częstotliwości transformacja z systemu ciągłego do systemu dyskretnego polega na przyporządkowaniu operatorowi s odpowiedniej funkcji operatora z : $s = f(z)$. To przyporządkowanie powinno prowadzić do algebraicznej postaci funkcji w dziedzinie z , co nie jest zapewnione przez transformację (6.8). Każde inne przekształcenie w określony sposób przybliży definicyjny wzór (6.8), co oznacza, że nie są one jednoznaczne. Poniżej przedstawiono podstawowe sposoby transformacji systemów ciągłych do systemów dyskretnych oraz ich wpływ na dokładność uzyskanych reprezentacji dyskretnych.

6.8.1. Ekwiwalent ekstrapolacji

Przedstawiona na rys. 6.21 zasada transformacji układu ciągłego do postaci dyskretnnej może być także stosowana w odniesieniu do układów ze sprzężeniem zwrotnym (układów zamkniętych). Ilustruje to kolejny przykład.

Przykład 6.19. Określić transmitancję Z układu z rys. 6.25 według metody ekwiwalentu ekstrapolacji zerowego rzędu.



Rys. 6.25. Schemat analizowanego układu

Zapiszmy transmitancję układu zamkniętego w sposób ogólny:

$$G(z) = \frac{(1 - z^{-1})Z\left\{\frac{b}{s^2(s+a)}\right\}}{1 + (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{b}{s^2(s+a)}\right\}}, \text{ gdzie: } b = 65000, a = 360.$$

Przekształcenie $Z\left\{\frac{b}{s^2(s+a)}\right\}$ można obliczyć przez rozkład transformaty Laplace'a na ułam-

ki proste: $\frac{b}{s^2(s+a)} = \frac{A_1 s + A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s+a} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s+a},$

skąd: $A_1 = -\frac{b}{a^2}, A_2 = \frac{b}{a}, A_3 = \frac{b}{a^2}.$

Poszczególne składniki są transformowane do przestrzeni z następująco:

$$Z\left\{\frac{A_1}{s}\right\} = Z\{A_1 \cdot 1(kT_i)\} = A_1 \frac{z}{z-1}, \quad Z\left\{\frac{A_2}{s^2}\right\} = Z\{A_2 \cdot (kT_i)\} = A_2 \frac{T_i z}{(z-1)^2},$$

$$Z\left\{\frac{A_3}{s+a}\right\} = Z\{A_3 \cdot e^{-aT_i k}\} = A_3 \frac{z}{z - e^{-aT_i}}.$$

Ostatecznie: $Z\left\{\frac{b}{s^2(s+a)}\right\} = A_1 \frac{z}{z-1} + A_2 \frac{T_i z}{(z-1)^2} + A_3 \frac{z}{z - e^{-aT_i}}.$

Transmitancja układu otwartego:

$$G_o(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{b}{s^2(s+a)}\right\} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}, \text{ gdzie:}$$

$$b_1 = (aT_i - (1 - e^{-aT_i})) \frac{b}{a^2}, \quad b_0 = (1 - e^{-aT_i} (1 + aT_i)) \frac{b}{a^2}, \quad a_1 = -(1 + e^{-aT_i}), \quad a_0 = e^{-aT_i}.$$

Transmitancja układu zamkniętego jest następująca:

$$G(z) = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + (a_1 + b_1)z + a_0 + b_0}$$

W celu określenia algorytmu realizacji powyższej transmitancji zapiszmy ją względem ujemnych potęg zmiennej z (przez podzielenie licznika i mianownika przez z^2):

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + (a_1 + b_1)z^{-1} + (a_0 + b_0)z^{-2}},$$

skąd otrzymamy:

$$Y(z) = (b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})U(z) - ((a_1 + b_1)z^{-1} + (a_0 + b_0)z^{-2})Y(z)$$

Stąd już łatwo uzyskać postać czasową algorytmu, określającego sposób wyznaczania sygnału wyjściowego $y(k)$:

$$y(k) = b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2) - (a_1 + b_1)y(k-1) - (a_0 + b_0)y(k-2)$$

Powyższe wyrażenie jest często nazywane filtrem cyfrowym (jest to filtr NOI). Jego właściwości częstotliwościowe są określone przez transmitancję widmową $G(e^{j\omega T_i})$.

Zauważmy, że do rozpoczęcia obliczania wartości sygnału wyjściowego ($y(1)$, $y(2)$, ...) niezbędne są wartości początkowe: $u(0)$, $u(-1)$ oraz $y(0)$, $y(-1)$. Kolejne próbki sygnałów: wejściowego i wyjściowego są oddalone w czasie o okres impulsowania T_i .

6.8.2. Ekwiwalent całkowania

Ta metoda odwołuje się do numerycznego przybliżenia wartości całki z funkcji ciągłej na przedziale równym okresowi próbkowania (dyskretyzacji) T_i . Istnieje wiele takich sposobów przybliżania, ale w praktyce stosowane są transformacje bazujące na numerycznych metodach prostokątów (Eulera²⁶) i trapezów (rys. 6.26) [17, 35].

Do wyprowadzenia odpowiednich zależności można porównać operacje całkowania funkcji $f(t)$ w dziedzinie czasu ciągłego i w przestrzeni s :

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{s} \rightarrow s = \frac{F(s)}{Y(s)} \quad (6.66)$$

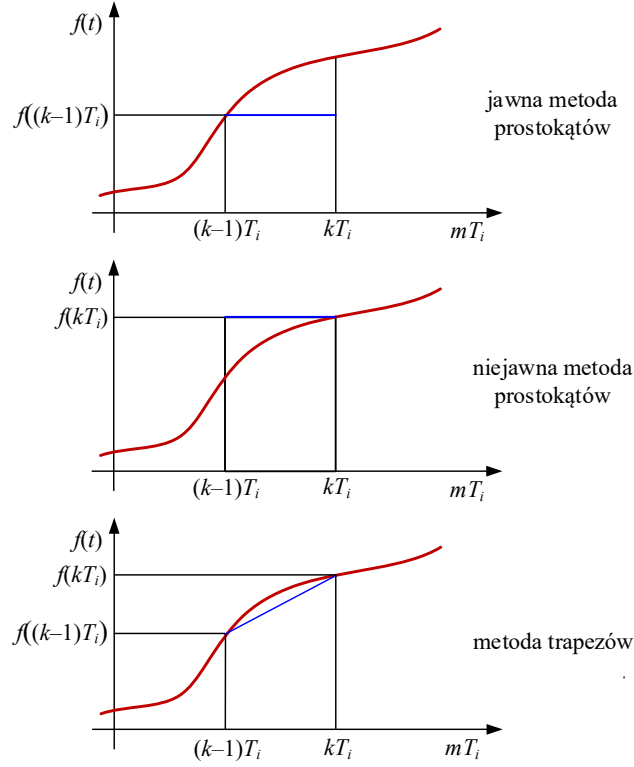
Dla jawnej (interpolacyjnej) metody prostokątów, w dziedzinie czasu dyskretnego i przekształcenia Z , otrzymamy:

$$y(kT_i) = y((k-1)T_i) + T_i f((k-1)T_i) \leftrightarrow Y(z) = z^{-1}Y(z) + T_i z^{-1}F(z) \rightarrow \frac{F(z)}{Y(z)} = \frac{z-1}{T_i} \quad (6.67)$$

Widać, że dla całkowania według jawnej metody prostokątów (ang. *forward Euler*), zachodzi następująca odpowiedniość pomiędzy przekształceniem Laplace'a i przekształceniem Z :

$$s = \frac{z-1}{T_i} \quad (6.68)$$

²⁶ Leonhard Euler (1707 - 1783) – szwajcarski matematyk i fizyk, jeden z najwybitniejszych matematyków w historii.



Rys. 6.26. Podstawowe metody całkowania numerycznego

Stosując w (6.67) niejawną (ekstrapolacyjną) metodę prostokątów, otrzymamy:

$$y(kT_i) = y((k-1)T_i) + T_i \cdot f(kT_i) \leftrightarrow Y(z) = z^{-1}Y(z) + T_i \cdot F(z) \rightarrow \frac{F(z)}{Y(z)} = \frac{z-1}{T_i z} \quad (6.69)$$

Porównanie (6.69) z (6.66) daje następującą formułę dla niejawnej metody prostokątów (ang. *backward Euler*):

$$s = \frac{z-1}{T_i \cdot z} \quad (6.70)$$

Podobnie dla metody trapezów otrzymamy następującą formułę dyskretną:

$$y(kT_i) = y((k-1)T_i) + \frac{T_i}{2} f(kT_i) + f((k-1)T_i) \leftrightarrow Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T_i}{2} (F(z) + z^{-1}F(z)), \quad (6.71)$$

skąd: $\frac{F(z)}{Y(z)} = \frac{2}{T_i} \frac{z-1}{z+1}.$

Ostatecznie otrzymuje się następującą zależność dla metody trapezów:

$$s = \frac{2}{T_i} \frac{z-1}{z+1} \quad (6.72)$$

Transformacja (6.72) jest także nazywana przekształceniem biliniowym lub przekształceniem Tustina²⁷.

W ten sposób, znając transmitancję układu ciągłego (lub transformatę ciągłego sygnału), można obliczyć przybliżoną postać jego transmitancji (transformaty) z :

$$G(z) = G(s) \Big|_{s=h(z)} \quad (6.73)$$

gdzie $h(z)$ jest jedną z wyprowadzonych funkcji, w zależności od przyjętej metody numerycznego przybliżania ciągłej całki.

Przykład 6.20. Określić przybliżoną transmitancję Z układu ciągłego o funkcji przejścia:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 0,2s - 0,5},$$

który jest próbkowany z okresem $T_i = 1$ s. Zastosować zasadę ekwiwalentowania całki według metody trapezów.

Stosujemy podstawienie (6.72): $G(z) = \frac{s+1}{s^2 + 0,2s - 0,5} \Big|_{s=\frac{2}{T_i} \frac{z-1}{z+1}}.$

To przekształcenie można wykonać posługując się programem MATLAB:

```
num=[1 1];
den=[1 0.2 -0.5];
sysd=tf(num,den,T,'tustin');
```

Parametr 'tustin' wskazuje na zastosowanie metody trapezów do transformacji układu ciągłego do układu dyskretnego. Po wykonaniu tego programu zmienna `sysd`, przyjmuje postać transmitancji dyskretniej:

$$G(z) = \frac{0,05205z^2 + 0,004957z - 0,04709}{z^2 - 1,985z + 0,9802}.$$

Można sprawdzić różnice w transmitancji dyskretniej przy stosowaniu także innych dostępnych metod transformacji.

Przejście z dziedziny czasu ciągłego do czasu dyskretnego łączy się z istotną zmianą charakterystyk częstotliwościowych układu poddanego transformacji.

Przykład 6.21. Porównać charakterystyki częstotliwościowe amplitudy i fazy układu z przykładu 6.20, reprezentowanego przez transmitancje $G(s)$ oraz $G(z)$.

Do rysowania logarytmicznych charakterystyk częstotliwościowych zastosujemy krótką procedurę programu MATLAB:

– dla układu ciągłego:

```
num=[1 1];
den=[1 0.2 -0.5];
```

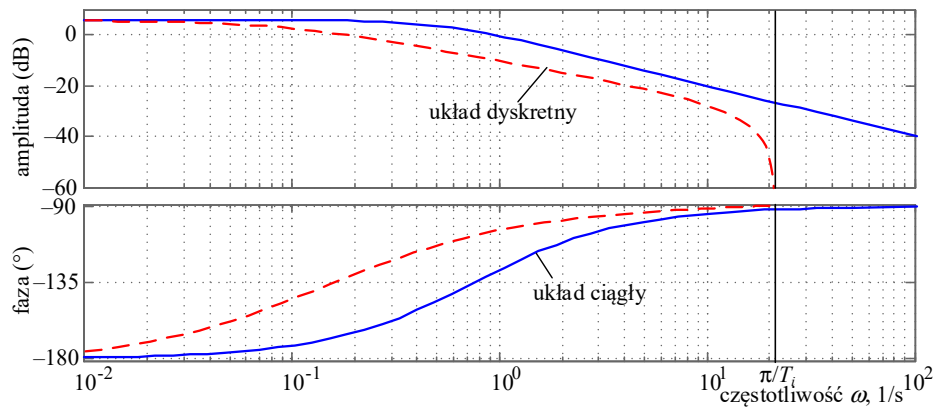
²⁷ Arnold Tustin, (1899-1994) – brytyjski inżynier i profesor, główne prace z zakresu sterowania maszyn elektrycznych.

```
sysc=tf(num,den);
bode(sysc,{0.01 100.0});
```

– dla układu dyskretnego (przyjęto $T_i = 0,1$ s):

```
T=0.1;
num=[0.05204 0.004957 -0.04709];
den=[1 1.985 0.9802];
sysd=tf(num,den,T);
bode(sysd,{0.01 100.0});
```

Wykresy charakterystyk częstotliwościowych amplitudy i fazy obu układów są pokazane na rys. 6.27. Charakterystyki układu dyskretnego są ograniczone do częstotliwości Nyquista.



Rys. 6.27. Charakterystyki częstotliwościowe układu ciągłego i dyskretnego

Widać, że obie charakterystyki mają zbliżony przebieg tylko w obszarze niskich częstotliwości. Efekt ten jest związany z zastosowaniem przybliżonego sposobu transformacji.

Stopień deformacji charakterystyki układu dyskretnego można ocenić przez określenie wzajemnych relacji częstotliwości w obu rozpatrywanych układach. Podstawiając $s = j\omega$ oraz $z = e^{j\omega_d T_i}$, gdzie ω_d jest częstotliwością w układzie dyskretnym, do (6.72):

$j\omega = \frac{2}{T_i} \frac{e^{j\omega_d T_i} - 1}{e^{j\omega_d T_i} + 1}$, otrzymamy:

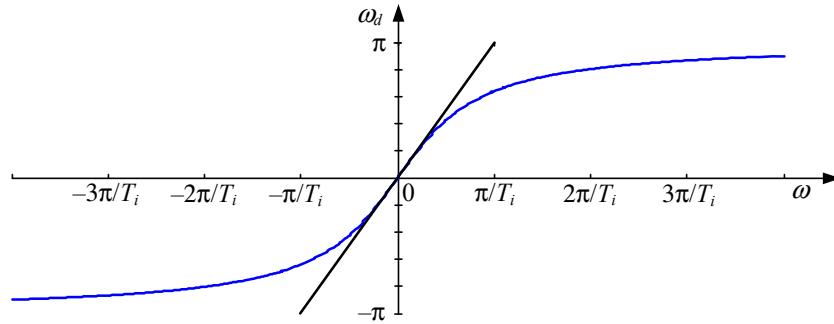
$$\omega_d = \frac{2}{T_i} \arctg\left(\frac{\omega T_i}{2}\right) \quad (6.74)$$

Na rys. 6.28 jest pokazana zależność obu częstotliwości. Widać, że wzajemna równość ma miejsce jedynie dla częstotliwości: $\omega_d = \omega = 0$.

Niekiedy istnieje potrzeba wyrównania deformacji charakterystyki układu dyskretnego w stosunku do ciągłego oryginału w jakimś obszarze częstotliwości. Załóżmy, że dla częstotliwości $\omega = \omega_a$ charakterystyki obu układów: ciągłego i dyskretnego po-

winy być jednakowe: $G(j\omega_a) = G(e^{j\omega})$. W przypadku transformacji według metody trapezów, problem ten można sprowadzić do określenia współczynnika α , który zapewni równość:

$$j\omega_a = \alpha \frac{e^{j\omega_a T_i} - 1}{e^{j\omega_a T_i} + 1} = j\alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T_i}{2}\right).$$



Rys. 6.28. Zależność częstotliwości ω_d w układzie dyskretnym od częstotliwości ω w układzie ciągłym

Otrzymujemy stąd następujące zmodyfikowane przekształcenie trapezów:

$$s = \alpha \frac{z-1}{z+1}, \quad \alpha = \frac{\omega_a}{\operatorname{tg}(\omega_a T_i / 2)} \quad (6.75)$$

Można zauważyć, że dla $\omega_a \rightarrow 0$ otrzymujemy: $\alpha = 2/T_i$, co odpowiada klasycznej formule trapezów.

Operacja skalowania częstotliwości (ang. *prewarping*) pozwala modyfikować transformację i jest zazwyczaj stosowana w odniesieniu do metody trapezów.

Przykład 6.22. Zmodyfikować przekształcenie trapezów w odniesieniu do układu z przykładu 6.21, aby charakterystyki układu dyskretnego były uzgodnione z charakterystykami ciągłego oryginału dla pulsacji $\omega_a = 1,0$ 1/s.

Zgodnie z (6.75) obliczamy współczynnik skalujący:

$$\alpha = \frac{\omega_a}{\operatorname{tg}(\omega_a T_i / 2)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(0,05)} = 19,9833, \text{ co prowadzi do następującej formuły transformacji:}$$

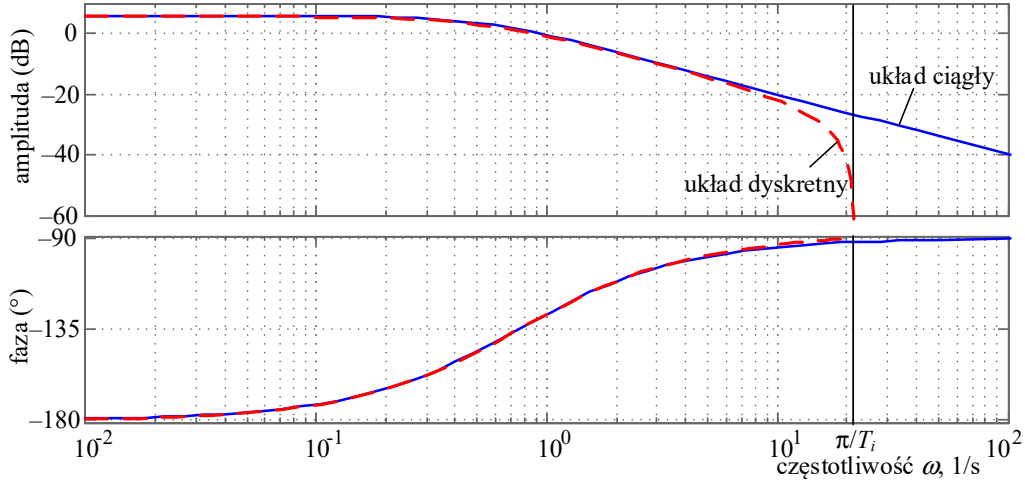
$$s = 19,9833 \frac{z-1}{z+1}.$$

Posługując się programem MATLAB można bezpośrednio uzyskać wykres charakterystyk logarytmicznych za pomocą następującej procedury:

```
T=0.1; oma=1;
num=[1 1];
den=[1 0.2 -0.5];
sysc=tf(num,den);
```

```
sysd=c2d(sysc,T,'prewarp',oma);
bode(sysd,{0.01 100.0});grid;
```

Częstotliwościowe charakterystyki amplitudy i fazy obu układów są pokazane na rys. 6.29. Porównując charakterystyki z rys. 6.27 z uzyskanymi powyżej charakterystykami (rys. 6.29), widać, że odpowiednia korekcja częstotliwości może znacznie rozszerzyć przedział, w którym charakterystyki obu układów: ciągłego i dyskretnego są sobie równoważne.



Rys. 6.29. Charakterystyki częstotliwościowe układu ciągłego i dyskretnego

Ostatnie dwa przykłady pokazują, że odpowiednia modyfikacja transformacji układu ciągłego do układu dyskretnego według metody trapezów zapewnia zgodność charakterystyk częstotliwościowych obu układów w szerokim zakresie zmian częstotliwości. Ten sposób transformacji jest szeroko stosowany przy projektowaniu filtrów cyfrowych oraz układów automatyki [18].

6.9. Próbkowanie sygnałów ciągłych

Zamiana sygnału ciągłego na sygnał dyskretny w wyniku operacji impulsowania rodzi pytanie o częstotliwość impulsowania (próbkowania). Przy regularnym próbkowaniu z okresem T_i otrzymamy: $f_T = 1/T_i$. Oszacowanie tej wielkości można uzyskać na podstawie analizy Fouriera. Jeśli ograniczyć rozważania do funkcji okresowych, spełniających warunki Dirichleta (p. 3.1), to dowolną taką funkcję można rozłożyć w nieskończony szereg zgodnie z (3.1). W przypadku, gdy mamy do czynienia z sygnałem rzeczywistym, składniki tego szeregu mają postać, jak w (3.4):

$$x_k(t) = b_k \sin(k\omega_0 t) + c_k \cos(k\omega_0 t) = A_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k), \quad (6.76)$$

gdzie parametry tej reprezentacji są określone w (3.4).

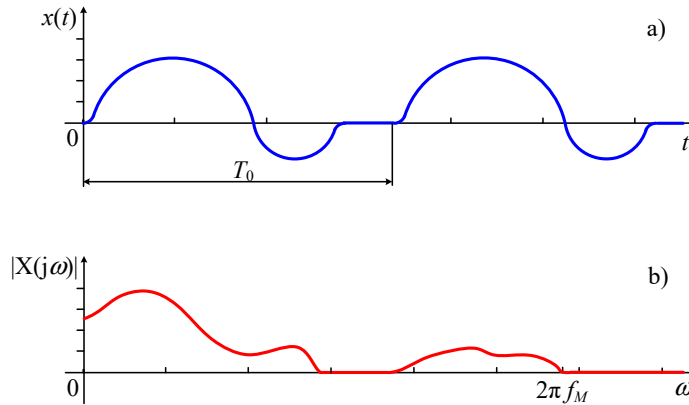
Każdy składnik w postaci (6.76) przedstawia składową harmoniczną analizowanego sygnału o pulsacji $k\omega_0$, amplitudzie A_k oraz fazie φ_k . Funkcja $x_0(t)$ jest składową stałą. Nieskończona suma składowych harmonicznym szeregu Fouriera przedstawia dyskretne, ale nieskończone widmo sygnału ciągłego. Jest oczywiste, że nieskończony szereg składników w formie składowych (6.76) nie może być reprezentowany za pomocą skończonej liczby dyskretnych próbek funkcji. Zatem warunkiem podstawowym reprezentacji sygnału ciągłego w formie sygnału dyskretnego jest ograniczoność jego widma. Tylko sygnał ciągły o ograniczonym widmie może być jednoznacznie reprezentowany w postaci dyskretniej. Ważnym zagadnieniem jest określenie wzajemnej relacji tych parametrów: szerokości widma sygnału ciągłego i wymaganej częstotliwości dyskretyzacji.

Założmy, że okres sygnału ciągłego $x(t)$ wynosi T_0 , natomiast pasmo częstotliwości tego sygnału jest ograniczone do wartości f_M : $\omega_M = 2\pi f_M$ (rys. 6.30). Jeśli zwiążemy te wielkości tak, że: $f_M = M / T_0$, to rozkład funkcji $x(t)$ w szereg Fouriera (3.1) będzie ograniczony do $2M + 1$ wyrazów:

$$x(t) = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (6.77)$$

gdzie $\omega_0 = 2\pi / T_0$, przy czym $0 \leq t \leq T_0$.

Zauważmy, że M jest liczbą podziałów pasma o częstotliwości podstawowej $1/T_0$ na jednakowe przedziały (harmoniczne): $M = 5$ oznacza, że: $f_M = f_5 = 5/T_0$, a więc częstotliwość graniczna pokrywa się z piątą harmoniczną analizowanego przebiegu.



Rys. 6.30. Sygnał ciągły (a) oraz jego ograniczone widmo (b)

Jeśli zadany okres T_0 sygnału podzielimy na N jednakowych przedziałów o długości $T = T_0/N$, to dla każdej wartości dyskretnego czasu $t_n = nT$, $n = 0, 1, \dots, N$ zależność (6.77) będzie prawdziwa dla otrzymanych punktów czasowych:

$$x(t_n) = x(nT) = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk\omega_0 nT} = \sum_{k=-M}^M a_k e^{j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (6.78)$$

Powyższe równanie dla kolejnych wartości indeksu n tworzy układ $N + 1$ równań, w których $2M + 1$ współczynników a_k szeregu Fouriera wiąże $N + 1$ próbek sygnału $x(t)$. Ten układ równań jest pełny i jednoznaczny tylko wtedy, gdy $N = 2M$, co oznacza, że do określenia M harmoniczných sygnału $x(t)$ o okresie T_0 i częstotliwości granicznej f_M należy zgromadzić $2M$ jego równoodległych w czasie próbek. Wiążą się z tym dwa pojęcia stosowane w odniesieniu do dyskretnej reprezentacji okresowego sygnału ciągłego o ograniczonym widmie:

- graniczna częstotliwość próbkowania (częstotliwość Nyquista):

$$f_N = \frac{2M}{T_0} = 2f_M \quad (6.79)$$

- okres próbkowania, zapewniający odtworzenie w postaci dyskretnej M harmoniczných sygnału (próbkowanie Nyquista):

$$T_i = T = \frac{T_0}{2M} = \frac{1}{f_N} \quad (6.80)$$

Jak widać, aby zapewnić pełne odwzorowanie sygnału ciągłego o widmie ograniczonym do częstotliwości f_M za pomocą sygnału dyskretnego, częstotliwość próbkowania powinna być dwa razy większa od tej granicznej częstotliwości. Innymi słowy, pełna informacja o rozważanym sygnale ciągłym jest zawarta w skończonej liczbie próbek tego sygnału, jeśli okres próbkowania spełnia warunek (6.80).

Powyższa zasada jest znana jako *twierdzenie o próbkowaniu* (ang. *sampling theorem*) [46]. Z jego odkryciem łączy się wiele nazwisk uczonych i inżynierów. Matematyk J.M. Whittaker²⁸ odkrył to prawo w kontekście interpolacji funkcji (1935), C. Shannon²⁹ zajmował się nim z punktu widzenia teorii informacji (1949), natomiast w zakresie teorii sygnałów i układów dyskretnych sformułował i rozpowszechnił je H. Nyquist (1928). W Rosji twierdzenie o próbkowaniu łączy się z nazwiskiem V.A. Kotielnikova³⁰ (1933).

Zależności (6.79), (6.80) definiują warunki teoretyczne nakładane na częstotliwość próbkowania lub jego okres, co oznacza, że w sygnale ciągłym nie występują żadne składowe o częstotliwości przekraczającej granicę f_M (lub szum), a procedura próbkowania (impulsowania) jest idealna. W rzeczywistych rozwiązaniach sygnały zawierają różnego rodzaju szumy, a pomiary są obciążone nieuniknionymi błędami, co sprawia,

²⁸ John M. Whittaker (1905 – 1984), matematyk angielski.

²⁹ Claude Shannon (1916 – 2001), amerykański matematyk i inżynier, ‘ojciec’ teorii informacji.

³⁰ Владимир Александрович Котельников (1908 – 2005), rosyjski matematyk oraz inżynier w zakresie radiotechniki i telekomunikacji.

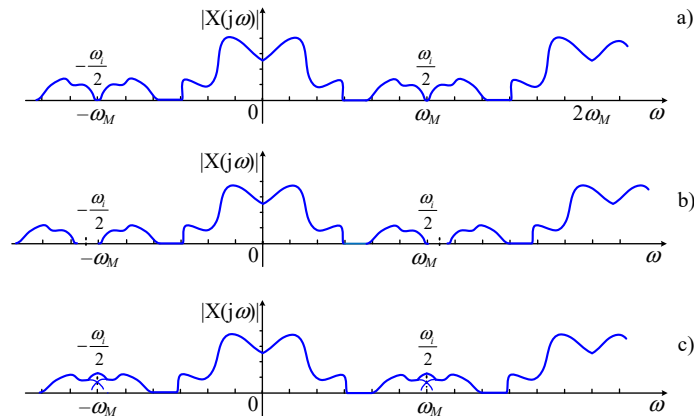
że przytoczone warunki są formułowane w postaci nierówności. Na przykład w odniesieniu do częstotliwości próbkowania f_s sygnału analogowego o szerokości pasma f_M , żąda się, aby była dwukrotnie większa:

$$f_i > 2f_M \text{ lub: } f_i > f_N \quad (6.81)$$

W skróconej formie mówi się, że najwyższa harmoniczna występująca w sygnale powinna być próbkowana nie rzadziej niż dwa razy w okresie.

Jakie są konsekwencje niespełnienia warunku (6.81)? Pokazują to widma sygnału dyskretnego otrzymanego przez próbkowanie sygnału ciągłego o widmie ograniczonym do pulsacji $\omega_M = 2\pi f_M$ (rys. 6.31). Widmo sygnału dyskretnego ma charakter cykliczny z okresem, który zależy od częstotliwości próbkowania i wynosi ω_i . Na rys. 6.31c) pokazany jest obraz widma w przypadku, gdy $\omega_i < 2\omega_M$ ($f_i < 2f_M$). Widać, że w takim przypadku sąsiednie widma nachodzą na siebie. Nachodzenie widm (ang. *aliasing*) powoduje, że w strefie nachodzenia obraz charakterystyki częstotliwościowej nie jest jednoznaczny: informacja zawarta w sygnale ciągłym (analogowym) nie jest w pełni przenoszona do jego postaci dyskretniej i odwrotnie: widmo dyskretnie, zdeformowane przez sąsiednie 'listki', nieusuwalnie zmienia informację o oryginalnym sygnale. Problem ten nie występuje w przypadku widm prezentowanych na rys. 6.31a) b), co potwierdza warunek (6.81).

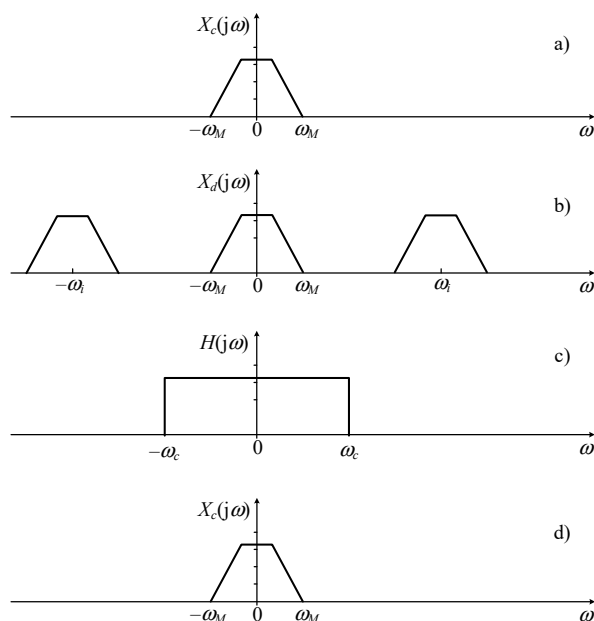
Jeśli jednak chcemy na podstawie widma z rys. 6.31a, b odtworzyć sygnał ciągły z rys. 6.30a, to należy pozbyć się okresowych powtórzeń widma sygnału dyskretnego. Procedura ta jest ilustrowana na rys. 6.32.



Rys. 6.31. Widmo sygnału dyskretnego przy różnej częstotliwości próbkowania: $\omega_i = 2\omega_M$ (a), $\omega_i > 2\omega_M$ (b) oraz $\omega_i < 2\omega_M$ (c)

W celu uzyskania ciągłego sygnału na podstawie widma sygnału dyskretnego zastosowano idealny filtr dolnoprzepustowy. Widać, że widmo sygnału odtworzonego pokrywa się z widmem sygnału ciągłego. Częstotliwość odcięcia filtra dolnoprzepu-

stowego przyjmuje się zwykle równą połowie częstotliwości próbkowania: $\omega_c = \omega_h/2$. Warto zauważyć, że zastosowanie filtru o podanej idealnej charakterystyce częstotliwościowej jest w praktyce niemożliwe. Zastosowanie ekstrapolatora w charakterze tego filtru w dużej mierze spełnia oczekiwania (rys. 6.20).



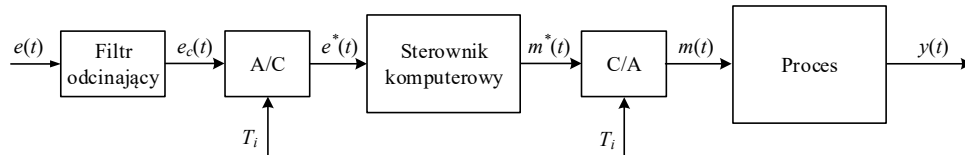
Rys. 6.32. Dokładne odtworzenie sygnału ciągłego na podstawie sygnału dyskretnego: a) widmo sygnału ciągłego; b) widmo sygnału dyskretnego; c) widmo filtru dolnoprzepustowego; d) widmo sygnału odtworzonego

Powyższa analiza pokazuje, że zapewnienie odtwarzalności sygnałów poddanych próbkowaniu wymaga dużej ostrożności. W celu spełnienia warunków narzuconych przez twierdzenie o próbkowaniu, powszechnie stosuje się ograniczenie widma sygnału ciągłego za pomocą analogowego filtru odcinającego, co także zapewnia racjonalny wybór częstotliwości próbkowania, którą można oszacować zgodnie z zależnością:

$$f_i = 2mf_M, \quad (6.82)$$

gdzie przyjmuje się: $m = 2 \div 5$.

W rezultacie tor główny układu sterowania dyskretnego (z udziałem komputera cyfrowego – rys. 6.1) będzie miał strukturę jak na rys. 6.33. Układ odtwarzający sygnał ciągły znajduje się w przetworniku C/A.



Rys. 6.33. Struktura dyskretnego układu sterowania

Zadania

- 6.1. Określić transmitancje układów dyskretnych, których funkcje przetwarzania we/wy dane są w postaci następujących równań różnicowych, gdzie $T_i = 0,2s$. Wyznaczyć ich częstotliwościowe charakterystyki amplitudy i fazy.

$$y(kT_i) = u(kT_i) + 2u((k-2)T_i) - 0,5y((k-1)T_i),$$

$$y(kT_i) = u(kT_i) + 2u((k-2)T_i) - 2u((k-4)T_i) - u((k-6)T_i).$$

- 6.2. Określić odpowiedź układu o podanej transmitancji na skok jednostkowy. Przyjąć okres impulsowania $T_i = 0,1s$.

$$G(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}},$$

$$G(z) = \frac{z}{z^2 + 0,3z + 2}.$$

- 6.3. Stosując metodę rozkładu transformaty Z na ułamki proste oraz metodę residuów, określić postać dyskretną przebiegów o podanych transformatach.

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0,5},$$

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}},$$

$$Y(z) = \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^3 + z^2}.$$

Uwaga: w przypadku metody residuów skorzystać z przykładu 6.12 (str. 167).

- 6.4. Na podstawie podanych transformat sygnałów dyskretnych określić ich postać czasową. Porównać wyniki uzyskane metodą rozkładu transformaty na ułamki proste z metodą szeregu potęgowego.

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2},$$

$$Y(z) = \frac{1}{(z - 0,1)(z - 0,5)(z + 0,2)},$$

$$Y(z) = \frac{2z(3z + 17)}{(z - 1)(z^2 - 6z + 25)},$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z + 0,1)(z + 0,2)(z + 0,3)},$$

$$Y(z) = \frac{1}{z^2(z - 0,5)},$$

$$Y(z) = \frac{z - 1}{z^2 - 3z + 2}.$$

- 6.5. Określić wartości początkowe i końcowe (ustalone) sygnałów, których transformaty są podane w zadaniu 6.4.
- 6.6. Określić postać czasową odpowiedzi na skok jednostkowy układów o podanych transmitancjach. Przyjąć zerowe warunki początkowe.

$$G(z) = \frac{1}{z^2 - 0,75z + 0,125},$$

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - 0,75z + 0,125}$$

$$G(z) = \frac{z}{z^2 + 0,3z + 2},$$

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - 1,2z + 0,2}.$$

6.7. Dla układów z zadania 6.6 określić stan ustalony na wyjściu, przy założeniu, że na wejście podane jest dyskretne wymuszenie w postaci sygnału: $u(kT_i) = 0,5 \sin(kT_i)$, $T_i = 0,4s$.

6.8. Układy dyskretne są określone za pomocą podanych równań różnicowych z zadanymi warunkami początkowymi. Określić ich odpowiedzi na skok jednostkowy.

$$y(k) + y(k-1) - 2y(k-2) = u(k) + 3u(k-2), y(-1) = 2, y(-2) = 1;$$

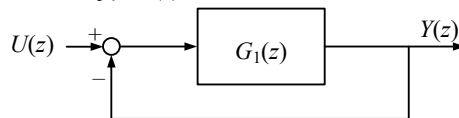
$$y(k) + y(k-1) - 2y(k-2) = u(k-1) + 3u(k-2), y(-1) = 0, y(-2) = 1.$$

6.9. Dobrać częstotliwość próbkowania w układzie dyskretnym, który steruje obiektem ciągłym o podanej transmitancji:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+5},$$

$$G(s) = \frac{s+0,5}{s^3+4s^2+5s+3}.$$

6.10. Na wyjściu układu dyskretnego zarejestrowano następujący ciąg impulsów po podaniu skoku jednostkowego na jego wejście: $y(k) = 0, 2/3, 1, 1, \dots$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Badany układ ma strukturę jak na poniższym schemacie. Określić transmitancję zastępczą $G(z)$ tego układu oraz transmitancję $G_1(z)$.



7. STABILNOŚĆ LINIOWYCH SYSTEMÓW DYSKRETNYCH

7.1. Wprowadzenie

Ogólne wymagania odnoszące się do stabilności liniowych systemów dyskretnych są podobne, jak w przypadku systemów ciągłych, które zostały omówione w p. 5.1. Można więc powtórzyć, że system jest stabilny, jeśli przy ograniczonym wymuszeniu uzyskuje się ograniczoną odpowiedź (warunek stabilności *BIBO*). Odpowiedź impulsowa (przy wymuszeniu impulsowym) stabilnego systemu, przy zerowych warunkach początkowych, z czasem dąży do zera:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_i) = 0 \quad (7.1)$$

Jeśli warunek (7.1) jest spełniony, to system jest stabilny asymptotycznie, co także jest definiowane następująco:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(kT_i)| \leq M < \infty \quad (7.2)$$

dla pewnej wartości M .

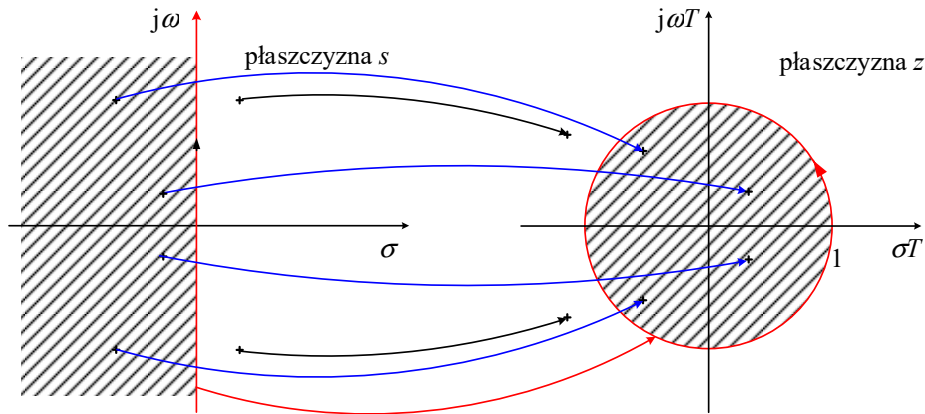
Wychodząc z tych ogólnych definicji, stabilność liniowego, przyczynowego systemu dyskretnego można badać według zasad odnoszących się do systemu ciągłego. W przypadku systemów opisanych za pomocą transmitancji można w tym celu stosować podstawowe kryterium matematyczne: bieguny transmitancji systemu muszą mieć ujemne części rzeczywiste. Odnosi się to do transmitancji Laplace'a systemów ciągłych.

W przypadku systemów dyskretnych dysponujemy transmitancją Z , która jest powiązana z transmitancją Laplace'a zależnością (6.8):

$$z = e^{T_i s} = e^{T_i \sigma + j T_i \omega} = r e^{j T_i \omega}, \quad r = e^{T_i \sigma} \quad (7.3)$$

Warunek: $\sigma < 0$ sprowadza się więc do wymogu $r < 1$. Jest to podstawowy warunek stabilności systemu dyskretnego sformułowany w odniesieniu do jego transmitancji Z . Staje się to jasne po analizie transformacji pomiędzy płaszczyznami pierwiastków transmitancji systemu s – z zgodnie z przekształceniem (7.3) (rys. 7.1). Widać, że pierwiastki układu ciągłego o ujemnej części rzeczywistej na płaszczyźnie s przechodzą

dążą do wnętrza okręgu jednostkowego na płaszczyźnie z . Oś $j\omega$ na płaszczyźnie s ($\sigma = 0$) staje się okręgiem o promieniu 1 ze środkiem umieszczonym w początku układu współrzędnych płaszczyzny z . Prawa część płaszczyzny s ($\sigma > 0$) w wyniku transformacji (7.3) zostaje umieszczona na zewnątrz okręgu jednostkowego płaszczyzny z .



Rys. 7.1. Transformacja płaszczyzny s do płaszczyzny z

Przykład 7.1. Na wejściu układu ciągłego o transmitancji: $G(s) = \frac{s}{(s + 0,2)(s + 0,5)}$ znajduje się impulsator o okresie próbkowania $T_i = 1$ s oraz ekstrapolator zerowego rzędu (patrz przykład 6.13). Określić stabilność tego układu.

Zastępcza transformata Z tego układu została określona w przykładzie 6.13:

$$G_w(z) = \frac{10}{3} \left(\frac{z-1}{z-e^{-0,2T_i}} - \frac{z-1}{z-e^{-0,5T_i}} \right).$$

Bieguny transmitancji są więc następujące ($T_i = 1$ s):

$$z_1 = e^{-0,2T_i} = 0,8187, \quad z_2 = e^{-0,5T_i} = 0,6065.$$

Obie wartości leżą w okręgu jednostkowym, więc układ jest stabilny, co także potwierdza przebieg jego odpowiedzi na skok jednostkowy (rys. 6.19).

Przykład 7.2. Na wejściu układu ciągłego o transmitancji: $G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$ znajduje się impulsator o okresie próbkowania $T_i = 1$ s oraz ekstrapolator zerowego rzędu (patrz przykład 7.1). Określić stabilność tego układu.

Zastępczą transformatę Z tego układu można określić według znanego sposobu:

$$G_w(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{K}{s^2(s+2)}\right\} = (1 - z^{-1})G_a(z).$$

Pierwiastki równania charakterystycznego transmitancji układu ciągłego są następujące: $s_1 = -2$, $s_2 = s_3 = 0$ (podwójny).

Zatem:

$$G_a(z) = Z\left\{\frac{K}{s^2(s+2)}\right\} = Z\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2}\right\}_{t=kT_i}\right\} = Z\{g_1(kT_i) + g_2(kT_i) + g_3(kT_i)\}.$$

Składniki prawej strony można obliczyć następująco (patrz przykład 6.5):

$$g_1(kT_i) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{2s^2}\right\}_{kT_i} = \frac{K}{2}kT_i, \quad g_2(kT_i) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{4s}\right\}_{t=kT_i} = \frac{K}{4}1(kT_i),$$

$$g_3(kT_i) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{4(s+2)}\right\}_{t=kT_i} = \frac{K}{4}e^{-2kT_i}$$

Ostatecznie otrzymamy:

$$\begin{aligned} G_a(z) &= \frac{K}{4} \left(2Z\{kT_i 1(kT_i)\} - Z\{1(kT_i)\} + Z\{e^{-2kT_i}\} \right) = \frac{K}{4} \left(\frac{2T_i z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-2T_i}} \right) \\ &= \frac{K}{4} \frac{z(2T_i + e^{-2T_i} - 1) - 2T_i e^{-2T_i} - e^{-2T_i} + 1}{(z-1)^2(z-e^{-2T_i})} \end{aligned}$$

Zatem transmitancja zastępcza całego układu jest następująca:

$$G_w(z) = (1 - z^{-1}) \frac{K}{4} \frac{z(2T_i - 1 + e^{-2T_i}) - 2T_i e^{-2T_i} - e^{-2T_i} + 1}{(z-1)^2(z-e^{-2T_i})} = \frac{K}{4} \frac{z(2T_i - 1 + e^{-2T_i}) - e^{-2T_i}(2T_i + 1) + 1}{(z-1)(z-e^{-2T_i})}$$

Zauważmy, że transmitancja układu zależy od okresu próbkowania T_i , co sugeruje, że w ogólnym przypadku wartość T_i może wpływać na stabilność układu.

Dla podanej wartości $T_i = 1$ s otrzymamy:

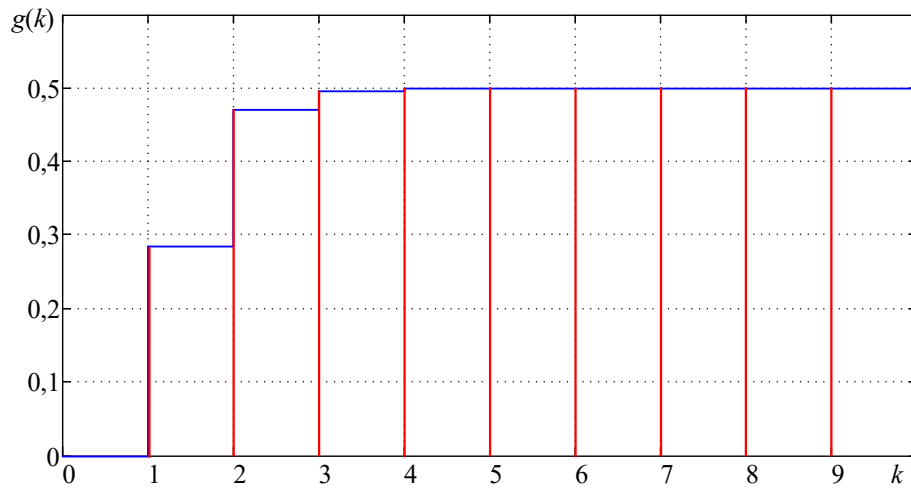
$$G_w(z) = \frac{K}{4} \frac{z(1 + e^{-2}) - 3e^{-2} + 1}{(z-1)(z-e^{-2})} = \frac{K}{4} \frac{1,1353z + 0,5940}{z^2 - 1,1353z + 0,1353}$$

Bieguny transmitancji są następujące: $z_1 = 1$, $z_2 = 0,1353$. Układ jest więc stabilny, ale nieasymptotycznie. Fakt ten można potwierdzić, analizując funkcję wagi układu zastępczego, która przyjmuje następującą postać:

$$g_w(kT_i) = Z^{-1}\{G_w(z)\} = Z^{-1}\{(1 - z^{-1})G_a(z)\} = g_a(kT_i) - g_a((k-1)T_i) = \frac{K}{2} \left(1 - \frac{(e^2 - 1)}{2} e^{-2k} \right) 1((k-1))$$

Przebieg tej funkcji dla $K = 1$ jest pokazany na rys. 7.2.

Można zauważyć, że nie są spełnione warunki (7.1), (7.2) stabilności asymptotycznej układu dyskretnego, ponieważ kolejne wartości funkcji wagi dążą do stałej wartości 0,5. Suma nieskończonej liczby próbek tej funkcji zmierza do nieskończoności.



Rys. 7.2. Funkcja wagi rozważanego układu

Z dotychczasowych analiz widać, że badanie stabilności systemów dyskretnych – podobnie jak w przypadku układów ciągłych – sprowadza się do określenia położenia biegunów ich transmitancji. Układy stabilne asymptotycznie muszą mieć wszystkie bieguny położone wewnątrz okręgu jednostkowego. Jeśli ponadto pojedyncze bieguny (ale jednokrotne) leżą na okręgu jednostkowym, to układ jest stabilny nieasymptotycznie. W innych przypadkach układ jest niestabilny.

Położenie biegunów można wyznaczyć przez ich bezpośrednie obliczenie, jak to pokazano w przykładach 7.1 oraz 7.2. W przypadku, gdy wielomian mianownika transmitancji ma stopień większy od dwóch, metoda ta nie jest już prosta. Podobnie jak w systemach liniowych, można wówczas korzystać z kryteriów stabilności, które ułatwiają tę procedurę.

7.2. Kryteria stabilności układów dyskretnych

Kryteria stabilności stosowane w odniesieniu do liniowych układów dyskretnych można podzielić na dwie kategorie:

- kryteria, w których bezpośrednio analizowana jest transmitancja Z układu;
- kryteria, w których transmitancja Z lub tylko jej funkcja charakterystyczna, jest przekształcana do innego układu współrzędnych, w którym oceniana jest stabilność układu według kryteriów stosowanych do układów ciągłych.

Poniżej przedstawione są podstawowe kryteria stosowane do oceny stabilności systemów dyskretnych.

7.2.1. Kryterium Jury'ego

To kryterium należy do pierwszej z wymienionych grup. Załóżmy, że transmitancja rozważanego liniowego układu dyskretnego jest funkcją wymierną o postaci:

$$G(z) = \frac{L(z)}{M(z)} \quad (7.4)$$

Do oceny stabilności rozpatrywane jest równanie charakterystyczne (mianownik transmitancji):

$$M(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n > 0, \quad (7.5)$$

na podstawie której, jest budowana tablica Jury'ego. Tablica ta zawiera $(2n-3)$ wiersze. Pierwsze dwa wiersze tablicy są utworzone ze współczynników wielomianu $M(z)$, natomiast współczynniki pozostałych wierszy są wyznacznikami macierzy utworzonych w sposób zbliżony do procedury stosowanej w kryterium Routha-Hurwitza dla układów ciągłych [16]:

wiersz	z^0	z^1	z^2	...	z^{n-k}	...	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-k}	...	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_k	...	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-k}	...	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_{n-2}	...	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	...	...	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	...	...	c_0		
.	.	.	.	.	.			
$2n-5$	s_0	s_1	s_2	s_3				
$2n-4$	s_3	s_2	s_1	s_0				
$2n-3$	r_0	r_1	r_2					

Współczynniki stojące w wierszach poczynając od trzeciego, są obliczane następująco:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2,$$

...

$$r_0 = \begin{vmatrix} s_0 & s_3 \\ s_3 & s_0 \end{vmatrix}, \quad r_1 = \begin{vmatrix} s_0 & s_2 \\ s_3 & s_1 \end{vmatrix}, \quad r_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix}.$$

Stabilność układu jest zależna od spełnienia następujących $(n+1)$ warunków:

- (1) $M(1) > 0$,
- (2) $(-1)^n M(-1) > 0$,
- (3) $|a_0| < a_n$,
- (4) $|b_0| > |b_{n-1}|$,
- (5) $|c_0| > |c_{n-2}|$,
- ...
- $(n+1)$ $|r_0| > |r_2|$.

Przykład 7.3. Sprawdzić stabilność układu dyskretnego, którego funkcja charakterystyczna jest następująca: $M(z) = 2z^3 + 3z^2 + 4z + 1 = 0$. Zastosować kryterium Jury'ego.

Mianownik transmitancji ma postać wielomianu 3-go stopnia ($n = 3$), więc tablica Jury'ego ma $2n - 3 = 3$ wiersze (współczynnik $a_3 = 2 > 0$):

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	1	4	3	2
2	2	3	4	1
3	b_0	b_1	b_2	

gdzie:

$$b_0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3, \quad b_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \quad b_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5.$$

Sprawdzamy kolejne $(n + 1) = 4$ warunki stabilności:

$$M(1) = 2 + 3 + 4 + 1 = 10 > 0,$$

$$(-1)^3 M(-1) = -(-2 + 3 - 4 + 1) = 2 > 0,$$

$$|a_0| = 1 < a_3 = 2,$$

$$|b_0| = 3 > |b_2| = 5 \text{ – ten warunek nie jest spełniony, więc układ jest niestabilny.}$$

Rezultat ten potwierdza analiza numeryczna, gdyż pierwiastki wielomianu $M(z)$ są następujące: $z_{1,2} = -0,5971 \pm j1,1306$, $z_3 = -0,3059$. Widać, że pierwiastki zespolone leżą poza okręgiem jednostkowym.

Kryterium Jury'ego w pojedynczym zastosowaniu jest dosyć uciążliwe. Ma ono jednak prostą algorytmicznie postać, co pozwala stosować go do automatycznej oceny stabilności układów dyskretnych.

7.2.2. Kryterium Routha-Hurwitza na płaszczyźnie 'w'

Algebraiczne kryterium Routha-Hurwitza, stosowane w odniesieniu do systemów ciągłych, bazuje na zasadzie weryfikacji położenia biegunów transmitancji względem osi $j\omega$. Kryterium to nie może być zatem bezpośrednio stosowane do transmitancji systemu dyskretnego. Odwrócenie transformacji pomiędzy przestrzenią systemu ciągłego s i dyskretnego z (6.8): $s = \ln(z)/T_i$ nie jest użyteczne, gdyż prowadzi do zależności niealgebraicznych w przestrzeni s . Wady tej nie ma przekształcenie biliniowe (6.72), w którym zmienna zespolona s jest zazwyczaj oznaczana jako w :

$$z = \frac{2/T_i + w}{2/T_i - w} \quad \text{lub:} \quad w = \frac{2}{T_i} \frac{z-1}{z+1} \quad (7.6)$$

Podstawienie (6.8) w wersji widmowej: $z = e^{j\omega T_i} = \cos \omega T_i + j \sin \omega T_i$ do (7.6) pozwala określić relację między częstotliwościami w obu płaszczyznach:

$$w = j \frac{2}{T_i} \operatorname{tg} \frac{\omega T_i}{2} = j \frac{\omega_i}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi \omega}{\omega_i} = j \omega_w, \quad (7.7)$$

gdzie: ω_w jest pulsacją na płaszczyźnie w , ω_i jest pulsacją próbkowania.

Na podstawie (7.6), (7.7) można wywieść następujące zależności:

- okrąg jednostkowy na płaszczyźnie z przetransformowany zostaje w oś $j\omega_w$ na płaszczyźnie w , przy czym, trajektorie na obu płaszczyznach zmierzają do tych samych wartości, gdy pulsacja zmierza do 0 oraz $\pm\infty$.
- punkty leżące wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie z zostają przetransformowane do punktów leżących w lewej półpłaszczyźnie współrzędnych w .

Dzięki tym właściwościom wielomian charakterystyczny $M(z)$ zostaje przekształcony w wielomian $M(w)$, w stosunku do którego można stosować kryterium Routha-Hurwitza w celu oceny miejsca położenia biegunów transmitancji układu dyskretnego. Kryterium jest stosowane w następujących krokach.

W transformacie układu dyskretnego (7.4) wydzielić wielomian charakterystyczny:

$$M(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (7.8)$$

który należy przekształcić za pomocą podstawienia (7.6) do płaszczyzny w :

$$a_n \left(\frac{2/T_i + w}{2/T_i - w} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{2/T_i + w}{2/T_i - w} \right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{2/T_i + w}{2/T_i - w} \right) + a_0 = 0 \quad (7.9)$$

W kolejnych krokach otrzymamy:

$$a_n (2/T_i + w)^n + \dots + a_1 (2/T_i + w)(2/T_i - w)^{n-1} + a_0 (2/T_i - w)^n = 0,$$

oraz:
$$M(w) = c_n w^n + c_{n-1} w^{n-1} + \dots + c_1 w + c_0 = 0, \quad (7.10)$$

W odniesieniu do wielomianu $M(w)$ można stosować kryterium Routha-Hurwitza.

Przykład 7.4. Funkcja charakterystyczna transmitancji układu dyskretnego jest następująca: $M(z) = 2z^3 + 3z^2 + 2z + K = 0$. Określić wartość współczynnika K , dla którego układ jest stabilny. Okres próbkowania $T_i = 0,1s$.

Przekształcamy funkcję $M(z)$ do płaszczyzny w :

$$M(w) = 2\left(\frac{2/T_i + w}{2/T_i - w}\right)^3 + 3\left(\frac{2/T_i + w}{2/T_i - w}\right)^2 + 2\left(\frac{2/T_i + w}{2/T_i - w}\right) + K = 0$$

$$M(w) = 2(2/T_i + w)^3 + 3(2/T_i + w)^2(2/T_i - w) + 2(2/T_i + w)(2/T_i - w)^2 + K(2/T_i - w)^3$$

$$= (1 - K)w^3 + \frac{2}{T_i}(1 + 3K)w^2 + \frac{4}{T_i^2}(7 - 3K)w + \frac{8}{T_i^3}(7 + K) = 0$$

Warunek konieczny kryterium Routha-Hurwitza: współczynniki wielomianu muszą mieć jednakowy znak. Stąd otrzymujemy: $K < 1$, $K > -1/3$, $K < 7/3$, $K > -7$.

Wynika stąd dopuszczalny przedział wartości współczynnika K , przy którym współczynniki wielomianu $M(w)$ mają jednakowy znak: $-1/3 < K < 1$.

Jest to niepusty przedział, więc budujemy tablicę Routha (patrz p. 5.2), aby sprawdzić wystarczające warunki stabilności:

w^3	$1 - K$	$\frac{4}{T_i^2}(7 - 3K)$
w^2	$\frac{2}{T_i}(1 + 3K)$	$\frac{8}{T_i^3}(7 + K)$
w^1	$\frac{8}{T_i^2} \frac{K(K - 3)}{-(3K + 1)}$	0
w^0	$\frac{8}{T_i^3}(7 + K)$	

Współczynniki w pierwszej kolumnie powinny mieć taki sam znak, skąd otrzymamy następujące warunki ($T_i > 0$):

1. $1 - K > 0 \rightarrow K < 1$,
2. $1 + 3K > 0 \rightarrow K > -1/3$,
3. $\frac{K(K - 3)}{-3K - 1} > 0 \rightarrow (0 < K < 3 \text{ oraz } K > -1/3) \text{ lub } ((K < 0 \text{ lub } K > 3) \text{ oraz } K < -1/3)$
skąd: $0 < K < 3$ lub $K < -1/3$,
4. $7 + K > 0 \rightarrow K > -7$.

Łącznie, wszystkie te warunki są spełnione dla przedziału: $0 < K < 1$.

W miejsce (7.6) może być także stosowane nieco uproszczone przekształcenie:

$$z = \frac{1+r}{1-r} \text{ lub: } r = \frac{z-1}{z+1}, \quad (7.11)$$

w którym zakłada się: $T_i = 2$. To uproszczenie nie zakłóca podstawowych relacji pomiędzy płaszczyzną r i płaszczyzną s , natomiast jest prostsze w obliczeniach.

Przykład 7.5. Dana jest transmitancja układu dyskretnego, której równanie charakterystyczne jest następujące: $M(z) = z^2 + z + 0,25 = 0$. Określić stabilność tego układu za pomocą kryterium Routha-Hurwita z zastosowaniem przekształcenia (7.11).

Podstawiając zależność (7.11) do równania charakterystycznego, otrzymamy:

$$M(r) = \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 + \left(\frac{1+r}{1-r} \right) + 0,25 = 0.$$

W kolejnych etapach przekształcenia otrzymamy:

$$\begin{aligned} (1+r)^2 + (1+r)(1-r) + 0,25(1-r)^2 &= 0, \\ (r^2 + 2r + 1) + (1-r^2) + 0,25(r^2 - 2r + 1) &= 0, \\ 0,25r^2 + 1,5r + 2,25 &= 0. \end{aligned}$$

Widać, że warunek konieczny kryterium Routha-Hurwita jest spełniony: współczynniki wielomianu mają jednakowy znak.

Tablica Routha ma następującą postać:

r^2	0,25	2,25
r^1	1,5	0
r^0	2,25	

Wartość w ostatnim wierszu tabeli została określona następująco:

$$r^0 = \frac{\begin{vmatrix} 0,25 & 2,25 \\ 1,5 & 0 \end{vmatrix}}{-1,5} = 2,25.$$

Układ jest stabilny, ponieważ wszystkie współczynniki pierwszej kolumny tabeli mają ten sam znak. W tym przypadku, wynik ten może być łatwo potwierdzony przez określenie pierwiastków równania charakterystycznego $M(z) = z^2 + z + 0,25 = 0$. Łatwo sprawdzić, że oba pierwiastki są jednakowe: $z_1 = z_2 = -1/2$, a więc leżą wewnątrz okręgu jednostkowego, co zapewnia stabilność układu.

Jeśli zastosujemy przekształcenie (7.6), to równanie charakterystyczne przyjmie następującą postać:

$$M(w) = \left(\frac{2/T_i + w}{2/T_i - w} \right)^2 + \left(\frac{2/T_i + w}{2/T_i - w} \right) + 0,25 = 0,$$

co prowadzi do następującego równania w płaszczyźnie w :

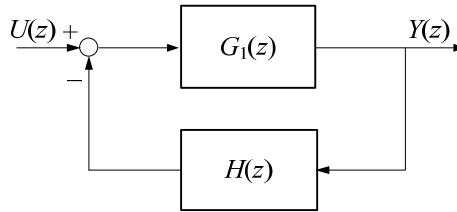
$$0,25w^2 + \frac{3}{T_i}w + \left(\frac{3}{T_i} \right)^2 = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że również w tym przypadku uzyskuje się potwierdzenie stabilności układu.

7.2.3. Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista stosowane w odniesieniu do transmitancji systemów ciągłych bazuje na właściwościach funkcji zespolonych (patrz str. 131). Takie same właściwości mają transmitancje systemów dyskretnych, jedynie inaczej są definiowane obszary położenia biegunów i zer tych transmitancji. Pamiętając o tym, kryterium Nyquista można z powodzeniem stosować do badania stabilności systemów dyskretnych.

Przypomnijmy podstawowe założenia związane ze stosowaniem tego kryterium. W tym celu rozpatrzmy układ ze sprzężeniem zwrotnym (rys. 7.3).



Rys. 7.3. Układ dyskretny z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

Transmitancja zastępcza układu jest następująca:

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{1 + H(z)G_1(z)} = \frac{L(z)}{M(z)} \quad (7.12)$$

Założmy, że poszczególne bloki mają następujące transmitancje:

$$G_1(z) = \frac{L_1(z)}{M_1(z)}, \quad H(z) = \frac{L_H(z)}{M_H(z)},$$

przy czym, stopień licznika w tych transmitancjach nie jest większy od stopnia mianownika (układ przyczynowy). Zatem:

$$M(z) = 1 + G_o(z) = \frac{M_1(z)M_H(z) + L_1(z)L_H(z)}{M_1(z)M_H(z)}, \quad (7.13)$$

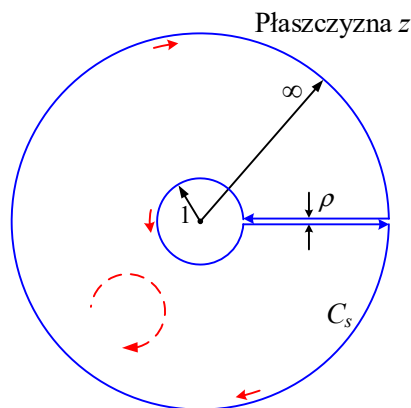
gdzie $G_o(z) = H(z)G_1(z) = \frac{L_1(z)L_H(z)}{M_1(z)M_H(z)} = M(z) - 1$ jest transmitancją układu otwartego.

Warto zauważyć, że bieguny układu otwartego i funkcji charakterystycznej $M(z)$ układu zamkniętego są takie same, natomiast zera funkcji $M(z)$ są biegunami układu zamkniętego o transmitancji $G(z)$. Ponadto stopień wielomianu licznika (7.13) jest taki sam, jak stopień wielomianu jego mianownika. Wynika stąd, że liczba zer Q_L funkcji $M(z)$ jest równa liczbie jej biegunów Q_M : $Q_L = Q_M = Q$, niezależnie od ich położenia na płaszczyźnie z .

Podobnie jak w transmitancji układu ciągłego zakładamy, że transmitancja układu otwartego $G_o(z)$ ma P biegunów poza okręgiem jednostkowym (dla $P > 0$, układ otwarty

jest niestabilny). W celu określenia, czy układ zamknięty jest stabilny, należy wyznaczyć liczbę biegunów jego transmitancji $G(z)$, które leżą poza okręgiem jednostkowym. Oznaczmy tę liczbę przez Z , jako że jest ona równa liczbie zer funkcji charakterystycznej $M(z)$ układu zamkniętego, które leżą poza okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie z . Zauważmy, że układ zamknięty jest stabilny tylko wtedy, gdy $Z = 0$.

W celu określenia nieznanej liczby zer Z funkcji $M(z)$ poza okręgiem jednostkowym można się posłużyć zabiegiem podobnym do tego, który dla układów ciągłych jest pokazany na rys. 5.8, z tym, że teraz kontur C_s powinien obejmować cały obszar leżący poza okręgiem jednostkowym. Obszar ten jest rozcięty szczeliną o szerokości $\rho \rightarrow 0$ tak, aby nie zostawić poza konturem żadnego punktu osobliwego funkcji charakterystycznej (rys. 7.4). Kontur ten jest obiegany w tym samym kierunku (co jest zaznaczone linią przerywaną) jak na rys. 5.8 (w odniesieniu do układów ciągłych). W samym konturze można wyróżnić cztery części: okrąg jednostkowy (obiegany w kierunku rosnących kątów) – na płaszczyźnie układów ciągłych odpowiada mu oś urojona $0 + j\omega$, dwie równoległe półproste rozciągające się od punktu $1 + j0$ do nieskończoności (obiegane w przeciwnych kierunkach, więc ich całkowity efekt się znosi) oraz kontur w nieskończoności, obiegany w kierunku ujemnych kątów (jego efekt jest zerowy lub równy stałej, jak dla układu ciągłego (5.18)). Pozostaje, zatem, analiza funkcji $M(z)$ na okręgu jednostkowym, gdzie $z = e^{j\omega T_i}$: przy zmianie kąta $-\pi \leq \omega T_i \leq \pi$ (co na płaszczyźnie liniowych układów s odpowiada osi urojonej o wartościach $-\infty < j\omega < \infty$). Argument funkcji $M(e^{j\omega T_i})$ jest równy sumie wszystkich N punktów charakterystycznych (zer i biegunów) leżących wewnątrz konturu jednostkowego, pomnożonych przez kąt 2π , przy czym, liczbę biegunów należy wziąć ze znakiem minus (pierwiastki licznika w (7.13) dają dodatni przyrost argumentu, a pierwiastki mianownika (bieguny) – przyrost ujemny). Przyrost argumentu można zapisać następującym związkiem:



Rys. 7.4. Tworzenie konturu obejmującego niestabilne bieguny transmitancji

$$\Delta\phi = \text{Arg}(M(e^{j\omega T_i})) = 2\pi N, \quad (7.14)$$

gdzie, dla uściślenia, N jest liczbą okrążeń początku układu współrzędnych przez trajektorię $M(e^{j\omega T_i})$ w stronę ujemnych kątów (zgodnie z kierunkiem trajektorii obiegającej okrąg jednostkowy). Ujemna wartość N jest konsekwencją przyrostu kąta w przeciwną stronę.

Można teraz przystąpić do końcowego wywodu. Widać, że do oceny stabilności dyskretnego układu zamkniętego wystarczy określić liczbę biegunów i zer funkcji $M(z)$ leżących wewnątrz okręgu jednostkowego oraz porównać ją z liczbą okrążeń trajektorii funkcji $M(e^{j\omega T_i})$ wokół początku układu. Na podstawie przeprowadzonej analizy można napisać (Q – liczba wszystkich biegunów funkcji $G_o(z)$ lub $M(z)$):

$Q - P$ - liczba biegunów transmitancji $G_o(z)$ w okręgu jednostkowym;

$Q - Z$ - liczba zer funkcji $M(z)$ (równa liczbie biegunów $G(z)$) w okręgu jednostkowym.

Na podstawie (7.14) widać, że prawdziwa jest zależność:

$$N = (Q - P) - (Q - Z) = Z - P, \quad (7.15)$$

gdyż N odnosi się tylko do obszaru objętego okręgiem jednostkowym.

W praktycznych zadaniach, w (7.14), w miejsce $M(z)$ wygodniej jest operować charakterystyką transmitancji układu otwartego $G_o(z)$ (gdyż jest ona bezpośrednio dostępna). Ponadto, ze względu na symetrię funkcji $G_o(e^{j\omega T_i})$ względem osi rzeczywistej, można ograniczyć zakres zmian kąta do przedziału: $0 \leq \omega T_i \leq \pi$ (przyrost kąta w (7.14) o pół okręgu). W konsekwencji, zmianę argumentu funkcji $G_o(e^{j\omega T_i})$: $\Delta\phi = \pi N$, należy liczyć względem punktu $(-1+j0)$, a nie względem początku układu współrzędnych. Kryterium Nyquista dla systemów dyskretnych sprowadza się więc do wykonania następujących kroków.

1. Obliczyć liczbę P biegunów transmitancji $G_o(z)$ układu otwartego (na przykład, za pomocą kryterium Routha-Hurwitza), które leżą poza okręgiem jednostkowym.
2. Określić przebieg funkcji $G_o(e^{j\omega T_i})$ w przedziale $0 \leq \omega T_i \leq \pi$ i wyznaczyć liczbę N półkolistych obejść przez tę funkcję punktu $(-1+j0)$ w kierunku ujemnej zmiany kąta (N ma znak ujemny dla przeciwnego kierunku).
3. Kryterium: na podstawie (7.15) widać, że układ zamknięty jest stabilny, jeśli $Z = 0$ (liczba zer funkcji charakterystycznej $M(z)$ leżących poza okręgiem jednostkowym), a więc:

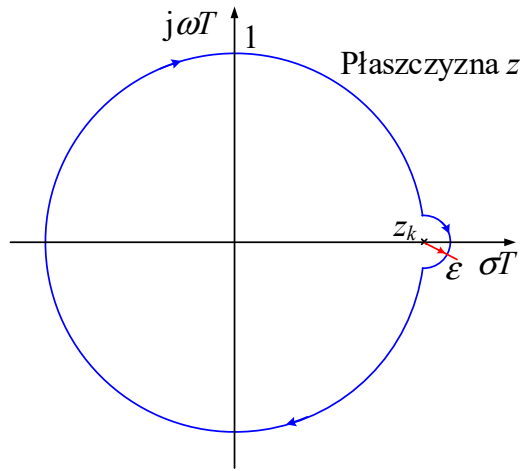
$$N = -P \quad (7.16)$$

Oznacza to, że trajektoria funkcji $G_o(e^{j\omega T_i})$ dla $0 \leq \omega T_i \leq \pi$, musi obejść punkt $-1 + j0$ w kierunku dodatnim P razy.

Specjalny przypadek występuje wówczas, gdy układ otwarty ma bieguny jednokrotne leżące na okręgu jednostkowym. Wówczas powstaje niejednoznaczność, gdyż

takie bieguny nie mogą być zakwalifikowane do żadnej z grup: stabilnych (leżących wewnątrz okręgu jednostkowego), czy też niestabilnych. Do rozwiązania tego problemu można zastosować podobne podejście, jak w przypadku układów ciągłych.

W charakterze przykładu rozważmy przypadek, gdy jednym z biegunów transmitancji układu otwartego jest wartość $z_k = 1 + j0$, co oznacza, że w mianowniku jego transmitancji występuje czynnik $(z - 1)$. Można wówczas włączyć ten biegun do grupy biegunów stabilnych, otaczając go konturem w postaci półokręgu leżącego na zewnątrz okręgu jednostkowego, przy czym, jego promień przyjmuje dowolnie małą wartość ε (rys. 7.5).



Rys. 7.5. Obejście bieguna transmitancji, leżącego na okręgu jednostkowym

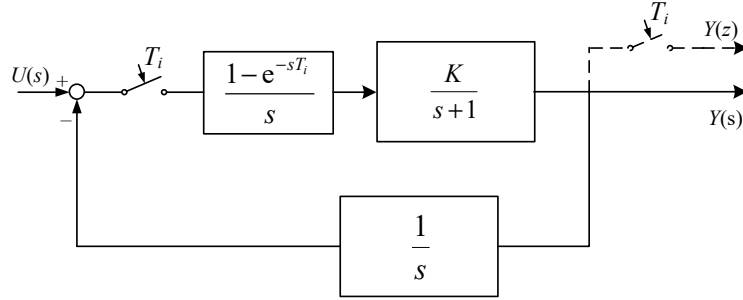
Kontur obchodzący biegun $z_k = 1$ można określić zależnością: $z = z_k + \varepsilon e^{j\varphi}$, dla zmian argumentu: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, $\varepsilon \rightarrow 0$, co oznacza, że czynnik w mianowniku transmitancji: $(z - 1) = \varepsilon e^{j\varphi}$. W ten sposób biegun $z_k = 1$ jest zaliczony do biegunów leżących wewnątrz okręgu jednostkowego (stabilnych). Trajektorię $G_o(e^{j\omega T_i})$ w pobliżu punktu z_k należy obliczać dla nowego argumentu: $G_o(z_k + \varepsilon e^{j\varphi})$.

Przykład 7.6. W przedstawionym układzie (rys. 7.6) okres impulsowania wynosi: $T_i = 1$ s. Określić zakres zmian współczynnika K , dla którego układ jest stabilny.

Transmitancja układu zamkniętego jest następująca:

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_o(z)} = \frac{(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{K}{s(s+1)} \right\}}{1 + (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{K}{s^2(s+1)} \right\}}.$$

Do badania stabilności układu zamkniętego metodą Nyquista można się ograniczyć do badania transmitancji układu otwartego (patrz przykład 7.2):



Rys. 7.6. Schemat rozpatrywanego układu dyskretnego

$$\begin{aligned}
 G_o(z) &= (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{K}{s^2(s+1)}\right\} = K(1 - z^{-1})\left(Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - Z\left\{\frac{1}{s}\right\} + Z\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}\right) \\
 &= K(1 - z^{-1})\left(\frac{T_i z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T_i}}\right) = K \frac{z(T_i + e^{-T_i} - 1) + 1 - e^{-T_i}(T_i + 1)}{(z-1)(z - e^{-T_i})}
 \end{aligned}$$

Transmitancja ma dwa bieguny, przy czym jeden z nich: $|e^{-T_i}| < 1$ dla $T_i > 0$, natomiast drugi biegun leży na okręgu jednostkowym, co stwarza sygnalizowane problemy (rys. 7.5).

Charakterystyka częstotliwościowa układu otwartego (Nyquista) może być zapisana następująco:

$$G_o(e^{j\omega T_i}) = K \frac{b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \Big|_{z=e^{j\omega T_i}},$$

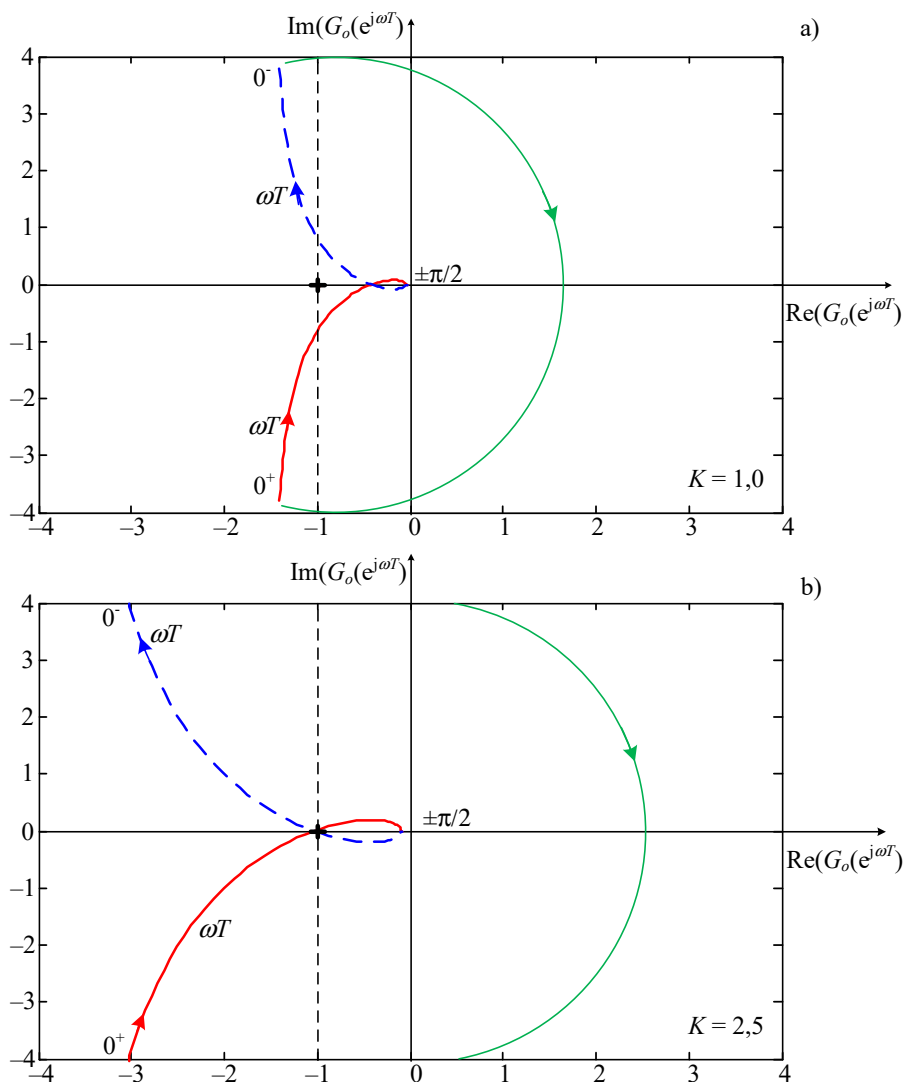
gdzie: $b_1 = T_i + e^{-T_i} - 1$, $b_0 = 1 - e^{-T_i}(T_i + 1)$, $a_2 = 1$, $a_1 = -(1 + e^{-T_i})$, $a_0 = e^{-T_i}$.

Trajektorie tej funkcji dla zmian pulsacji w granicach: $-\pi/(2T_i) \leq \omega \leq \pi/(2T_i)$ dla dwóch różnych wartości współczynnika wzmocnienia K są pokazane na rys. 7.7. Dla wartości kąta $\omega T_i = -\pi/2$, charakterystyka wyznacza punkt w początku układu współrzędnych. Wraz ze wzrostem kąta ωT_i trajektoria porusza się po linii przerywanej, dążąc do nieskończoności. Jest to rezultat napotkania bieguna ($z = 1$) dla $\omega T_i = 0$. Dla dodatnich wartości kąta w przedziale $0 < \omega T_i \leq \pi/2$ wykres jest symetrycznym odbiciem krzywej z przedziału ujemnych kątów względem osi rzeczywistej.

W przypadku, gdy obliczenia trajektorii funkcji $G_o(e^{j\omega T_i})$ zbliżają się do bieguna leżącego na okręgu jednostkowym ($z = 1$, $\omega T_i = 0$), analizę przebiegu tej trajektorii wygodnie jest prowadzić na bazie iloczynowej postaci transmitancji, gdzie, zgodnie z rys. 7.5, należy zastosować podstawienie: $z = 1 + \varepsilon e^{j\varphi}$, dzięki czemu biegun $z = 1$ został zaliczony do biegunów stabilnych. W ten sposób układ otwarty jest stabilny, gdyż oba jego bieguny leżą wewnątrz okręgu jednostkowego ($P = 0$). Obraz trajektorii układu otwartego w pobliżu bieguna $z = 1$ można otrzymać, analizując jego transmitancję ze wspomnianym podstawieniem:

$$G_o(e^{j\omega T_i}) = K \frac{b_1 z + b_0}{(z-1)(z - e^{-T_i})} \Big|_{z=1+\varepsilon e^{j\varphi}} = K \frac{b_1(1 + \varepsilon e^{j\varphi}) + b_0}{\varepsilon e^{j\varphi}(1 + \varepsilon e^{j\varphi} - e^{-T_i})} = D e^{-j\varphi},$$

gdzie: $D \rightarrow \infty$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Trajektoria zatacza więc półokrąg w kierunku ujemnym o średnicy zmierzającej do nieskończoności w prawej połowie płaszczyzny zespolonej wyznaczonej przez funkcję $G_o(e^{j\omega T_i})$ (rys. 7.7).



Rys. 7.7. Trajektorie funkcji $G_o(e^{j\omega T_i})$ dla $K = 1$ (a) oraz $K = 2,5$ (b) przy zmianach kąta: $-\pi/2 \leq \omega T_i \leq \pi/2$

Układ zamknięty pozostaje stabilny, dopóki trajektoria transmitancji układu otwartego nie obejmie punktu $(-1 + j0)$. Tylko wtedy $N = 0$, co, zgodnie z (7.16), wyznacza liczbę biegunów układu zamkniętego $Z = 0$ (która jest równa liczbie zer funkcji charakterystycznej) i układ zamknięty jest stabilny.

W celu określenia granicznej wartości współczynnika K należy obliczyć punkty przecięcia trajektorii $G_o(e^{j\omega T_i})$ z osią rzeczywistą, które można wyznaczyć z równania:

$\text{Im}(G_o(e^{j\omega T_i})) = 0$, a więc:

$$\begin{aligned} \text{Im}(G_o(e^{j\omega T_i})) &= \text{Im} \left(K \frac{b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \Big|_{z=e^{j\omega T_i}} \right) = \text{Im} \left(K \frac{b_1 e^{j\omega T_i} + b_0}{a_2 e^{j2\omega T_i} + a_1 e^{j\omega T_i} + a_0} \right) \\ &= \text{Im} \left(K \frac{b_0 + b_1 \cos \omega T_i + j b_1 \sin \omega T_i}{a_0 + a_1 \cos \omega T_i + a_2 \cos 2\omega T_i + j(a_1 \sin \omega T_i + a_2 \sin 2\omega T_i)} \right) = 0 \end{aligned}$$

w przedziale $0 < \omega T < \pi/2$ w punkcie $(-1+j0)$.

Obliczoną w ten sposób pulsację $\omega = \omega_0$ należy następnie podstawić do równania:

$$\text{Re} \left(K \frac{b_0 + b_1 \cos \omega_0 T_i + j b_1 \sin \omega_0 T_i}{a_0 + a_1 \cos \omega_0 T_i + a_2 \cos 2\omega_0 T_i + j(a_1 \sin \omega_0 T_i + a_2 \sin 2\omega_0 T_i)} \right) = -1,$$

skąd wyznacza się wartość graniczną wzmocnienia K .

Rozwiązanie tego zadania nie jest proste bez zastosowania odpowiednich narzędzi numerycznych. Uzyskano następującą graniczną wartość wzmocnienia K dla układu zamkniętego: $K = 2,392$ przy pulsacji $\omega = 1,324$ 1/s.

Zauważmy, że znając charakterystykę amplitudowo-fazową układu otwartego $G_o(e^{j\omega T_i})$ (charakterystyka Nyquista), można w pełni stosować znane z systemów ciągłych narzędzia do oceny zapasu fazy i zapasu wzmocnienia układu. Następny przykład pokazuje sposób określania tych charakterystyk.

Przykład 7.7. W przedstawionym układzie (rys. 7.8) okres impulsowania wynosi: $T_i = 0,25$ s. Określić zakres zmian współczynnika K , dla którego układ jest stabilny. Opóźnienie czasowe $\tau = mT_i$, $m = 2$.

Transmitancja układu zamkniętego jest następująca:

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_o(z)} = \frac{(1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{K e^{-\tau s}}{s(s+1)} \right\}}{1 + (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{K e^{-\tau s}}{s(s+1)} \right\}}, \text{ przy czym:}$$

$$G_o(z) = G_1(z) = K(1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{e^{-\tau s}}{s(s+1)} \right\} = K(1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{e^{-mT_i s}}{s} - \frac{e^{-mT_i s}}{s+1} \right\},$$

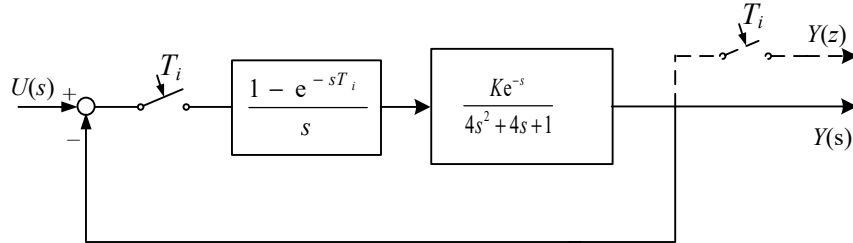
gdzie $m = \tau/T_i$ – liczba całkowita (liczba kroków opóźnienia).

Dalej, korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu w odniesieniu do przekształcenia Laplace'a, otrzymamy:

$$G_o(z) = K(1 - z^{-1})Z \left\{ (t - mT_i)^* - e^{-(t-mT_i)^*} \right\} = K(z-1)z^{-m} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-T_i}} \right) = \frac{K(1 - e^{-T_i})}{z^m(z - e^{-T_i})}$$

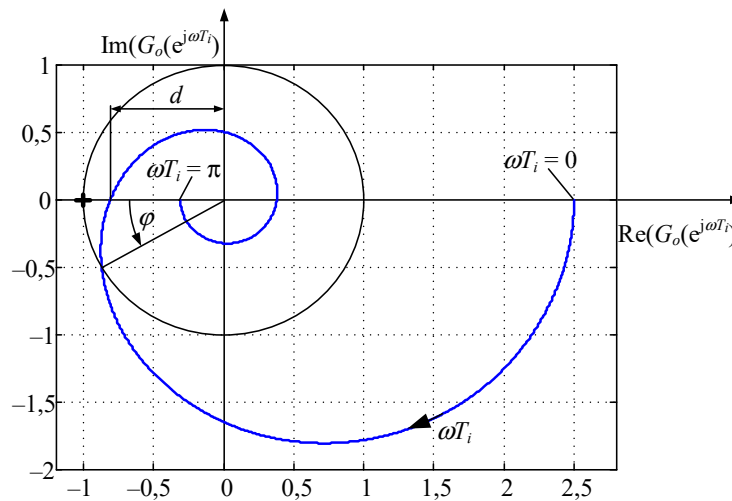
Po podstawieniu zadanych wielkości otrzymamy następującą postać widmową:

$$G_o(e^{j\omega T_i}) = \frac{K(1 - e^{-0,25})}{z^2(z - e^{-0,25})} \Big|_{z=e^{j\omega T_i}} = \frac{K(1 - e^{-0,25})}{e^{j2\omega T_i}(e^{j\omega T_i} - e^{-0,25})}.$$



Rys. 7.8. Schemat układu dyskretnego

Wykres tej funkcji w przedziale zmian kąta $0 \leq \omega T_i \leq \pi$ dla $K = 2,5$ jest pokazany na rys. 7.9. Dla ujemnych wartości kąta ωT_i : $-\pi < \omega T_i < 0$, charakterystyka będzie zwierciadlanym odbiciem wykresu z rys. 7.9 względem osi rzeczywistej.



Rys. 7.9. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu z opóźnieniem

Widać, że analizowany układ dla wybranego wzmocnienia jest stabilny, gdyż:

- układ otwarty jest stabilny (dwa zerowe bieguny leżące w początku układu współrzędnych oraz trzeci biegun: $z = e^{-0,25}$);
- trajektoria transmitancji układu otwartego nie obejmuje punktu $(-1+j0)$.

Na rys. 7.9 są także pokazane wielkości związane z zapasem fazy: kąt ϕ , oraz z zapasem wzmocnienia, który jest określany za pomocą relacji $1/d$. Ich znaczenie i sposób obliczania są identyczne, jak w przypadku układów ciągłych.

Sposób określania wartości granicznej wzmocnienia K jest podobny, jak w przykładzie 7.6:

$$\operatorname{Im}(G_o(e^{j\omega T_i})) = \frac{K(1 - e^{-0,25})}{(\cos 2\omega T_i + j\sin 2\omega T_i)(\cos \omega T_i - e^{-0,25} + j\sin \omega T_i)} = 0,$$

co można uprościć do postaci:

$$\operatorname{Im}(G_o(e^{j\omega T_i})) = \sin \omega T_i (4 \cos^2 \omega T_i - 2e^{-0,25} \cos \omega T_i - 1) = 0.$$

Uzyskuje się stąd cztery rozwiązania w przedziale $0 \leq \omega T_i \leq \pi$:

– $\omega T_i = 0$ oraz $\omega T_i = \pi$ z warunku $\sin \omega T_i = 0$ oraz:

$$- \omega T_i = \arccos \left(\frac{e^{-0,25} \pm \sqrt{4 + e^{-0,5}}}{4} \right).$$

$$\text{Właściwym rozwiązaniem jest: } \omega T_i = \arccos \left(\frac{e^{-0,25} - \sqrt{4 + e^{-0,5}}}{4} \right) = 0,7506.$$

Po podstawieniu do równania:

$$\operatorname{Re}(G_o(e^{j\omega T_i})) = \frac{K(1 - e^{-0,25})}{(\cos 2\omega T_i + j\sin 2\omega T_i)(\cos \omega T_i - e^{-0,25} + j\sin \omega T_i)} = -1$$

otrzymamy graniczną wartość wzmocnienia: $K = 3,0911$.

W przypadku stabilności układu otwartego kryterium Nyquista może być także stosowane z wykorzystaniem charakterystyk logarytmicznych amplitudy i fazy układu otwartego (charakterystyk Bodego). Kolejny przykład ilustruje zastosowanie tej techniki do oceny stabilności układu rozważanego w przykładzie 7.7.

Przykład 7.8. Określić stabilność układu zamkniętego z przykładu 7.7 za pomocą kryterium logarytmicznego. Zachować wszystkie podane tam parametry układu.

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych, kryterium logarytmiczne może być stosowane do oceny stabilności układów zamkniętych, w których układ otwarty jest stabilny (kryterium lewej strony). Tak właśnie jest w rozważanym przypadku, gdyż transmitancja układu otwartego:

$$G_o(z) = \frac{K(1 - e^{-T_i})}{z^m(z - e^{-T_i})},$$

ma $m = 2$ bieguny zerowe oraz jeden biegun $z = e^{-0,25} < 1$.

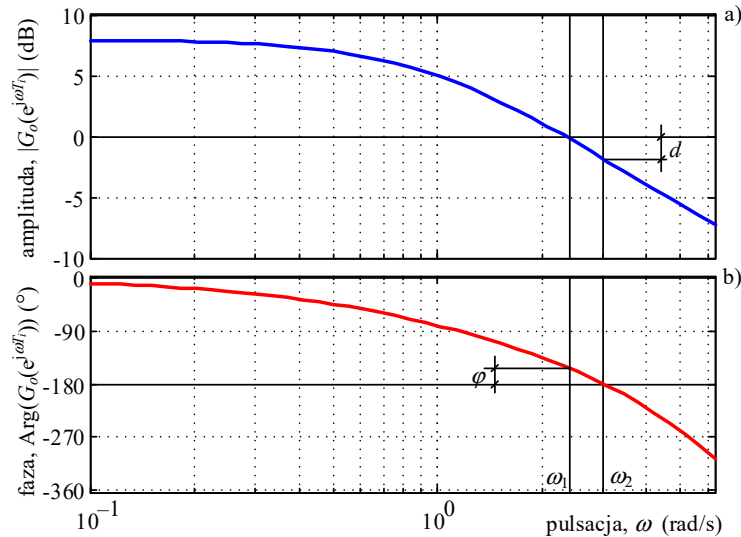
Charakterystykę logarytmiczną amplitudy i fazy otrzymuje się na podstawie transmitancji widmowej układu otwartego:

$$G_o(e^{j\omega T_i}) = \frac{K(1 - e^{-0,25})}{e^{j2\omega T_i}(e^{j\omega T_i} - e^{-0,25})}, \text{ przedziale } 0 \leq \omega T_i \leq \pi, \text{ przy czym:}$$

$$20 \log |G_o(e^{j\omega T_i})| = 20 \log \left| \frac{K(1 - e^{-0,25})}{e^{j2\omega T_i}(e^{j\omega T_i} - e^{-0,25})} \right|, \quad \operatorname{Arg}(G_o(e^{j\omega T_i})) = -\operatorname{Arg}(e^{j2\omega T_i}(e^{j\omega T_i} - e^{-0,25})).$$

Przebieg tych funkcji w logarytmicznej skali pulsacji dla $K = 1$ jest pokazany na rys. 7.10. Widać, że charakterystyka fazy nie zależy od K . Pokazane są charakterystyczne wartości pulsacji:

$\omega = \omega_1$ – gdy amplituda charakterystyki ma wartość 1 (na rys. 7.9 trajektoria przecina okrąg jednostkowy);
 $\omega = \omega_2$ – gdy charakterystyka przyjmuje wartość -180° (na rys. 7.9 trajektoria pierwszy raz przecina oś rzeczywistą po ujemnej stronie płaszczyzny).



Rys. 7.10. Charakterystyka logarytmiczna amplitudy (a) i fazy (b) układu

W ten sposób wyznaczone zostają: zapas fazy φ oraz zapas wzmocnienia, wyznaczony przez wielkość $1/d$. Widać, że układ zamknięty jest stabilny, gdyż ma dostateczny zapas fazy i zapas wzmocnienia.

7.3. Zastosowanie transformacji układów

Pokazany w p. 7.2.2 sposób zastosowania przekształcenia biliniowego do badania stabilności układów dyskretnych za pomocą kryterium Routha-Hurwitza może być rozszerzony także na inne kryteria odnoszące się do układów ciągłych. Do badania właściwości układów dynamicznych można również stosować inne sposoby transformacji, które były przedstawione w p. 6.8. W kolejnych przykładach pokazane są możliwości zastosowania tych transformacji do badania właściwości dynamicznych i stabilności układów.

Przykład 7.9. Zbadać wpływ okresu impulsowania T_i na stabilność układu rozpatrywanego w przykładzie 6.19.

Analizowany układ jest pokazany na rys. 6.25. Transmittancja układu otwartego, określona według metody ekwiwalentu ekstrapolacji zerowego rzędu, jest następująca:

$$G_o(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}, \text{ gdzie: } b_1 = \left(aT_i - (1 - e^{-aT_i}) \right) \frac{b}{a^2}, \quad b_0 = \left(1 - e^{-aT_i} (1 + aT_i) \right) \frac{b}{a^2},$$

$$a_1 = -(1 + e^{-aT_i}), \quad a_0 = e^{-aT_i}, \quad b = 65000, \quad a = 360.$$

Łatwo obliczyć, że transmitancja układu otwartego ma następujące bieguny: $z_1 = 1$, $z_2 = e^{-aT_i}$. Jest to zatem układ stabilny nieasymptotycznie (niestabilny w sensie *BIBO*).

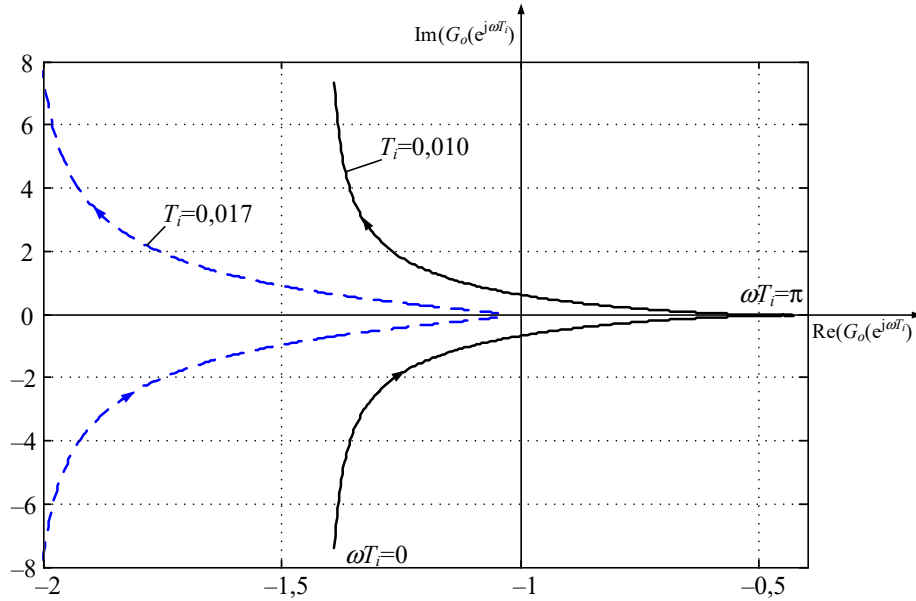
Stabilność układu zamkniętego określimy według kryterium Nyquista. W takim przypadku można stosować procedurę, która jest ilustrowana na rys. 7.5. Przyjmuje się tam, że krytyczny biegun $z_1 = 1$ leży wewnątrz okręgu jednostkowego, co prowadzi do stabilnego układu otwartego. W takim przypadku badanie stabilności układu zamkniętego sprowadza się do sprawdzenia, czy trajektoria transmitancji widmowej $G_o(e^{j\omega T_i})$ na płaszczyźnie Nyquista obejmuje punkt $-1 + j0$?

Przebiegi charakterystyk Nyquista dla dwóch różnych okresów próbkowania: $T_i = 0,01$ oraz $T_i = 0,017$ są pokazane na rys. 7.11. Transmitancje układu otwartego dla tych wartości są następujące:

$$G_o(z) = \frac{1,318z + 0,4385}{z^2 - 1,027z + 0,02732} \quad \text{- dla } T_i = 0,01,$$

$$G_o(z) = \frac{2,569z + 0,4937}{z^2 - 1,002z + 0,02198} \quad \text{- dla } T_i = 0,017.$$

Dla $T_i = 0,017$ układ zamknięty jest niestabilny, gdyż charakterystyka układu otwartego obejmuje punkt $-1 + j0$ (rys. 7.11).



Rys. 7.11. Charakterystyki Nyquista dla dwóch wartości okresów próbkowania

Analizę tę można potwierdzić przez badanie w obu przypadkach biegunów transmitancji układu zamkniętego (przykład 6.19):

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + (a_1 + b_1)z + a_0 + b_0}, \text{ przy czym:}$$

- dla $T_i = 0,01$:

$$G(z) = \frac{1,318z + 0,4385}{z^2 + 0,2904z + 0,4658}, \quad z_{1,2} = -0,1452 \pm j0,6669 - \text{układ stabilny,}$$

- dla $T_i = 0,017$:

$$G(z) = \frac{2,569z + 0,4937}{z^2 + 1,567z + 0,4959}, \quad z_1 = -1,127, \quad z_2 = -0,440 - \text{układ niestabilny.}$$

Innym sposobem porównania zachowania się badanego układu dla wybranych okresów impulsowania jest analiza funkcji wagi (odpowiedzi impulsowej). Odpowiedź czasowa układu zamkniętego o podanej transmitancji została określona w przykładzie 6.19:

$$y(k) = b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2) - (a_1 + b_1)y(k-1) - (a_0 + b_0)y(k-2),$$

co przyjmuje natępującą postać funkcji wagi ($g(k) = y(k)$):

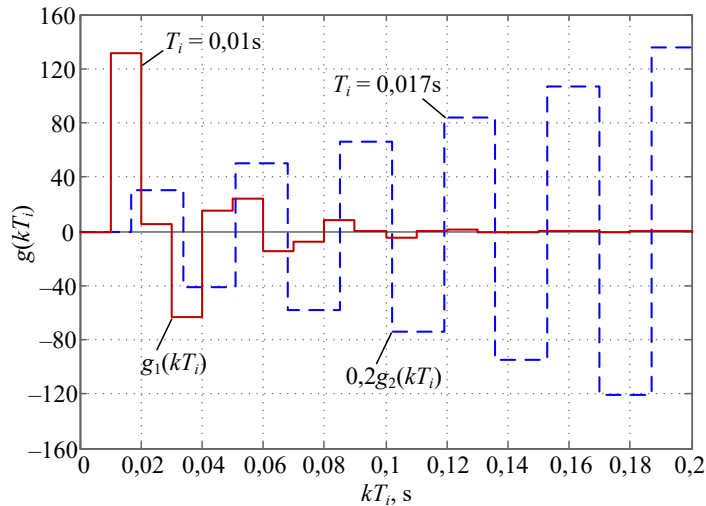
- dla $T_i = 0,01$:

$$g_1(k) = 1,318u(k-1) + 0,4385u(k-2) - 0,2904g_1(k-1) - 0,4658g_1(k-2),$$

- dla $T_i = 0,017$:

$$g_2(k) = 2,569u(k-1) + 0,4937u(k-2) - 1,567g_2(k-1) - 0,4959g_2(k-2).$$

W charakterze warunków początkowych w obu przypadkach należy przyjąć: $g(0) = g(-1) = 0$, natomiast funkcja wymuszająca $u(k)$ ma wartości zerowe, za wyjątkiem $u(0) = 1/T_i$ (dyskretny impuls Diraca). Uzyskane przebiegi są pokazane na rys. 7.11.



Rys. 7.12. Przebiegi funkcji wagi badanego układu

Można zauważyć, że dla $T_i = 0,017$ amplituda funkcji wagi układu narasta z każdym impulsem, co jest charakterystyczne dla układu niestabilnego (nie są spełnione warunki (7.1), (7.2)).

Transformacja układu ciągłego do dyskretnego może być obliczona za pomocą programu MATLAB (patrz przykład 7.11).

Przy ocenie stabilności układów dyskretnych, utworzonych na drodze transformacji układów ciągłych, często korzysta się z twierdzenia o stabilności układu dyskretnego, utworzonego ze stabilnego systemu ciągłego za pomocą transformacji metodą trapezów (również zmodyfikowaną): jeśli system ciągły jest stabilny, to także stabilny pozostaje utworzony z niego system dyskretny. Należy zauważyć, że zasada ta bezpośrednio nie obejmuje układów zamkniętych: jeśli dyskretny system otwarty o transmitancji $G_o(z) = G_1(z) H(z)$ jest utworzony na bazie stabilnego systemu ciągłego o transmitancji $G_o(s)$, to zamknięty system dyskretny:

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{1 + H(z)G_1(z)}$$

niekoniecznie jest stabilny. Ilustruje to kolejny przykład.

Przykład 7.10. Dany jest układ ciągły o transmitancji:

$$G_o(s) = \frac{1}{(s+0,5)(s+0,1-j0,5)(s+0,1+j0,5)} = \frac{1}{s^3 + 0,7s^2 + 0,36s + 0,13}.$$

Zbadać stabilność dyskretnego układu zamkniętego z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym, który powstał przez transformację układu ciągłego za pomocą metody trapezów. Przyjąć, że w torze głównym układ ciągły jest impulsowany z okresem $T_i = 0,1$ s.

Transmitancja układu dyskretnego jest obliczana na podstawie podanej transmitancji układu ciągłego za pomocą transformacji (6.72):

$$G_o(z) = \frac{1}{s^3 + 0,7s^2 + 0,36s + 0,13} \bigg|_{s=\frac{2}{T_i} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,0001207z^3 + 0,000362z^2 + 0,000362z + 0,0001207}{z^3 - 2,929z^2 + 2,861z - 0,9324}$$

Zauważmy, że układ ciągły jest stabilny, gdyż bieguny transmitancji $G_o(s)$ mają ujemne części rzeczywiste: $s_1 = -0,5$, $s_{23} = -0,1 \pm j0,5$.

Podobnie bieguny transmitancji $G_o(z)$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego:

$$z_{12} = 0,9888 \pm j0,0495, z_3 = 0,9512.$$

Transmitancja układu zamkniętego:

$$G(z) = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)} = \frac{N(z)}{M(z)}$$

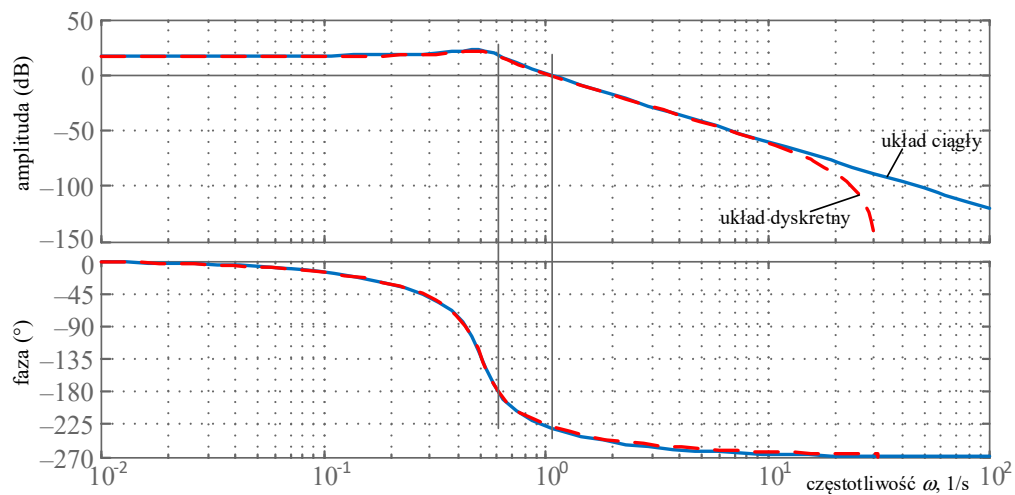
ma funkcję charakterystyczną: $M(z) = z^3 - 2,928z^2 + 2,862z - 0,9323$, której pierwiastki są następujące: $z_{12} = 1,0203 \pm j0,0963$, $z_3 = 0,8875$.

Układ zamknięty jest więc niestabilny, gdyż dwa bieguny transmitancji leżą poza okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie z . Potwierdzają to charakterystyki częstotliwościowe Bodego

(rys. 7.13). Widać, że moduł transmitancji układu otwartego jest większy od 1, gdy jej faza przekracza kąt -180° .

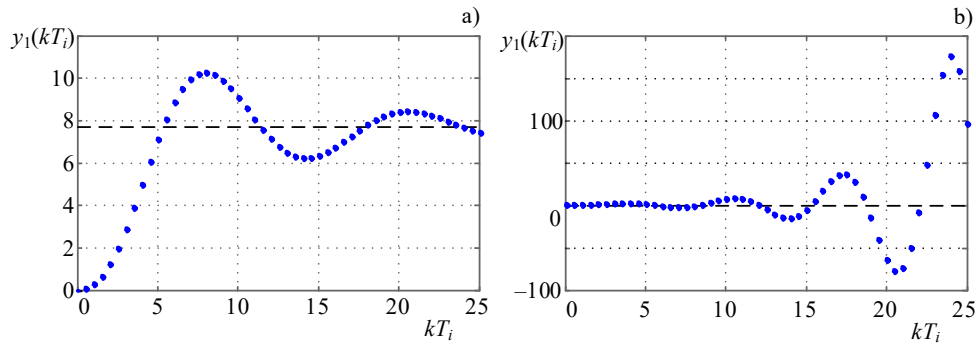
Powyższe obliczenia można łatwo wykonać w pakiecie MATLAB za pomocą następującego programu.

```
T=0.1;
% system ciagly otwarty
num=[1];
den=[1 0.7 0.36 0.13];
sysc=tf(num,den);
bode(sysc,{0.01 100.0});grid;
%
% system dyskretny otwarty
figure;
sysd=c2d(sysc,T,'tustin');
bode(sysd,{0.01 100.0});grid;
[nud,ded]=tfdata(sysd,'v');
rr=roots(ded),      % bieguny układu otwartego
figure
step(sysd,25);grid; % odpowiedź na skok jednostkowy
%
% system dyskretny zamknięty
sysz=feedback(sysd,1);
[nuz,dez]=tfdata(sysz,'v');
rz=roots(dez),      % bieguny układu zamkniętego
figure
step(sysz,25);grid; % odpowiedź na skok jednostkowy
```



Rys. 7.13. Charakterystyki częstotliwościowe dyskretnego układu otwartego

Odpowiedzi na skok jednostkowy dyskretnego układu otwartego i zamkniętego są pokazane na rys. 7.14. Również tu widać, że układ zamknięty jest niestabilny.



Rys. 7.14. Odpowiedzi skokowe badanego dyskretnego układu otwartego (a) i zamkniętego (b)

7.4. Właściwości dynamiczne systemów dyskretnych

Podobnie jak w systemach ciągłych, charakter stanów dynamicznych w systemach dyskretnych bezpośrednio zależy od ich transmitancji. Różnica wynika z występowania impulsatora w systemie dyskretnym, co może utrudniać analizę stanów przejściowych w przypadku takich charakterystyk, jak przeregulowanie, czas narastania i innych.

Przykład 7.11. Zbadać odpowiedź na skok jednostkowy układu rozpatrywanego w przykładach 6.19 (rys. 6.25) oraz 7.9, przy różnych okresach próbkowania T_i .

Określona w przykładzie 7.9 transmitancja układu otwartego jest następująca:

$$G_o(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0},$$

gdzie:

$$b_1 = \frac{b}{a^2} (aT_i - (1 - e^{-aT_i})), \quad b_0 = \frac{b}{a^2} (1 - e^{-aT_i} (1 + aT_i)),$$

$$a_1 = -(1 + e^{-aT_i}), \quad a_0 = e^{-aT_i}.$$

Transmitancja ta została wyznaczona przez zastosowanie ekwiwalentu ekstrapolacji zerowego rzędu (6.63). W programie MATLAB jest to wykonywane za pomocą procedury `c2d` z parametrem `'zoh'`. Pełny program obliczeń i wykreślenia poszczególnych charakterystyk jest następujący.

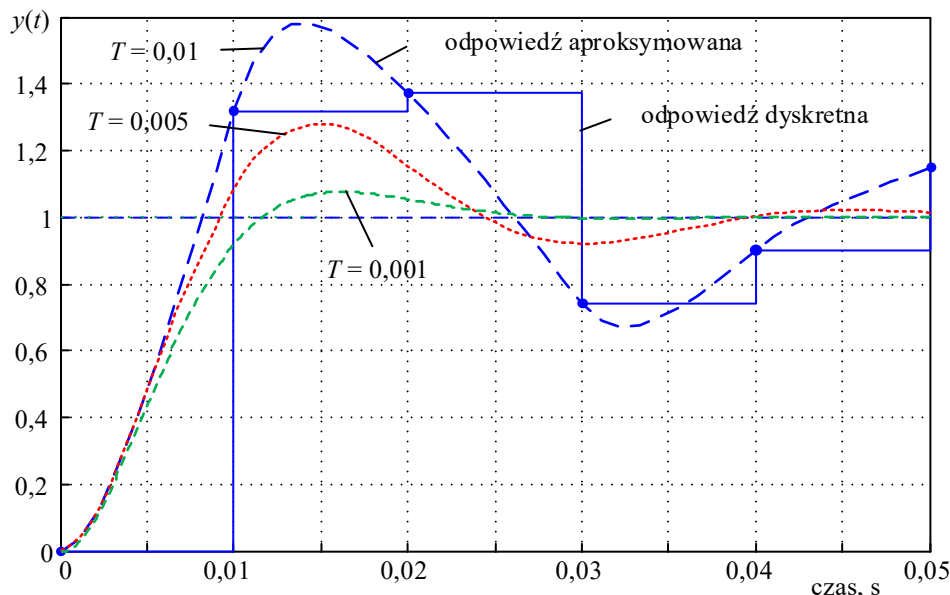
```
T=0.01;
b=65000.0;
a=360;

% układ ciągły otwarty
num=[b];
den=[1 a 0];
sys=tf(num,den);
```

```
% układ dyskretny otwarty
figure
syd=c2d(syc,T,'zoh');
nyquist(syd);grid;

% układ dyskretny zamknięty
syz=feedback(syd,1);
figure
ripple0(num,den,1,1,T,9,[0 0.05 0 1.6]);
```

Procedura `ripple0` jest utworzona na bazie programu MATLAB z [18, 70]. Umożliwia ona odtworzenie odpowiedzi ciągłej układu dyskretnego o znanej transmitancji num/den . Odpowiedzi dyskretny towarzyszy ciągły przebieg, który jest miejscem położenia dyskretnych odpowiedzi przy różnych warunkach początkowych wystąpienia pobudzającego skoku jednostkowego (rys. 7.15). Widać, że poza punktami próbkowania występuje różnica w przebiegach: ciągłym i dyskretnym. Występujące oscylacje (ang. *ringing* (bryt.), *ripple* (USA)) mogą być źródłem niekorzystnych efektów w pracy układu dyskretnego.



Rys. 7.15. Odpowiedzi układu na skok jednostkowy przy różnych okresach próbkowania

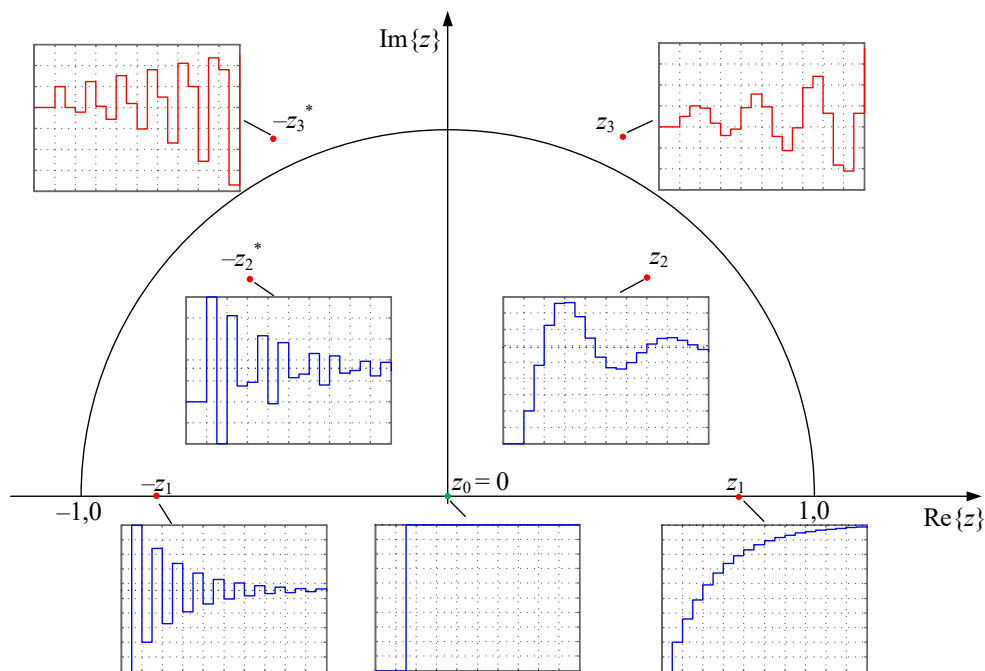
Z przebiegu odpowiedzi na skok jednostkowy na rys. 7.15 widać, że w miarę wzrostu okresu próbkowania układ zbliża się do granicy stabilności. Potwierdza to także analiza prowadzona w przykładzie 7.9.

Charakter przebiegu odpowiadającego odpowiedzi na skok jednostkowy układu dyskretnego jest ściśle związany z miejscem położenia biegunów jego transmitancji na płaszczyźnie z . Pokazuje to rys. 7.16.

Analizując przedstawione zależności, można sformułować następujące uwagi:

- układy o transmitancji z biegunami o ujemnych częściach rzeczywistych charakteryzują się dużymi oscylacjami w stanie przejściowym; rzeczywiste bieguny o wartościach ujemnych (ujemna oś rzeczywista) prowadzą do oscylacji o zmieniającym się kierunku w kolejnych próbkach, które się nasilają w miarę zbliżania biegunów do wartości -1 (efekt ‘dzwonienia’, ang. *ringing*); oscylacje występują nawet w przypadku układów 1-go rzędu, co nie ma miejsca w układach ciągłych;
- pary biegunów zespolonych o dodatnich częściach rzeczywistych prowadzą do odpowiedzi oscylacyjnych (podobnie jak w układach ciągłych);
- stan przejściowy odpowiedzi układu wydłuża się, gdy bieguny transmitancji zbliżają się do okręgu jednostkowego;
- jeśli wszystkie bieguny transmitancji leżą w początku układu współrzędnych, to odpowiedź przejściowa ma skończony czas trwania (ang. *deadbeat*).

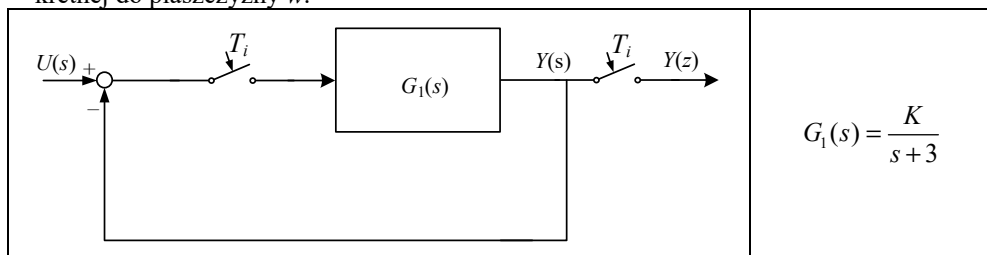
Ta ostatnia cecha jest charakterystyczna dla układów o skończonej odpowiedzi impulsowej (SOI): odpowiedź zależy tylko od bieżącej i poprzednich próbek wielkości wejściowej (a nie od poprzednich próbek odpowiedzi (6.41)). Takie właściwości układu są zazwyczaj pożądane, gdyż odpowiedź ustalona jest osiągnięta w najkrótszym czasie.



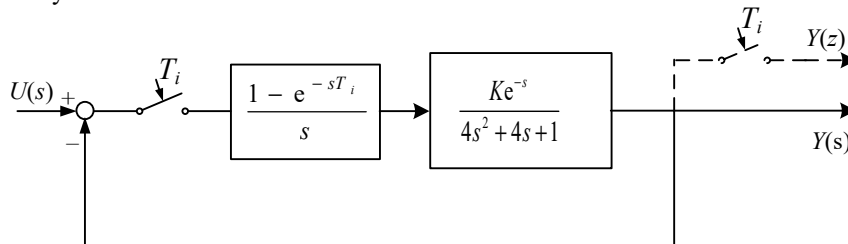
Rys. 7.16. Charakter odpowiedzi układu dyskretnego w zależności od położenia biegunów transmitancji na płaszczyźnie z

Zadania

- 7.1. W przedstawionym układzie okres impulsowania $T_i = 0,02s$. Określić przedział zmian współczynnika wzmocnienia K , dla którego układ jest stabilny. Zastosować następujące kryteria:
- kryterium Jury'ego po wprowadzeniu na wejście układu ciągłego ekstrapolatora zero-wego rzędu;
 - kryterium Routha-Hurwitza po wykonaniu transformacji biliniowej transmitancji dyskretnej do płaszczyzny w .



- 7.2. W układzie z zadania 7.1 na wejściu obiektu reprezentowanego ciągłą transmitancją umieszczony został ekstrapolator zerowego rzędu. Korzystając z warunku położenia pierwiastków funkcji charakterystycznej zastępczej transmitancji układu, określić przedział zmian wartości współczynnika K , który zapewnia jego stabilność.
- 7.3. Powtórzyć obliczenia z zadania 7.2 dla następujących parametrów układu:
- $$G_1(s) = \frac{K}{s(s+10)}, \quad T_i = 0,05s.$$
- 7.4. W podanym układzie okres impulsowania $T_i = 0,2s$. Posługując się kryterium Nyquista określić zakres zmian współczynnika wzmocnienia K , przy którym układ zamknięty jest stabilny.



- 7.5. Zbadać stabilność układów o podanych transmitancjach. Zastosować metodę algebraiczną (obliczanie biegunów) oraz Routha-Hurwitza.

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}, \quad G(z) = \frac{z^2(2z - 1,5)}{(z + 0,4)(z - 0,5)^2}, \quad G(z) = \frac{1}{z^2 - z + 1},$$

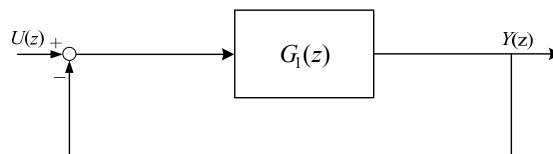
$$G(z) = \frac{5(z - 2)}{(z - 0,1)(z - 0,8)}, \quad G(z) = \frac{10(z + 0,1)}{(z - 0,7)(z - 0,9)}, \quad G(z) = \frac{z - 1}{z^2 - z + 2}.$$

- 7.6. Określić stabilność układów określonych za pomocą następujących równań różnicowych:
 $y(k+2) - 0,8y(k+1) + 0,07y(k) = 2u(k+1) + 0,2u(k)$,
 $y(k) + 0,1y(k-1) + 0,9y(k-2) = 3u(k-2)$.

Zastosować warunek *BIBO* oraz kryterium algebraiczne (położenie biegunów transmitancji).

- 7.7. W podanym układzie określić wartość wzmocnienia K , dla którego zapas wzmocnienia wynosi 1,2. Narysować trajektorię układu na płaszczyźnie Nyquista.

$$G_1(z) = \frac{K}{z^2 - 0,1z + 0,8}, \quad G_1(z) = \frac{K - z}{z^2 - z + 1,5}, \quad G_1(z) = \frac{0,1 + Kz}{z^2 + z + 0,5}$$



- 7.8. Obserwowany proces dyskretny jest określony za pomocą następującej transmitancji:

$$G(z) = \frac{2,7z^{-2} + 8,1z^{-3}}{1 - 0,5z^{-1} + 0,06z^{-2}}$$

- Określić równanie różnicowe odpowiadające tej transmitancji.
 - Określić odpowiedź układu na skok jednostkowy z zastosowaniem równania różnicowego.
 - Określić odpowiedź na skok jednostkowy z zastosowaniem odwrotnego przekształcenia Z .
 - Obliczyć wartość ustaloną odpowiedzi na skok jednostkowy.
- 7.9. Układ dyskretny jest opisany za pomocą następującego równania różnicowego:
 $y(k) - y(k-1) + 0,21y(k-2) - u(k-2) = 0$
- Określić odpowiedź $y(k)$ dla następujących warunków początkowych: $y(0) = y(1) = 0$, $u(0) = 1$, $u(k) = 0$ dla $k \geq 1$.
 - Jaka jest wartość ustalona odpowiedzi y na skok jednostkowy?

8. OPIS LINIOWYCH SYSTEMÓW W PRZESTRZENI STANÓW

8.1. Wprowadzenie

W klasycznym podejściu do opisu systemów dynamicznych stosowany jest język analizy matematycznej w postaci równań różniczkowych, które wiążą wielkości wejściowe i wyjściowe stosownie do konfiguracji i elementów opisywanego układu. Rząd utworzonego równania różniczkowego wskazuje na rząd samego systemu. Omawiane w rozdz. 2 techniki (w odniesieniu do systemów liniowych) pozwalają określić rozwiązanie takich równań przy dowolnym wymuszeniu. Zastosowanie rachunku operatorowego do tych równań daje możliwość posługiwania się transmitancją (funkcją przejścia), co prowadzi do łatwej analizy właściwości czasowych i częstotliwościowych opisywanych systemów (rozdz. 3), a także ich projektowania. Rząd transmitancji jest bezpośrednio związany z rzędem pierwotnego równania różniczkowego opisującego ten system.

Takie podejście jest w zasadzie ograniczone do układów z jednym wejściem i jednym wyjściem (*SISO*). Jest to istotne ograniczenie, które można w prosty sposób usunąć przez wprowadzenie opisu dynamiki systemu za pomocą zmiennych stanu. Podstawową zasadą w takim opisie dynamiki jest stosowanie równań różniczkowych pierwszego rzędu. Jest oczywiste, że układy rzędu n , wyższego niż pierwszy, będą zapisywane w postaci odpowiedniego układu n równań różniczkowych rzędu pierwszego. Na przykład, jeśli układ jest opisany równaniem:

$$y''(t) + 5y'(t) + y(t) = u(t), \text{ gdzie } u(t) - \text{wymuszenie,}$$

to stosując podstawienie:

$$y'(t) = p(t),$$

można łatwo wyjściowe równanie drugiego rzędu przekształcić do dwóch równań pierwszego rzędu:

$$y'(t) = p(t)$$

$$p'(t) = -5p(t) - y(t) + u(t)$$

Uzyskane równanie można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix},$$

gdzie wielkości tworzące wektor: $\mathbf{x}^T = [y(t) \ p(t)]^T$ przyjęto nazywać zmiennymi stanu, które definiują przestrzeń zmiennych stanu, a zdefiniowane macierzowe równanie różniczkowe jest równaniem stanu.

Przyjęta nazwa: zmienne stanu ma swoje uzasadnienie w tym, że wektor stanu $\mathbf{x}$, utworzony z tych właśnie zmiennych, określa stan układu w dowolnym czasie t . Jest on określany w wyniku rozwiązania równania stanu dla zadanych warunków początkowych i wartości zmiennej niezależnej t . Opis dynamiki systemu może być traktowany jako śledzenie jego trajektorii w n -wymiarowej przestrzeni stanów. Jeśli zmienne stanu zostaną tak wybrane, że każda zmienna jest pochodną innej zmiennej stanu, to taką przestrzeń stanową nazywa się przestrzenią fazową.

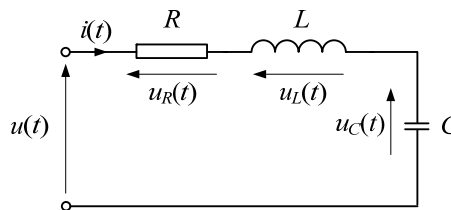
Powyższe podejście można stosować do układów o wielu wejściach i wyjściach (*MIMO*), w odniesieniu do systemów ciągłych i dyskretnych, a także w zapisie operatorowym. Zapis dynamiki w postaci równań stanu można również skutecznie stosować w odniesieniu do systemów nieliniowych [26, 43].

Z metodą zmiennych stanu związana jest bardzo efektywna teoria analizy i projektowania układów dynamicznych (teoria sterowania), mająca bardzo szerokie zastosowanie. W niniejszym rozdziale przedstawione jest krótkie wprowadzenie do tej teorii.

8.2. Opis dynamiki systemu za pomocą równań stanu

8.2.1. Struktura równań zmiennych stanu

W rozważaniach prowadzonych w rozdz. 2 zakładaliśmy, że sygnał wyjściowy dla danego systemu *SISO* o funkcji wagi $g(t)$ może być określony za pomocą zależności splotowej (2.35). W tym wyrażeniu, zgubiona jest informacja o strukturze wewnętrznej systemu, którą można wykorzystać przy bardziej szczegółowej jego analizie. Ponadto, zapis splotowy relacji wejście – wyjście komplikuje się dla systemów o większej liczbie wejść i wyjść. W takim przypadku korzystnie jest stosować model systemu w postaci równań stanu. Jego ideę można prześledzić na przykładzie obwodu elektrycznego RLC z rys. 8.1. Jest to klasyczny przykład z elektrotechniki, chociaż z punktu widzenia dynamiki jest on równoważny układowi mechanicznemu, jaki był rozważany na początku rozdz. 2 (rys. 2.1).



Rys. 8.1. Obwód elektryczny RLC

Napięcie zasilające obwód $u(t)$ rozkłada się na trzy składniki:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \quad (8.1)$$

gdzie: $u_R(t) = Ri(t)$, $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$, $u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$.

Różniczkując ostatni składnik otrzymamy równanie dynamiki kondensatora:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \quad (8.2)$$

Podobnie równanie dynamiki indukcyjności L można przedstawić w następującej postaci:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_L(t) = -\frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{L} u_C(t) + \frac{1}{L} u(t) \quad (8.3)$$

Dynamika rozważanego układu jest przedstawiona za pomocą dwóch powyższych równań różniczkowych, które można zapisać w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C(t)}{dt} \\ \frac{di(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \quad (8.4)$$

W tym systemie wymuszeniem jest napięcie $u(t)$, natomiast odpowiedzią - prąd: $y(t) = i(t)$. Rozwiązanie równania (8.4) dla dowolnego czasu wymaga znajomości warunków początkowych: $u_C(t)$, $i(t)$ oraz wartości wielkości wymuszającej w całym analizowanym czasie. Różniczkowane wielkości występujące po lewej stronie powyższego równania: $u_C(t)$, $i(t)$, są nazywane zmiennymi stanu (współzrzednymi stanu). Ogólna postać tego równania jest następująca³¹:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (8.5)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (8.6)$$

Pierwsze z tych równań jest nazywane równaniem stanu, a drugie – równaniem wyjść³². Przy założeniu, że system ma b zmiennych wejściowych (wymuszeń), n zmiennych stanu oraz m wyjść, macierze parametrów przyjmują następującą ogólną postać:

³¹ Nie zajmujemy się tutaj uogólnionymi układami liniowymi [28].

³² Niektórzy autorzy zapisują równanie wyjść z transponowaną macierzą $\mathbf{C}$: $\mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + \mathbf{Du}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1b} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nb} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1b} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mb} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_b \end{bmatrix}.$$

W rozpatrywanym przykładzie mamy:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{u} = u(t),$$

$$\mathbf{y} = y(t) = i(t), \mathbf{C} = \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2] = [0 \quad 1], \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Jest to więc układ z jednym wejściem ($b = 1$), jednym wyjściem ($m = 1$) oraz dwiema zmiennymi stanu ($n = 2$). Macierz $\mathbf{A}$ jest nazywana macierzą stanu lub macierzą przejściową. Determinuje ona dynamiczne właściwości systemu.

Można zauważyć, że w układach z jednym wejściem i jednym wyjściem, liczba zmiennych stanu jest wyznaczona przez rząd systemu. Równanie różniczkowe n -go rzędu jest reprezentowane za pomocą n równań I rzędu. Dynamika systemu jest reprezentowana za pomocą równania stanu. Znajomość aktualnych wartości zmiennych stanu wraz z funkcjami określającymi wejścia pozwala jednoznacznie określić przyszłe stany systemu.

Przejście pomiędzy opisem systemu za pomocą równania różniczkowego, a równaniem stanu nie jest jednoznaczne. Ten sam system może być opisany różnymi równaniami stanu. Zależy to od sposobu definicji zmiennych stanu, co można uzyskać na drodze odpowiednich przekształceń początkowego równania różniczkowego lub przyporządkowaniem odpowiedniej wielkości fizycznej do zmiennej stanu. Na przykład, w analizowanym powyżej obwodzie elektrycznym zmienne stanu reprezentują: napięcie na kondensatorze $u_C(t)$ oraz prąd $i(t)$. Ten wybór można zmienić, jeśli założyć, że w miejsce prądu $i(t)$ chcemy śledzić zmianę ładunku $q(t)$ zgromadzonego w pojemności C . Wybrane zmienne pozostają w następującej relacji:

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t), \text{ przy czym: } q(t) = Cu_C(t).$$

Podstawiając ten związek do składników (8.1) otrzymamy następujące równania różniczkowe:

$$\frac{du_R(t)}{dt} = -\frac{R}{L}u_R(t) - \frac{R}{LC}q(t) + \frac{R}{L}u(t) \quad (8.7)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t) = \frac{1}{R}u_R(t) \quad (8.8)$$

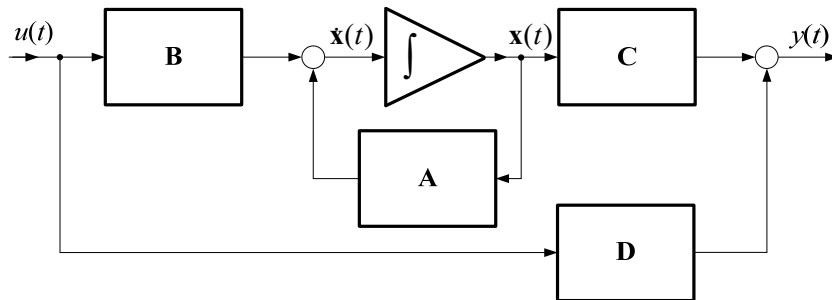
Wyrażenia (8.7), (8.8) tworzą układ równań różniczkowych pierwszego rzędu, które można zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_R(t)}{dt} \\ \frac{dq(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{R}{LC} \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (8.9)$$

z równaniem wyjść: $y = q(t)$. Tym razem zmiennymi stanu są: napięcie na oporniku $u_R(t)$ oraz ładunek kondensatora $q(t)$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_R(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$$

Struktura zmiennych stanu dla systemu z jednym wejściem i jednym wyjściem (*SI-SO*) jest pokazana na rys. 8.2. Blok całkowania odwzorowuje proces rozwiązywania układu równań różniczkowych opisujących dynamikę systemu.



Rys. 8.2. Struktura systemu zmiennych stanu

W przypadku układu z jednym wejściem i jednym wyjściem schemat o strukturze jak na rys. 8.2 jest ekwiwalentny schematowi z rys. 2.3, gdzie dynamika systemu jest określona za pomocą równania różniczkowego n -tego rzędu. Rozmiar wektora stanu $\mathbf{x}(t)$ oraz kwadratowej macierzy stanu $\mathbf{A}$ zależy od rzędu ekwiwalentnego równania różniczkowego.

8.2.2. Rozwiązywanie równań stanu

Rozpatrzmy jednorodne równanie stanu (8.5), w którym $\mathbf{u}(t) = 0$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (8.10)$$

Dla przypadku jednowymiarowego ($n = 1$) otrzymujemy równanie: $\dot{x} = ax$, którego rozwiązanie dla warunku początkowego $x(0)$ ma następującą postać:

$$x(t) = e^{at} x(0) \quad (8.11)$$

Jeśli warunek początkowy odnosi się do czasu t_0 : $x(t_0)$, to otrzymamy:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) \quad (8.12)$$

Rozwiązanie to można rozszerzyć na przypadek wielowymiarowy:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) \quad (8.13)$$

Funkcja wykładnicza o wykładniku w postaci kwadratowej macierzy $\mathbf{A}t$ ma wymiar macierzy $\mathbf{A}$ i może być przedstawiona w postaci szeregu potęgowego:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} + \dots \quad (8.14)$$

Macierz ta jest nazywana macierzą przenoszenia stanu³³ systemu (8.5) i dla wygody, jest oznaczana następująco:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) \quad (8.15)$$

Nazwa tej macierzy ma swoje uzasadnienie w zależności (8.13), z której widać, że znajomość macierzy przenoszenia pozwala określić wartości wektora stanu dla dowolnego czasu na podstawie jego wartości początkowej. Łatwo można sprawdzić, że macierz przenoszenia ma następujące właściwości [12]:

- $\Phi(0) = \mathbf{I}$;
- $\Phi(t)$ jest macierzą nieosobliwą dla dowolnej ograniczonej wartości t ;
- $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$;
- $\Phi^q(t) = \Phi(t)\Phi(t)\Phi(t)\dots\Phi(t) = \Phi(qt)$, q – dodatnia liczba całkowita;
- $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$ dla dowolnych wartości t_0, t_1, t_2 .

Rozwiązanie równania niejednorodnego (8.5) wymaga uwzględnienia wymuszenia w postaci wektora $\mathbf{u}(t)$. Aby uzyskać odpowiednie zależności można rozpatrzyć pochodną iloczynu następujących dwóch funkcji [12]:

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}t} \dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{A}t} (\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A} \mathbf{x}(t)) \quad (8.16)$$

Na podstawie (8.5): $\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A} \mathbf{x}(t) = \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$. Zatem:

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (8.17)$$

³³ Stosowane są także inne nazwy, jak macierz podstawowa (tranzycyjna) [26, 29]

Całkując obustronnie powyższe równanie w granicach od t_0 do t otrzymamy:

$$\left(e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) \right) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (8.18)$$

co prowadzi do następującej zależności:

$$e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) - e^{-\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (8.19)$$

Po wymnożeniu obu stron przez $e^{\mathbf{A}t}$ ostatecznie otrzymamy:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (8.20)$$

lub, uwzględniając (8.15):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (8.21)$$

Obliczanie macierzy przenoszenia w powyższym równaniu zgodnie z (8.14) jest niezwykle uciążliwe i dlatego stosuje się tu bardziej efektywne metody [14, 28]. Jedną z nich polega na stosowaniu wzoru Lagrange'a³⁴-Sylwestera³⁵ [12, 27]. Sprowadza się ona do następujących kroków.

Rozwiązując równanie charakterystyczne macierzy $\mathbf{A}$:

$$\det[\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda] = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (8.22)$$

określamy n jej wartości własnych (ang. *eigenvalues*) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (ograniczymy rozważania do przypadku, gdy macierz $\mathbf{A}$ ma jednokrotne wartości własne).

Określamy macierz przenoszenia ze wzoru Sylwestera:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}_k e^{\lambda_k t}, \quad (8.23)$$

przy czym:

$$\mathbf{Z}_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}. \quad (8.24)$$

Wzór (8.23) można stosować do macierzy, które mają pojedyncze wartości własne. Istnieje także jego rozszerzenie na przypadek ogólny, gdy macierz $\mathbf{A}$ ma wielokrotne wartości własne [19, 28].

³⁴ Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), wybitny matematyk francuski, włoskiego pochodzenia.

³⁵ James Joseph Sylvester (1814 – 1897), matematyk brytyjski.

Przykład 8.1. Określić odpowiedź układu rozważanego na str. 229, opisanego równaniem (8.4), przy założeniu następujących parametrów systemu: $C = 0,25 \text{ F}$, $R = 0,5 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$. W charakterze wymuszenia występuje skok jednostkowy: $u(t) = 1(t)$. Przyjąć zerowe warunki początkowe: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

Po uwzględnieniu podanych parametrów i podstawieniu zmiennych: $x_1 = fs$ oraz $x_2 = i(t)$, równanie (8.4) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

Równanie charakterystyczne (8.22) macierzy $\mathbf{A}$ jest następujące:

$$\det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 4 \\ -1 & -0,5 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 0,5\lambda + 4 = 0,$$

Otrzymujemy stąd dwa pierwiastki: $\lambda_{1,2} = -0,25 \pm j1,9843$.

Macierze $\mathbf{Z}_1$ i $\mathbf{Z}_2$ należy obliczyć zgodnie z (8.24):

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= \frac{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} -0,25 + j1,9843 & 4 \\ -1 & -0,5 + 0,25 - j1,9843 \end{bmatrix}}{(-0,25 + j1,9843) - (-0,25 - j1,9843)} \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 - j0,06299 & -j1,0079 \\ j0,25198 & 0,5 + j0,06299 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Z}_2 &= \frac{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} -0,25 - j1,9843 & 4 \\ -1 & -0,5 + 0,25 + j1,9843 \end{bmatrix}}{(-0,25 - j1,9843) - (-0,25 + j1,9843)} \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 + j0,06299 & j1,0079 \\ -j0,25198 & 0,5 - j0,06299 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Macierz przenoszenia jest zatem równa:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathbf{Z}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{Z}_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-0,25t} (\mathbf{Z}_1 e^{j1,9843t} + \mathbf{Z}_2 e^{-j1,9843t}) \\ &= e^{-0,25t} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t + \frac{0,25}{\omega_0} \sin \omega_0 t & \frac{-4}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t - \frac{0,25}{\omega_0} \sin \omega_0 t \end{bmatrix}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{63}{16}} \approx 1,9843. \end{aligned}$$

Odpowiedź układu na zadane wymuszenie można określić zgodnie z (8.21), przy czym:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 1], \quad \mathbf{D} = 0.$$

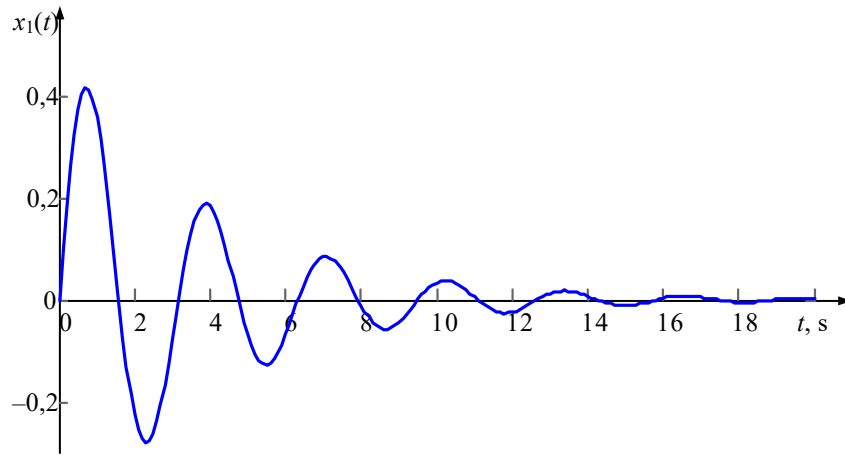
Przebieg odpowiedzi: $y(t) = x_1(t)$ jest pokazany na rys. 8.3.

Przy danych parametrach układu i warunku początkowym, przebieg ten można łatwo otrzymać w programie MATLAB pisząc dwie zaledwie instrukcje:

```
sys = ss(A,B,C,D);
lsim(sys,u,t);
```

gdzie u przedstawia wektor próbek sygnału wymuszającego określony na wektorze próbek czasu t .

Zauważmy, że przebieg z rys. 8.3 przedstawia prąd $i(t)$ w analizowanym obwodzie po wymuszeniu w postaci skoku jednostkowego (włączenie napięcia $u(t)$).



Rys. 8.3. Odpowiedź układu na skok jednostkowy

Macierz przenoszenia można także określić korzystając z twierdzenia Cayleya³⁶-Hamiltona³⁷, które mówi, że jeżeli znane są współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy $\mathbf{A}$ (8.22), to prawdziwe jest równanie:

$$a_n \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I} = 0 \quad (8.25)$$

co oznacza, że macierz $\mathbf{A}$ spełnia swoje równanie charakterystyczne.

Właściwość (8.25) można zastosować do redukcji wielomianów względem macierzy $\mathbf{A}$ (wielomianów macierzowych). Oznaczmy wielomian charakterystyczny macierzy $\mathbf{A}$ (8.22), jako:

$$\Delta(\lambda) = \det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (8.26)$$

Formując analogiczny wielomian dla macierzy $\mathbf{A}$, na podstawie twierdzenia Cayleya-Hamiltona otrzymamy:

$$\Delta(\mathbf{A}) = a_n \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I} = 0 \quad (8.27)$$

³⁶ Artur Cayley (1821 – 1895), prawnik i matematyk brytyjski.

³⁷ William Rowan Hamilton (1805 - 1865), irlandzki fizyk, astronom i matematyk.

Naszym celem jest określenie prostej zależności na obliczanie funkcji $f(\mathbf{A})$, gdy znany jest inny wielomian, definiujący tę funkcję. Jeśli funkcja $f(\mathbf{A})$ jest analityczna w przestrzeni zespolonej, to można ją zawsze przedstawić w postaci wielomianu:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \mathbf{A}^k \quad (8.28)$$

Przykładem takiego wielomianu jest reprezentacja macierzowej funkcji $e^{\mathbf{A}t}$ w postaci sumy nieskończonego szeregu potęgowego (8.14), chociaż może to być także wielomian o skończonej liczbie wyrazów.

Wynik dzielenia wielomianu $f(p)$ przez wielomian $\Delta(p)$ może być przedstawiony w następującej postaci:

$$f(p) = S(p)\Delta(p) + R(p) \quad (8.29)$$

gdzie: $S(p)$ jest wielomianem, który jest wynikiem dzielenia wielomianu $f(p)$ przez $\Delta(p)$ – bez reszty. Załóżmy, że $f(p)$ ma postać, jak w (8.28), natomiast $\Delta(p)$ – jak w (8.26). Wówczas $S(p)$ można wyznaczyć przez dzielenie tych wielomianów:

$$S(p) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k p^k}{\Delta p},$$

natomiast $R(p)$ jest resztą $r(\cdot)$ z dzielenia tych wielomianów pomnożoną przez $\Delta(p)$:

$$R(p) = r\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k p^k\right) / \Delta p\right) \Delta(p).$$

Jest to więc wielomian stopnia nie większego niż $(n-1)$. Łatwo zauważyć, że na podstawie (8.26), zależność (8.29) redukuje się do następującej postaci:

$$f(p) = R(p) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) p^i \quad (8.30)$$

Jeśli w powyższych zależnościach zamienić zmienną p na obiekt w postaci macierzy $\mathbf{A}$, to otrzymamy sposób na określanie funkcji macierzowych:

$$f(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \mathbf{A}^i \quad (8.31)$$

Współczynniki wielomianu (8.31) można określić z następującego układu n równań z n niewiadomymi:

$$f(\lambda_i) = a_{n-1} \lambda_i^{n-1} + \dots + a_1 \lambda_i + a_0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.32)$$

Jeśli wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ są wielokrotne, to powyższy układ równań będzie liniowo zależny. W takim przypadku należy powtarzające się równania zamienić przez ich odpowiednie pochodne względem λ_m . Jeżeli λ_m jest wartością własną powtarzającą się k -krotnie, to dodatkowe $(k-1)$ równań można otrzymać przez $(k-1)$ -krotne różniczkowanie m -tego równania względem λ_m .

Zależności (8.31), (8.32) pozwalają w zadziwiająco prosty sposób zredukować postać funkcji macierzowej, reprezentowanej w formie wielomianu. Ilustruje to kolejny przykład.

Przykład 8.2. Uprościć postać podanej funkcji macierzowej:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 + 2\mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + 2\mathbf{I} \text{ dla}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy $\mathbf{A}$ jest następujący:

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

Upraszczamy zapis funkcji $f(\mathbf{A})$: $\mathbf{A} \rightarrow \lambda$: $f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 2$

Wykonujemy dzielenie:

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda)}{\Delta(\lambda)} &= \frac{\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 2}{\lambda^2 - 2\lambda - 1} = \lambda^2 + 4\lambda + 12 + \frac{29\lambda + 14}{\lambda^2 - 2\lambda - 1} \\ &= S(\lambda) + r\left(\frac{\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 2}{\lambda^2 - 2\lambda - 1}\right) \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$f(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \Delta(\lambda) = S(\lambda)\Delta(\lambda) + \frac{29\lambda + 14}{\lambda^2 - 2\lambda - 1} \Delta(\lambda) = 29\lambda + 14 = R(\lambda)$$

Możemy teraz wrócić do oznaczeń odnoszących się do oryginalnej funkcji macierzowej:

$$f(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}) = 29\mathbf{A} + 14\mathbf{I}$$

Dla podanej macierzy $\mathbf{A}$ zachodzi więc zależność:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 + 2\mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + 2\mathbf{I} = 29\mathbf{A} + 14\mathbf{I}$$

Uzyskana postać funkcji powinna być zgodna z zależnością (8.31):

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \mathbf{A}^i = a_0(t) \mathbf{I} + a_1(t) \mathbf{A}, \text{ gdy } n = 2.$$

Współczynniki w tym równaniu obliczamy na podstawie (8.32):

$$a_1 \lambda_1 + a_0 = R(\lambda_1)$$

$$a_1 \lambda_2 + a_0 = R(\lambda_2)$$

gdzie pierwiastki równania charakterystycznego: $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ są następujące:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Po podstawieniu otrzymamy następujący układ równań:

$$a_1(1 + \sqrt{2}) + a_0 = 29(1 + \sqrt{2}) + 14$$

$$a_1(1 - \sqrt{2}) + a_0 = 29(1 - \sqrt{2}) + 14$$

skąd: $a_0 = 14$, $a_1 = 29$, co potwierdza uzyskaną postać funkcji $f(\mathbf{A})$.

W przypadku, gdy obliczana jest macierzowa funkcja eksponentialna: $f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t}$, to zależności (8.31), (8.32) przyjmą następującą formę:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \mathbf{A}^i \quad (8.33)$$

$$e^{\lambda_i t} = a_{n-1} \lambda_i^{n-1} + \dots + a_1 \lambda_i + a_0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.34)$$

Procedurę tę ilustruje kolejny przykład.

Przykład 8.3. Obliczyć funkcję $e^{\mathbf{A}t}$ dla macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wartości własne macierzy $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 (1 - \lambda) = 0,$$

skąd otrzymujemy: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$.

Piszemy układ równań (8.34) do obliczenia współczynników w zależności (8.33). Ponieważ dwie pierwsze wartości własne powtarzają się, więc drugie równanie:

$$e^{\lambda_2 t} = a_2(t) \lambda_2^2 + a_1(t) \lambda_2 + a_0, \quad \text{różniczkujemy względem } \lambda_2: t e^{\lambda_2 t} = 2a_2(t) \lambda_2 + a_1(t).$$

W ten sposób otrzymujemy następujący układ równań:

$$e^{\lambda_1 t} = a_2(t) \lambda_1^2 + a_1(t) \lambda_1 + a_0(t)$$

$$t e^{\lambda_2 t} = 2a_2(t) \lambda_2 + a_1(t)$$

$$e^{\lambda_3 t} = a_2(t) \lambda_3^2 + a_1(t) \lambda_3 + a_0(t)$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości liczbowych otrzymamy:

$$a_0(t) = 4e^t + e^{2t}(2t - 3), \quad a_1(t) = -4e^t - e^{2t}(3t - 4), \quad a_2(t) = e^t + e^{2t}(t - 1).$$

Ostatecznie, na podstawie (8.33), otrzymamy poszukiwaną funkcję:

$$e^{\mathbf{A}t} = a_0(t) \mathbf{I} + a_1(t) \mathbf{A} + a_2(t) \mathbf{A}^2 = a_0(t) \mathbf{I} + a_1(t) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + a_2(t) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & e^t + e^{2t}(t-1) & -e^t + e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -e^t + e^{2t} & e^t \end{bmatrix}.$$

Można łatwo sprawdzić, że $e^{0\mathbf{I}} = \mathbf{I}$ (dla $t = 0$).

8.3. Operatorowy zapis równań zmiennych stanu

8.3.1. Równania zmiennych stanu w postaci operatorowej

Główny problem obliczeniowy, który występuje w zapisie równań stanu w dziedzinie czasu, polega na obliczeniu macierzy przenoszenia $\Phi(t)$ (8.15). Zobaczmy, co można uzyskać stosując w odniesieniu do równań stanu przekształcenie Laplace'a.

Podając różniczkowe równanie stanu (8.5):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

przekształceniu Laplace'a, otrzymamy:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

co po kolejnych przekształceniach przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (8.35)$$

Podstawiając: $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, otrzymamy:

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (8.36)$$

Obliczenie odwrotnego przekształcenia Laplace'a z (8.36) prowadzi do następującej funkcji w dziedzinie czasu:

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\mathbf{x}(0)\} + \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\} = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (8.37)$$

która jest identyczna z (8.21) dla $t_0 = 0$.

Wynika stąd następująca równość:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}, \quad (8.38)$$

a także, na podstawie (8.15):

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}, \quad (8.39)$$

co jest kolejnym sposobem obliczania funkcji $e^{\mathbf{A}t}$.

Analizując prawą stronę (8.37) widać, że macierz przenoszenia $\Phi(t)$ odgrywa w stanowej reprezentacji systemu zbliżoną rolę, jak funkcja wagi w systemie z jednym wejściem i jednym wyjściem: jej splot z wektorem wejść $\mathbf{u}(t)$, po uwzględnieniu wa-

runków początkowych, daje wynik w postaci wektora stanu $\mathbf{x}(t)$. Podobne relacje zachodzą także w odniesieniu do transformaty Laplace'a (8.36), gdzie $\Phi(s)$ jest swego rodzaju wielowymiarową transmitancją pomiędzy wektorem wejść i wektorem stanu.

Po uwzględnieniu w (8.37) równania wyjść (8.6):

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),$$

otrzymamy:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}\Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (8.40)$$

lub w postaci transformaty s :

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{U}(s). \quad (8.41)$$

Przykład 8.4. Jednorodne równanie stanu badanego układu ma postać: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$,

gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Określić funkcję przenoszenia tego układu.

Zgodnie z (8.38) należy najpierw obliczyć macierz:

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{-1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

Łatwo określić transformatę odwrotną macierzy $\Phi(s)$:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Przykład 8.5. Posługując się przekształceniem Laplace'a, obliczyć macierz przenoszenia układu z przykładu 8.1.

Macierz stanu w przykładzie 8.1 jest następująca: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix}$.

Postępując jak w poprzednim przykładzie, otrzymamy:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -4 \\ 1 & s+0,5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 0,5s + 4} \begin{bmatrix} s+0,5 & -4 \\ 1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+0,5}{(s+0,25)^2 + \omega_0^2} & \frac{-4}{(s+0,25)^2 + \omega_0^2} \\ \frac{1}{(s+0,25)^2 + \omega_0^2} & \frac{s}{(s+0,25)^2 + \omega_0^2} \end{bmatrix},$$

gdzie $\omega_0^2 = 4 - 0,25^2 = 63/16 = 1,9843^2$.

Transformaty odwrotne poszczególnych elementów otrzymanej macierzy prowadzą do następującej macierzy przenoszenia badanego układu:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = e^{\mathbf{A}t} = e^{-0,25t} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t + \frac{0,25}{\omega_0} \sin \omega_0 t & -\frac{4}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t - \frac{0,25}{\omega_0} \sin \omega_0 t \end{bmatrix}.$$

Widać, że wynik ten jest zgodny z rezultatem uzyskanym w przykładzie 8.1.

8.3.2. Zamiana transmitancji układu na równania zmiennych stanu

Opis dynamicznego modelu układu za pomocą transmitancji operatorowej zawiera informację o strukturze zależności różniczkowej, określającej związek pomiędzy wejściem i wyjściem układu w dziedzinie czasu. Na przykład, dla układu o transmitancji:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)},$$

otrzymamy:

$$Y(s)(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = U(s)(b_2 s^2 + b_1 s + b_0), \text{ przy czym:}$$

$$M(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad L(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0.$$

Przechodząc do dziedziny czasu, otrzymujemy:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

W celu zapisu powyższego równania w formie równania zmiennych stanu należy metodą podstawiania, zamienić ostatnie równanie 3-go rzędu na trzy równania różniczkowe pierwszego rzędu. Procedurę tę można wykonać na kilka sposobów, co oznacza, że zamiana transmitancji operatorowej układu na postać określoną za pomocą równań stanu nie jest jednoznaczna. Każdy ze sposobów ma swoje specyficzne cechy, które są wygodniejsze do określonego zastosowania. Poniżej przedstawione są dwie procedury formowania układu równań stanu na podstawie transmitancji układu. Obie prezentowane procedury należą do grupy metod bezpośrednich [20, 26].

a) Fazowa metoda wyboru zmiennych stanu

Założmy, że znana jest transmitancja układu *SISO* (z jednym wejściem i jednym wyjściem) w postaci (3.27). W omawianym tu pierwszym wariancie (wariant 1) wyboru zmiennych stanu dzielimy licznik i mianownik transmitancji (3.27) przez s^n :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{m-n} + b_{m-1} s^{m-n-1} + \dots + b_1 s^{1-n} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{1-n} + a_0 s^{-n}}, \quad m < n^{38} \quad (8.42)$$

³⁸ Układ jest nierealizowalny fizycznie dla $m > n$, natomiast, jeśli $m = n$, to podzielenie licznika przez mianownik prowadzi do układu (8.42) z dodaniem stałej, która jest jedynym współczynnikiem macierzy $\mathbf{D}$ [29].

Wprowadzając następujące oznaczenie:

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \dots + a_1s^{1-n} + a_0s^{-n}}, \quad (8.43)$$

otrzymujemy:

$$E(s) = -a_{n-1}s^{-1}E(s) - \dots - a_1s^{1-n}E(s) - a_0s^{-n}E(s) + U(s) \quad (8.44)$$

oraz:

$$Y(s) = (b_ms^{m-n} + b_{m-1}s^{m-n-1} + \dots + b_1s^{1-n} + b_0s^{-n})E(s) \quad (8.45)$$

Przyjmujemy następujące oznaczenia zmiennych stanu:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= s^{-n}E(s) \\ X_2(s) &= s^{1-n}E(s) = sX_1(s) \\ &\dots \\ X_{n-1}(s) &= s^{-2}E(s) = sX_{n-2}(s) \\ X_n(s) &= s^{-1}E(s) = sX_{n-1}(s) \end{aligned} \quad (8.46)$$

Uwzględniając te oznaczenia w (8.44) oraz w (8.45), otrzymamy:

$$E(s) = -a_{n-1}X_n(s) - \dots - a_1X_2(s) - a_0X_1(s) + U(s) = sX_n(s) \quad (8.47)$$

$$Y(s) = b_0X_1(s) + b_1X_2(s) + \dots + b_mX_{m+1}(s) \quad (8.48)$$

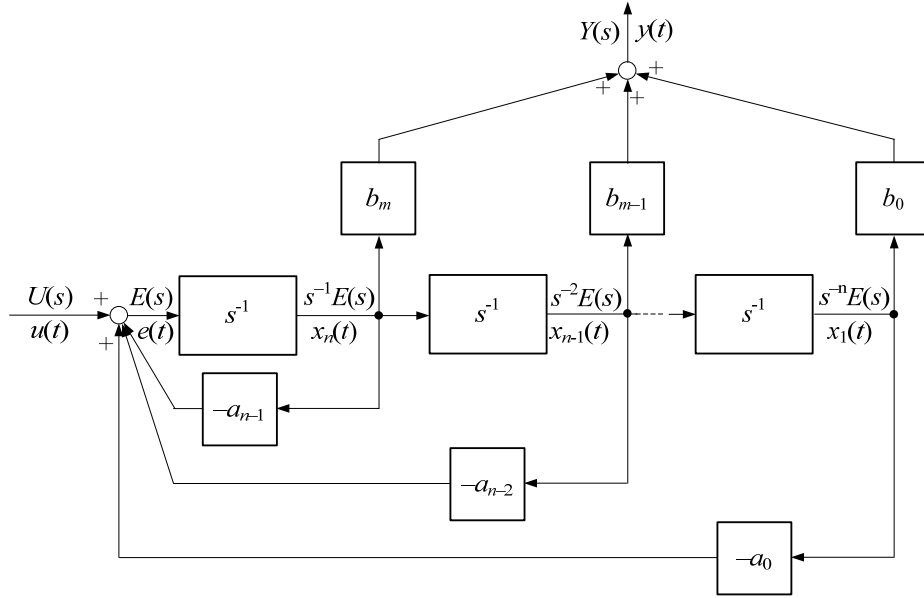
Na podstawie (8.46), (8.47) otrzymujemy następujące równanie stanu:

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= X_2(s) \\ sX_2(s) &= X_3(s) \\ &\dots \\ sX_{n-1}(s) &= X_n(s) \\ sX_n(s) &= -a_0X_1(s) - a_1X_2(s) - \dots - a_{n-1}X_n(s) + U(s) \end{aligned} \quad (8.49)$$

Struktura układu, odpowiadająca tym równaniom, jest pokazana na rys. 8.4 (układ z wyróżnionym wejściem i wyjściem).

Postać macierzowa uzyskanych równań jest następująca:

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) \end{aligned} \quad (8.50)$$



Rys. 8.4. Struktura układu opisanego równaniami zmiennych stanu według metody fazowej (wariant 1)

gdzie:

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_{n-1}(s) \\ X_n(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}(s) = U(s), \quad \mathbf{Y}(s) = Y(s), \quad \mathbf{D} = [0],$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0].$$

Zera na końcu wektora $\mathbf{C}$ uzupełniają jego rozmiar do $1 \times n$.

Równania (8.50) z macierzami o prezentowanej formie przedstawiają kanoniczną postać fazowych zmiennych stanu lub postać regulatorową (sterowalną, sterowność) [20, 28].

Przykład 8.6. Układ liniowy określony jest za pomocą następującej transmitancji:

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 2s^2 + 2,25s + 1,25} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Określić równania stanu tego układu według metody fazowej.

Stopień licznika transmitancji $m = 2$, natomiast mianownika: $n = 3$. Zgodnie z (8.42), dzielimy licznik i mianownik transmitancji przez s^3 :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^{-1} + s^{-3}}{1 + 2s^{-1} + 2,25s^{-2} + 1,25s^{-3}}, \text{ a więc:}$$

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1, a_0 = 1,25, a_1 = 2,25, a_2 = 2.$$

Zależności (8.48) i (8.49) przyjmują następującą postać:

$$sX_1(s) = X_2(s)$$

$$sX_2(s) = X_3(s)$$

$$sX_3(s) = -1,25X_1(s) - 2,25X_2(s) - 2X_3(s) + U(s)$$

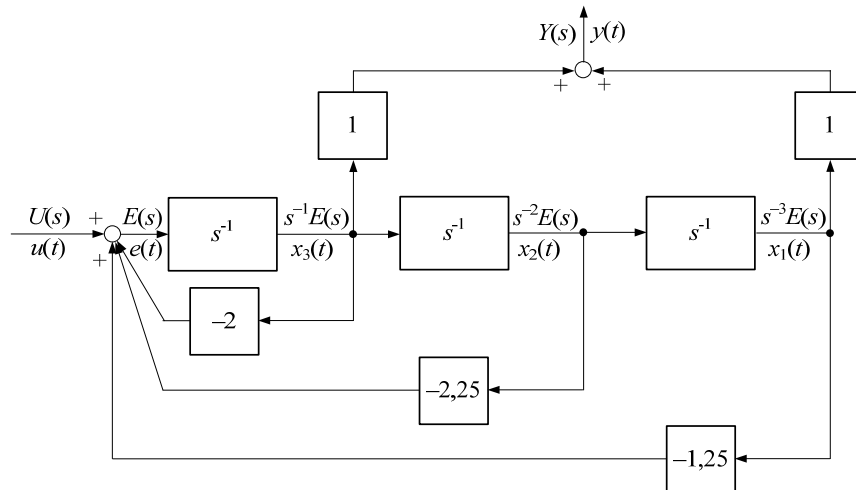
$$Y(s) = X_1(s) + X_3(s)$$

Wektory i macierze w (8.50) są następujące:

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1,25 & -2,25 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 1], \mathbf{D} = [0],$$

$$\mathbf{u}(s) = U(s), \mathbf{y}(s) = Y(s).$$

Schemat uzyskanego układu jest pokazany na rys. 8.5.



Rys. 8.5. Schemat układu zmiennych stanu utworzonego według metody fazowej (wariant 1)

b) Zmodyfikowana fazowa metoda wyboru zmiennych stanu (wariant 2)

W drugim wariantcie wyboru zmiennych stanu korzystamy bezpośrednio z transmitancji zapisanej w postaci (3.27), skąd otrzymujemy:

$$Y(s)(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0) = U(s)(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0), \quad (8.51)$$

co można przedstawić w następującej formie (przy założeniu, że $m = n - 1$):

$$Y(s)s^n = s^{n-1}(-a_{n-1}Y(s) + b_{n-1}U(s)) + s^{n-2}(-a_{n-2}Y(s) + b_{n-2}U(s)) + \dots + s(-a_1Y(s) + b_1U(s)) + (-a_0Y(s) + b_0U(s)) \quad (8.52)$$

Przyjmując n -tą zmienną stanu w postaci:

$$X_n(s) = Y(s),$$

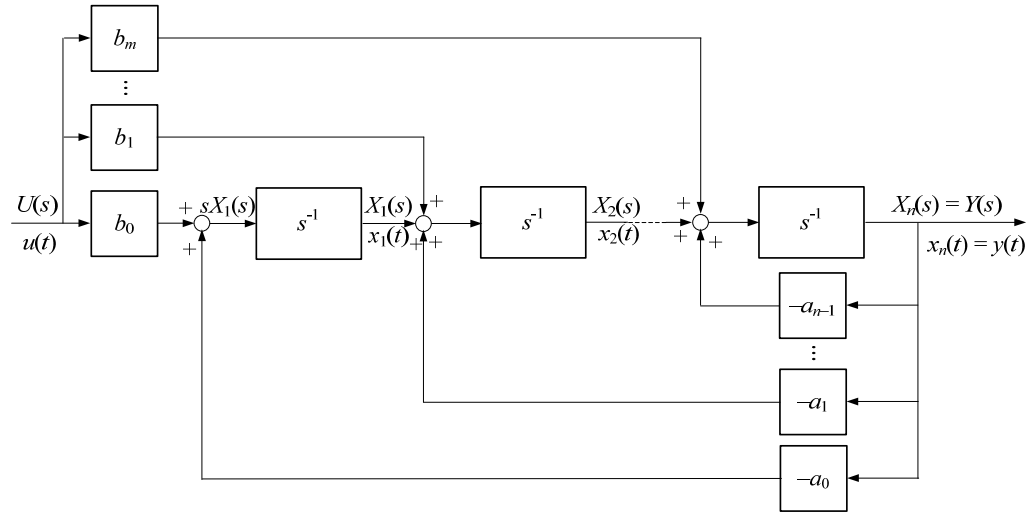
formujemy równania następnych zmiennych, na podstawie kolejnych składników prawej strony (8.52):

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= -a_0Y(s) + b_0U(s) = -a_0X_n(s) + b_0U(s), \\ sX_2(s) &= X_1(s) - a_1Y(s) + b_1U(s) = X_1(s) - a_1X_n(s) + b_1U(s), \\ &\dots \\ sX_{n-1}(s) &= X_{n-2}(s) - a_{n-2}Y(s) + b_{n-2}U(s) = X_{n-2}(s) - a_{n-2}X_n(s) + b_{n-2}U(s), \\ sX_n(s) &= X_{n-1}(s) - a_{n-1}Y(s) + b_{n-1}U(s) = X_{n-1}(s) - a_{n-1}X_n(s) + b_{n-1}U(s) \end{aligned} \quad (8.53)$$

Łatwo sprawdzić, że dla równań stanu w postaci (8.50), macierze modelu przyjmą następującą postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1], \quad \mathbf{D} = [0] \quad (8.54)$$

Wektor $\mathbf{B}$ ma wymiar $n \times 1$, więc dla $m < n - 1$ należy wypełnić zerami miejsca poniżej współczynnika b_m . Ogólny schemat otrzymanego układu jest pokazany na rys. 8.6. Można zauważyć, że schemat ten odpowiada przypadkowi, gdy $m = n - 2$.



Rys. 8.6. Struktura układu opisanego równaniami zmiennych stanu według zmodyfikowanej metody fazowej (wariant 2)

Przykład 8.7. Układ liniowy określony jest za pomocą następującej transmitancji:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+s+1} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Określić równania stanu tego układu według zmodyfikowanej metody fazowej.

Stopień licznika transmitancji $m = 1$, natomiast mianownika: $n = 3$. Postępujemy zgodnie z równaniami (8.51) i (8.52):

$$Y(s)(s^3 + 2s^2 + s + 1) = U(s)(s + 1),$$

$$Y(s)s^3 = s^2(-2Y(s)) + s(-Y(s) + U(s)) + (-Y(s) + U(s)).$$

Współczynniki transmitancji: $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, b_0 = 1, b_1 = 1$.

Przyjmujemy: $X_3(s) = Y(s)$ oraz:

$$sX_1(s) = -Y(s) + U(s) = -X_3(s) + U(s),$$

$$sX_2(s) = X_1(s) - Y(s) + U(s) = X_1(s) - X_3(s) + U(s),$$

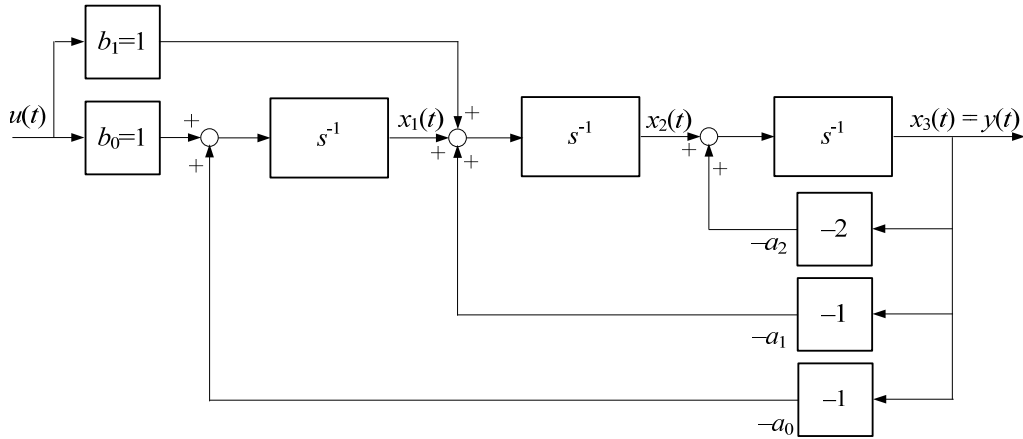
$$sX_3(s) = X_2(s) - 2Y(s) = X_2(s) - 2X_3(s)$$

Zauważmy, że w ostatnim równaniu nie występuje $U(s)$. Równanie wyjść jest określone przez podstawienie: $X_3(s) = Y(s)$.

Można zatem napisać końcowe równania:

$$s \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s), \quad Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix}.$$

Schemat zmiennych stanu jest pokazany na rys. 8.7.



Rys. 8.7. Schemat utworzonego układu zmiennych stanu

Porównując wielomian charakterystyczny transmitancji rozpatrywanej w przykładzie 8.7 z macierzą stanu $\mathbf{A}$, można zauważyć ważny związek: pierwiastki mianownika transmitancji (bieguny funkcji przejścia) są równe wartościom własnym macierzy $\mathbf{A}$. W istocie, funkcja charakterystyczna macierzy $\mathbf{A}$ jest tożsama (z dokładnością do znaku) z wielomianem charakterystycznym transmitancji. W rozpatrywanym przypadku otrzymamy (8.22):

$$\det[\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda] = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Widać, że wielomian charakterystyczny macierzy $\mathbf{A}$ różni się jedynie znakiem od mianownika transmitancji, więc bieguny macierzy $\mathbf{A}$ i bieguny transmitancji są w takim przypadku jednakowe.

Realizacja układu w postaci (8.54) jest nazywana kanoniczną postacią obserwatorów (obserwowalną, obserwowalności) [28].

8.3.3. Transmitancja układów opisanych równaniami stanu

Zależność pomiędzy transformatami wejść i wyjść układów opisanych w postaci stanowej jest określona przez (8.41). Zakładając zerowe warunki początkowe, otrzymamy:

$$\mathbf{Y}(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{U}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s), \quad (8.55)$$

gdzie

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (8.56)$$

jest transmitancją macierzową układu (8.5), (8.6) (zwaną macierzą transmitancji operatorowych [28]).

Zauważmy, że w (8.55) nie ma ograniczeń co do liczby wejść i wyjść układu, więc transmitancja (8.56) zawiera pojedyncze transmitancje pomiędzy m zmiennymi wyjściowymi (odpowiedziami) i b zmiennymi wejściowymi (wymuszeniami). Macierz transmitancji ma więc następującą strukturę:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1b}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2b}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mb}(s) \end{bmatrix}. \quad (8.57)$$

Poszczególne elementy macierzy transmitancji są ilorazami transformat odpowiednich wielkości wejściowych i wyjściowych:

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} = \frac{L_{ij}(s)}{M_{ij}(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, b \quad (8.58)$$

przy założeniu, że warunki początkowe i wszystkie wymuszenia, z wyjątkiem $u_j(t)$, są równe zero.

Na podstawie (8.58) widać, że podobnie jak w przypadku układów z jednym wejściem i jednym wyjściem (3.27), elementy macierzy transmitancji $\mathbf{G}(s)$ są funkcjami wymiernymi dwóch wielomianów względem zmiennej zespolonej s : $L_{ij}(s)$ oraz $M_{ij}(s)$.

Podobnie do transmitancji układów *SISO*, również transmitancje macierzowe można przedstawić w postaci widmowej zgodnie z zależnością:

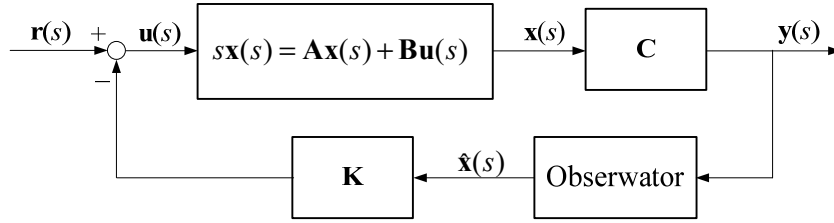
$$\mathbf{G}(j\omega) = \mathbf{P}(\omega) + j\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{G}(s)|_{s=j\omega} \quad (8.59)$$

Także i w tym przypadku część rzeczywista jest funkcją parzystą: $\mathbf{P}(-\omega) = \mathbf{P}(\omega)$, a część urojona – funkcją nieparzystą: $\mathbf{Q}(-\omega) = -\mathbf{Q}(\omega)$.

8.3.4. Sterowalność i obserwowalność układów dynamicznych

Terminy: *sterowalność* oraz *obserwowalność*, stosowane w odniesieniu do układu opisanego za pomocą równań zmiennych stanu, określają możliwość realizacji sterowania tym układem w celu uzyskania zadanych właściwości dynamicznych.

W celu pobieżnego wyjaśnienia tych terminów rozpatrzmy zamkniętą pętlę sterowania analizowanego układu jak na rys. 8.8.



Rys. 8.8. Schemat sterowania układem opisanym za pomocą równań zmiennych stanu

Wektor $\mathbf{r}(s)$ określa zewnętrzne wymuszenia, natomiast $\mathbf{u}(s)$ jest wektorem wymuszeń samego układu zmiennych stanu. Dla uproszczenia zakłada się, że macierz $\mathbf{D} = 0$ (8.50). Zmienne stanu są zazwyczaj niedostępne pomiarowo, więc obserwator pełni rolę estymatora wektora zmiennych stanu, tak, że $\hat{\mathbf{x}}(s) \approx \mathbf{x}(s)$, na podstawie dostępnego wektora wyjść $\mathbf{y}(s)$ oraz parametrów nadzorowanego systemu. Macierz $\mathbf{K}$ jest dobierana z punktu widzenia uzyskania zakładanych właściwości sterowania.

Wektor wymuszeń samego układu zmiennych stanu jest następujący:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(s) \quad (8.60)$$

wobec czego, przy założeniu, że $\hat{\mathbf{x}}(s) \approx \mathbf{x}(s)$, równanie stanu z (8.50) przyjmie następującą postać:

$$s\mathbf{x}(s) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{r}(s) \quad (8.61)$$

O właściwościach dynamicznych układu opisanego zależnością (8.61), decyduje macierz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$, którą można modyfikować przez odpowiedni dobór współczynników macierzy $\mathbf{K}$. Ściśle biorąc, te właściwości są określone przez wartości własne macierzy $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$, które, przez analogię do pierwiastków mianownika transmitancji, są nazywane biegunami układu (8.61). Możliwość kontroli sposobu zachowania się układu określonego zależnościami (8.50) przez odpowiedni dobór współczynników macierzy $\mathbf{K}$ w (8.61), jest definiowana jako *sterowalność*. Jeśli układ jest sterowalny, to określone działania na wejściu zapewnią oczekiwane jego zachowanie się na wyjściu. Można stąd wyprowadzić bardziej praktyczną definicję:

Układ jest sterowalny ze względu na stan, jeśli można każdą z jego zmiennych stanu doprowadzić od wartości początkowej $x_k(0)$ do dowolnej skończonej wartości x_k , stosując sygnały wejściowe o skończonej wartości w ciągu skończonego czasu. Wówczas, dla układu n -tego rzędu, macierz:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (8.62)$$

jest rzędu n (ma n niezależnych kolumn). Dla układów jednowejściowych oznacza to, że $\mathbf{H}$ jest nieosobliwa: $|\mathbf{H}| \neq 0$. W tych warunkach dowolny stan układu jest osiągalny, stąd w odniesieniu do sterowalności używa się także terminu: osiągalność (sterowalność układu ciągłego jest równoważna jego osiągalności) [1, 28].

Przykład 8.8. Dana jest transmitancja operatorowa układu liniowego:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Określić równania stanu tego układu według metody fazowej i sprawdzić, czy układ jest sterowalny.

W celu określenia równań stanu według wariantu 1 stosujemy procedurę (8.42) - (8.49):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^{-2}}{1 + 5s^{-1} + 4s^{-2}}.$$

Tworzymy zmienną pomocniczą:

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + 5s^{-1} + 4s^{-2}}, \text{ a także równanie wyjść: } Y(s) = s^{-2}E(s),$$

$$\text{skąd: } E(s) = -5s^{-1}E(s) - 4s^{-2}E(s) + U(s)$$

$$\text{oraz: } Y(s) = -5s^{-3}E(s) - 4s^{-4}E(s) + s^{-2}U(s).$$

Przyjmując: $X_1(s) = s^{-2}E(s)$, otrzymujemy drugą zmienną stanu:

$$X_2(s) = sX_1(s) = s^{-1}E(s).$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$sX_1(s) = X_2(s)$$

$$sX_2(s) = E(s) = -4X_1(s) - 5X_2(s) + U(s)$$

Macierze równań (8.50) są więc następujące:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0], \mathbf{D} = [0].$$

W celu sprawdzenia warunku sterowalności układu, należy obliczyć macierz (8.62):

$$\mathbf{H} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]$$

$$\text{Macierz } \mathbf{AB}: \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \text{ a więc:}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \text{ skąd: } |\mathbf{H}| = -1.$$

Zatem układ jest sterowalny.

Pojęcie obserwowalności układu łączy się z możliwością odtworzenia (estymacji) zmiennych stanu na podstawie obserwacji wektora wyjść $\mathbf{y}(k)$ (rys. 8.8). System jest w pełni obserwowalny, jeśli każda ze zmiennych tworzących wektor stanu oddziałuje na któreś z wyjść układu. Inaczej mówiąc, układ jest obserwowalny, jeśli można określić jego stan $\mathbf{x}(t_0)$ (wartości wszystkich zmiennych stanu) dla dowolnej chwili t_0 na podstawie obserwacji przebiegu jego wyjść w skończonym czasie. Odpowiada to warunkowi, że macierz:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.63)$$

jest rzędu n (ma n niezależnych wierszy).

W systemie obserwowalnym o jednym wyjściu macierz $\mathbf{G}$ jest nieosobliwa: $|\mathbf{G}| \neq 0$.

Przykład 8.9. W przykładzie 8.7 utworzona została obserwowalna (fazowa zmodyfikowana) postać zmiennych stanu dla wyjściowego układu określonego przez transmitancję 3-go stopnia. Sprawdzić, czy układ zmiennych stanu jest obserwowalny.

Równania stanu układu rozpatrywanego w przykładzie 8.7 mają następujące macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1], \quad \mathbf{D} = [0].$$

Układ ma $n = 3$ zmienne stanu, więc w celu sprawdzenia warunku obserwowalności układu tworzymy macierz $\mathbf{G}$ (3×3) (8.63):

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{CA} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad -2], \quad \mathbf{CA}^2 = [0 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = [1 \quad -2 \quad 3].$$

$$\text{Zatem: } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{G}| = -1 \neq 0, \text{ co oznacza, że układ jest obserwowalny.}$$

Warto jeszcze zauważyć, że na podstawie powyższych właściwości można sformułować ważny wniosek odnoszący się do jednoznaczności różnych reprezentacji systemu: w systemie, który jest sterowalny i obserwowalny istnieje jednoznaczny związek pomiędzy jego równaniem różniczkowym, transmitancją i równaniem stanu (w tym ostatnim przypadku z dokładnością do relacji podobieństwa) [21]. Jeśli natomiast system nie jest obserwowalny oraz nie jest sterowalny (bądź zachodzi jeden z tych przypadków), to ta jednoznaczność nie jest zachowana [9].

8.4. Stabilność układów liniowych ciągłych w przestrzeni stanów

Tak jak w przypadku układów opisanych transmitancją, również w odniesieniu do systemów zmiennych stanu stosuje się podobną definicję stabilności (*BIBO*): system opisany równaniem zmiennych stanu jest stabilny, jeśli przy dowolnym ograniczonym wymuszeniu w postaci wektora $\mathbf{u}(t)$, wektor zmiennych stanu $\mathbf{x}(t)$ pozostaje także ograniczony. Ten warunek można przenieść na ścisłą zależność matematyczną: rozważany układ jest stabilny, jeśli wszystkie wartości własne jego macierzy stanu $\mathbf{A}$ mają ujemne części rzeczywiste [26]. Układ jest wtedy stabilny asymptotycznie.

Macierz transmitancji operatorowej jest określona zgodnie z (3.69). Korzystając z definicji macierzy odwrotnej, zależność tę można zapisać następująco:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{C} [\text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (8.64)$$

gdzie Adj oznacza macierz dołączoną.

Można pokazać, że z punktu widzenia stabilności wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ pełnią tę samą rolę, co bieguny transmitancji. Badanie stabilności układu o macierzy transmitancji $\mathbf{G}(s)$ sprowadza się zatem do obliczenia wartości własnych macierzy $\mathbf{A}$:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (8.65)$$

Pierwiastki wielomianu (8.65) są wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$ (patrz (2.65)). Położenie tych pierwiastków na płaszczyźnie zespolonej – podobnie, jak biegunów transmitancji – determinuje stabilność układu.

Przykład 8.10. Zbadać stabilności układu z przykładu 3.16 określonego za pomocą transmitancji oraz równania stanu.

Transmitancja rozpatrywanego układu jest następująca:

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 2s^2 + 2,25s + 1,25}$$

Odpowiadają jej następujące równania w przestrzeni zmiennych stanu:

$$s \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1,25 & -2,25 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s),$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix}.$$

Bieguny transmitancji można określić z równania charakterystycznego:

$$s^3 + 2s^2 + 2,25s + 1,25 = 0, \text{ skąd: } s_1 = -1, s_{2,3} = -0,5 \pm j1,0.$$

Widać, że bieguny leżą na lewo od osi urojonej zespolonej płaszczyzny pierwiastków, zatem układ jest stabilny asymptotycznie.

Analizując stabilność tego układu na podstawie równań stanu, można posłużyć się zależnością (8.65):

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1,25 & 2,25 & s+2 \end{vmatrix} = s^2(s+2) + 1,25 + 2,25s = s^3 + 2s^2 + 2,25s + 1,25 = 0$$

Jak widać, równanie charakterystyczne macierzy $\mathbf{A}$ jest takie samo, jak podobne równanie transmitancji. W przypadku układu *SISO*, bieguny transmitancji są równe wartościom własnym macierzy stanu tego układu.

W przypadku układów opisanych równaniami stanu wyróżnia się stabilność wewnętrzną i zewnętrzną. Stabilność zewnętrzna jest rozumiana klasycznie jako stabilność wyjściowo-wejściowa. Stabilność wewnętrzna jest rozumiana jako stabilność poszczególnych relacji wyjście-wejście w układzie. Są one określone przez elementy macierzy transmitancji operatorowej (8.57). Macierz ta jest stabilna asymptotycznie, jeśli wszystkie mianowniki $M_{ij}(s)$ składowych transmitancji $G_{ij}(s)$ $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, b$ (8.58) mają pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych. Wówczas stabilność zewnętrzna jest także zapewniona. Odnotujmy jeszcze, że stabilność zewnętrzna układu pokrywa się z jego stabilnością wewnętrzną, gdy układ jest sterowalny (osiągalny) i obserwowalny [28]. Zatem te właściwości jednoznacznie określają stabilność układu.

Warto zauważyć, że ilustrowana w przykładzie 8.10 równoważność biegunów transmitancji i wartości własnych macierzy stanu nie zależy od sposobu utworzenia modelu stanowego układu na podstawie jego transmitancji. Wynika to stąd, że wartości własne macierzy nie są zależne od liniowych przekształceń tej macierzy.

Przedstawiony sposób oceny stabilności układu przez badanie wartości własnych macierzy stanu, może być także stosowany w odniesieniu do układów o wielu wejściach i wielu wyjściach (*MIMO*).

8.5. Zmienne stanu w układach dyskretnych

8.5.1. Opis układu dyskretnego w przestrzeni stanów

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych (8.5), dynamika wielowejściowych i wielowyjściowych (*MIMO*) układów dyskretnych może być reprezentowana za pomocą równań stanu:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \tag{8.66}$$

gdzie indeks k odnosi się do czasu dyskretnego, jak w (6.6).

Zakłada się przy tym, że rozpatrywany jest układ liniowy, inwariantny względem czasu.

Zauważmy, że w równaniu stanu (8.66) występują różnice pierwszego rzędu, co jest konsekwencją tego, że w układach ciągłych, w równaniu stanu występują pochodne pierwszego rzędu. Podobnie, jeśli układ dyskretny jest opisany za pomocą równania różnicowego n -tego rzędu, to przejście do opisu za pomocą równań stanu wymaga utworzenia n równań stanu pierwszego rzędu.

Przykład 8.11. Utworzyć model zmiennych stanu układu opisanego za pomocą następującego równania różnicowego: $4y(k) - 2y(k-1) + 2y(k-2) = 5u(k)$.

Jak widać, jest to układ drugiego rzędu, więc w stan układu jest reprezentowany za pomocą dwóch zmiennych. Założmy następujące podstawienie:

$$x_1(k) = y(k-1), \quad x_2(k) = y(k-2).$$

Można, zatem napisać:

$$x_1(k+1) = y(k) = \frac{1}{2}y(k-1) - \frac{1}{2}y(k-2) + \frac{5}{4}u(k) = \frac{1}{2}x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{5}{4}u(k)$$

$$x_2(k+1) = y(k-1) = x_1(k)$$

Powyższe równania można przedstawić w postaci macierzowej. Dodając jeszcze równanie wyjść, otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Macierze współczynników tego modelu są następujące:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = 0 \quad (\text{macierze } \mathbf{B} \text{ oraz } \mathbf{C} \text{ są w tym przypadku wektorami}).$$

$$\text{Wektor stanu: } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Ważną cechą reprezentacji układu dyskretnego w formie równań stanu (8.66) jest łatwe śledzenie kolejnych jego stanów w czasie dyskretnym. Założmy, że znany jest wektor wymuszeń $\mathbf{u}(k)$, $k \geq 0$ oraz początkowa wartość wektora stanu $\mathbf{x}(0)$. Kolejne wartości wektora stanu są obliczane następująco:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0),$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1),$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2)$$

$$= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2),$$

skąd:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(i) \quad (8.67)$$

Pierwszy składnik w powyższej zależności jest funkcją warunku początkowego, a drugi – zależy tylko od wymuszenia.

Poddając równania (8.66) transformacji Z można łatwo uzyskać postać operatorową z zmiennych stanu układu dyskretnego:

$$\begin{aligned} z(\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}(0)) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \\ \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) \end{aligned} \quad (8.68)$$

Równanie stanu w (8.68) można dalej przekształcić do postaci:
 $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z)$,

skąd otrzymujemy:

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z), \quad (8.69)$$

przy założeniu, że macierz $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$ jest nieosobliwa: $|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| \neq 0$.

W podobny sposób można określić transformatę wektora wyjść:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{U}(z) \quad (8.70)$$

W przypadku zerowych warunków początkowych, otrzymamy:

$$\mathbf{Y}(z) = (\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{U}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{U}(z), \quad (8.71)$$

gdzie: $\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$ jest transmitancją macierzową wielowymiarowego układu dyskretnego w relacji wyjście/wejście.

W przypadku układu z jednym wejściem i jednym wyjściem (*SISO*), transmitancja macierzowa jest zwykłą transmitancją układu:

$$G(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \frac{Y(z)}{U(z)}.$$

W takim przypadku bieguny transmitancji są takie same, jak wartości własne macierzy stanu $\mathbf{A}$.

Przykład 8.12. Określić transmitancję układu *SISO*, który jest określony za pomocą następującego modelu zmiennych stanu:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -0,25 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + 5u(k). \end{aligned}$$

Parametry modelu zmiennych stanu są następujące:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -0,25 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [-2 \ 3], d = 5.$$

Do określenia transmitancji układu obliczamy macierz:

$$(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z-2 & -0,25 \\ 0 & z+8 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z-2)(z+8)} \begin{bmatrix} z+8 & 0,25 \\ 0 & z-2 \end{bmatrix}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathbf{c}(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \frac{1}{(z-2)(z+8)} [-2 \ 3] \begin{bmatrix} z+8 & 0,25 \\ 0 & z-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \\ &= \frac{1}{(z-2)(z+8)} [-2 \ 3] \begin{bmatrix} -2(z+8) \\ 0 \end{bmatrix} + 5 = \frac{4(z+8)}{(z-2)(z+8)} + 5 = \frac{4}{(z-2)} + 5 = \frac{5z-6}{z-2} \end{aligned}$$

Układ ten jest niestabilny, gdyż biegun transmitancji leży poza okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie z ($z_1 = 2$).

8.5.2. Określenie zmiennych stanu układu o znanej transmitancji

Możemy w tym przypadku postępować podobnie jak w odniesieniu do układów ciągłych. Załóżmy, że dana jest transmitancja układu dyskretnego:

$$G(z) = \frac{b_M z^m + b_{M-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{N-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, n \geq m. \quad (8.72)$$

W celu wyznaczenia macierzy $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, i $\mathbf{D}$ układu zgodnie z wariantem 1, dzielimy licznik i mianownik transmitancji (8.72) przez z^n :

$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{M-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (8.73)$$

Następnie definiujemy następującą wielkość:

$$E(z) = \frac{U(z)}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}}, \quad (8.74)$$

dzięki czemu, zależność (8.73) można zapisać następująco:

$$Y(z) = (b_m z^{m-n} + b_{M-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}) E(z) \quad (8.75)$$

Na podstawie (8.74) można napisać:

$$\begin{aligned} E(z) &= U(z) - (a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}) E(z) \\ &= U(z) - a_{n-1} z^{-1} E(z) - \dots - a_1 z^{1-n} E(z) - a_0 z^{-n} E(z) \end{aligned} \quad (8.76)$$

Zależności (8.75) i (8.76) definiują model stanowy rozpatrywanego układu. Przyjmując: $X_n(z) = z^{-1}E(z)$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} zX_n(z) &= E(z) = -a_{n-1}z^{-1}E(z) - \dots - a_1z^{1-n}E(z) - a_0z^{-n}E(z) + U(z) \\ &= -a_{n-1}X_n(z) - \dots - a_1X_2(z) - a_0X_1(z) + U(z), \end{aligned}$$

co można łatwo rozszerzyć na pełne równanie stanu:

$$\begin{aligned} zX_1(z) &= X_2(z) \\ &\dots \\ zX_{n-1}(z) &= X_n(z) \\ zX_n(z) &= -a_0X_1(z) - a_1X_2(z) - \dots - a_{n-1}X_n(z) + U(z) \end{aligned} \quad (8.77)$$

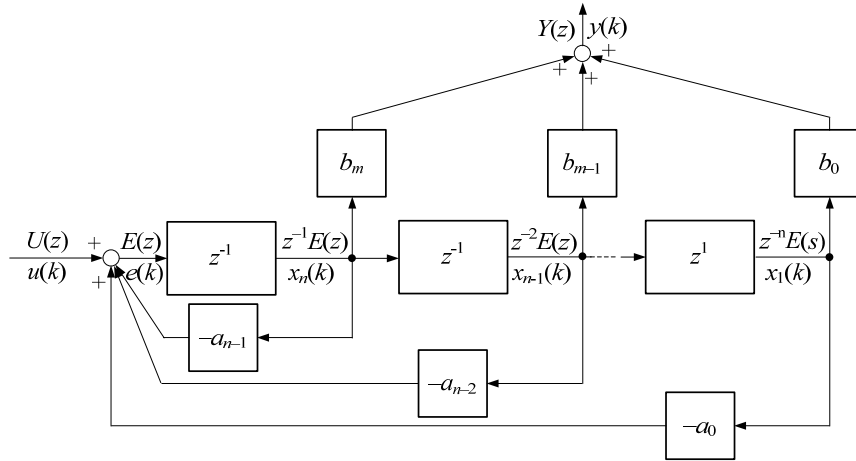
oraz równanie wyjść:

$$\begin{aligned} Y(z) &= (b_M z^{m-n} + b_{M-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n})E(z) \\ &= b_0 X_1(z) + b_1 X_2(z) + \dots + b_m X_{m+1}(z) \end{aligned} \quad (8.78)$$

Na podstawie równań (8.77) i (8.78) można napisać równania w dziedzinie czasu, jak w (8.66) z następującymi macierzami:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad \mathbf{C} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_M \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times n}, \quad \mathbf{D} = [0].$$

Struktura otrzymanego modelu zmiennych stanu jest pokazana na rys. 8.9.



Rys. 8.9. Struktura modelu zmiennych stanu układu dyskretnego (wariant 1)

Jak widać, struktura tego układu jest podobna do struktury układu ciągłego (rys. 8.4).

W odniesieniu do równań stanu układu dyskretnego obowiązują także podobne zasady określania sterowalności i obserwowalności układu.

Przykład 8.13. Dany jest układ dyskretny o następującej transmitancji:

$$G(z) = \frac{2z+1}{z^2 - 0,75z + 0,125}$$

Określić równania stanu tego układu według wariantu 2 (postać obserwowalna).

Postępujemy według metody przedstawionej w odniesieniu do układu ciągłego (3.65), (3.66):

$$Y(z)(z^2 - 0,75z + 0,125) = U(z)(2z + 1),$$

$$Y(z)z^2 = z(0,75Y(z) + 2U(z)) + (-0,125Y(z) + U(z)).$$

Współczynniki transmitancji: $a_0 = 0,125$, $a_1 = -0,75$, $a_2 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$.

Przyjmujemy: $X_2(z) = Y(z)$ oraz:

$$zX_1(z) = -0,125Y(z) + U(z) = -0,125X_2(z) + U(z),$$

$$zX_2(z) = X_1(z) + 0,75Y(z) + 2U(z) = X_1(z) + 0,75X_2(z) + 2U(z)$$

W postaci macierzowej otrzymujemy:

$$z \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 \\ 1 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} U(z)$$

oraz równanie wyjść: $Y(z) = X_2(z)$

w przestrzeni z lub w postaci czasowej:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 \\ 1 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = x_2(k).$$

Macierze tych równań są następujące:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 \\ 1 & 0,75 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [0 \quad 1], \quad d = 0.$$

Sprawdzamy warunek obserwowalności układu:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}, \text{ gdzie:}$$

$$\mathbf{CA} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & -0,125 \\ 1 & 0,75 \end{bmatrix} = [1 \quad 0,75]$$

$$\text{Zatem: } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0,75 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{G}| = -1 \neq 0, \text{ co oznacza, że układ jest obserwowalny.}$$

8.6. Stabilność stanowych układów dyskretnych

Zgodnie z (8.66), macierzowa transmitancja układu dyskretnego reprezentowana za pomocą równań stanu jest następująca:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (8.79)$$

co można zapisać w formie (5.27):

$$\mathbf{G}(z) = \frac{1}{\det(\mathbf{zI} - \mathbf{A})} \mathbf{C}[\text{Adj}(\mathbf{zI} - \mathbf{A})] \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (8.80)$$

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych, o stabilności układów dyskretnych decydują wartości własne macierzy stanu $\mathbf{A}$, które można określić przez rozwiązanie jej równania charakterystycznego:

$$\det(\mathbf{zI} - \mathbf{A}) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0 \quad (8.81)$$

Jeśli wszystkie pierwiastki (8.81) leżą wewnątrz okręgu jednostkowego, to badany układ jest stabilny.

Należy zauważyć, że w ogólnym przypadku problem określania stabilności układów sterowania opisanych za pomocą równań stanu jest znacznie bardziej złożony, gdyż mogą one mieć bardzo zróżnicowaną strukturę, zależną od przyjętej strategii sterowania (patrz rys. 8.8). Zagadnieniem tym zajmuje się teoria sterowania [16], [26], [28].

Zadania

8.1 Obliczyć funkcję $e^{\mathbf{A}t}$ dla podanych macierzy $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uwaga: w celu numerycznego sprawdzenia poprawności uzyskanego rozwiązania można posłużyć się prostym programem w języku Matlab, gdzie wartości funkcji macierzowej $e^{\mathbf{A}t}$ można określić za pomocą funkcji `expm(A*t(k))` dla dyskretnych wartości czasu, na przykład:

`X1=expm(A*t(k));`

8.2 Określić model zmiennych stanu układu, którego dynamika jest opisana następującym równaniem:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 20\frac{dx}{dt} + 10x$$

8.3 Obliczyć funkcję $e^{\mathbf{A}t}$ dla macierzy stanu z przykładu 8.5, posługując się metodą wywodzącą się z twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Porównać wyniki.

- 8.4 W przykładzie na początku rozdz. 2 (rys. 2.1b) jest analizowany układ mechaniczny, w którym odpowiedzią jest prędkość przemieszczania się masy $v(t)$. Powtórzyć tę analizę dla modelu zmiennych stanu, gdzie wyjściem jest położeniem masy $x(t)$. Skorzystać z zależności: $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.
- 8.5 Określić równania stanu w kanonicznej postaci sterowalnej oraz w kanonicznej postaci obserwowalnej układów, które są podane za pomocą następujących transformat:
- a) $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$, b) $G(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + s + 2}$,
- c) $G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 3s + 2}$, d) $G(s) = \frac{s + 1}{s^3 + 4s^2 + 3s}$,
- e) $G(s) = \frac{2s^2 + s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 4}$, f) $G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 3}$.
- 8.6 Sprawdzić, czy układy otrzymane w zadaniu 8.5 są sterowalne i obserwowalne. Określić bieguny transmitancji oraz wartości własne uzyskanych macierzy stanu **A**.
- 8.7 Dane są transmitancje układów dyskretnych, jak w zadaniu 6.6. Określić ich równania zmiennych stanu w postaci sterowalnej i obserwowalnej. Narysować schematy strukturalne tych układów, zgodne z uzyskanymi równaniami.
- 8.8 Sprawdzić warunki sterowalności i obserwowalności układów zmiennych stanu otrzymanych w zadaniu 8.7.

9. KOREKCJA LINIOWYCH CIĄGŁYCH UKŁADÓW REGULACJI

9.1. Jakość liniowych ciągłych układów regulacji

Podstawową konfiguracją układu sterowania jest pętla sprzężenia zwrotnego, która zapewnia kontrolę wielkości wyjściowej systemu. Określenie takiej struktury systemu jest pierwszym krokiem projektowania układu regulacji, jeśli mówimy o układzie z jednym wejściem i jednym wyjściem. Zapewnienie sprzężenia zwrotnego zazwyczaj jednak nie daje gwarancji spełnienia oczekiwań związanych z jakością regulacji. Jakość regulacji jest określana za pomocą zestawu oczekiwanych parametrów regulacji, które są definiowane w odniesieniu do charakterystyk czasowych i częstotliwościowych układu zamkniętego.

Charakterystyki częstotliwościowe są określane za pomocą znanych narzędzi analizy układu, jak charakterystyka logarytmiczna amplitudy i fazy (wykres Bodego), czy też charakterystyka amplitudowo-fazowa (wykres Nyquista). Podstawowymi parametrami są tu: - zapas fazy i zapas wzmocnienia układu zamkniętego.

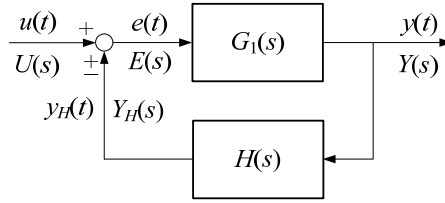
Charakterystyki czasowe odwołują się do odpowiedzi układu zamkniętego na skok jednostkowy, gdzie badane są takie parametry, jak: czas narastania, czas ustalenia, przeregulowanie (wartość maksymalna), czy opóźnienie. Wielkości te są trudne do prognozowania w odniesieniu do układów stopnia większego niż drugi.

Stosunkowo prosto można określić właściwości statyczne układu regulacji, które odnoszą się do stanu ustalonego odpowiedzi i błędu regulacji.

9.1.1. Właściwości statyczne układów ze sprzężeniem zwrotnym

Spośród złożonych układów automatyki podstawowe znaczenie mają struktury ze sprzężeniem zwrotnym (rys. 4.31). Istnienie sprzężenia zwrotnego pozwala jednocześnie śledzić wejście i wyjście układu, co w przypadku sprzężenia ujemnego umożliwia ocenę różnicy pomiędzy wielkością zadaną (wejście) i odpowiedzią (wyjściem) - rys. 9.1.

Realizacja układu ze sprzężeniem zwrotnym jest zazwyczaj droższa od otwartego układu regulacji, jednak uzyskane dzięki temu właściwości układu uzasadniają takie właśnie wykonanie. Dzięki istnieniu sprzężenia zwrotnego można śledzić odstępstwo wielkości wyjściowej od wartości zadanej, czego miarą jest wartość sygnału błędu (uchybu) $e(t)$ (rys. 9.1): $e(t) = u(t) - y_H(t)$.



Rys. 9.1. Układ ze sprzężeniem zwrotnym

Transformata tego błędu jest określona następująco:

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{U(s)}{1 + G_0(s)}, \quad (9.1)$$

gdzie $G_0(s) = G_1(s)H(s)$ jest transmitancją układu otwartego.

Jak widać, rozpatrywany błąd zależy od funkcji wymuszającej oraz od transmitancji układu otwartego. Przebieg tego błędu można uzyskać przez wykonanie odwrotnej transformaty zależności (9.1). Ważną charakterystyką układów automatyki z ujemnym sprzężeniem zwrotnym jest wartość błędu ustalonego przy określonych standardowych wymuszeniach. W takim przypadku przyjmuje się, że $H(s) = 1$, natomiast odpowiedź ustaloną można otrzymać na podstawie twierdzenia o wartości granicznej (Tabela 3.3):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sU(s)}{1 + G_1(s)} \quad (9.2)$$

Jak widać, przy zadanej transmitancji toru głównego, ustalona wartość uchybu zależy od rodzaju wymuszenia. Zakładamy dalej, że rozpatrywany układ (rys. 9.1) jest stabilny. Najczęściej rozpatruje się trzy standardowe rodzaje wymuszeń: skok jednostkowy (rys. 2.6), skok prędkości i skok przyspieszenia (rys. 2.7). Odpowiednio do tego określone są błędy ustalone układu.

Błąd położenia jest ustaloną wartością uchybu w przypadku, gdy na wejście podawany jest skok jednostkowy:

$$u(t) = 1(t), \quad U(s) = 1/s,$$

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_1(s)} \quad (9.3)$$

Widać, że wartość ustalona uchybu położenia zależy od transmitancji $G_1(s)$. Załóżmy, że transmitancja ta może być przedstawiona w następującej postaci:

$$G_1(s) = \frac{L(s)}{s^m M(s)}, \quad (9.4)$$

przy czym $L(s)$ oraz $M(s)$ reprezentują wielomiany, które można zapisać w następującej formie iloczynowej: $L(s) = k(T_{l1}s + 1)(T_{l2}s + 1) \cdots (T_{ln}s + 1)$,

$$M(s) = (T_{m1}s + 1)(T_{m2}s + 1) \cdots (T_{mp}s + 1) = a_p s^p + a_{p-1} s^{p-1} + \cdots + a_1 s + 1, p \geq n.$$

Wartość wykładnika m w (9.4) określa klasę rozpatrywanego układu: $m = 0$ – układ klasy zerowej (statyczny), $m = 1$ – układ klasy pierwszej i tak dalej. Podstawiając (9.4) do (9.3), otrzymamy:

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{L(s)}{s^m M(s)}} \quad (9.5)$$

Wartość ustalona uchybu położenia zależy więc od klasy układu. Dla układu statycznego ($m = 0$) jest on równy:

$$e_p = \frac{1}{1 + \frac{L(0)}{M(0)}} = \frac{1}{1 + k},$$

gdzie: $k = \frac{L(0)}{M(0)}$ - wzmocnienie statyczne układu.

Dla $m > 0$ wartość granicy w (9.5) jest równa zero: znika ustalony uchyb położenia, a więc ustalona odpowiedź układu przyjmuje wartość wymuszenia.

Uzyskane powyżej relacje określają podstawowe właściwości układów z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, w których występują układy statyczne lub astatyczne w torze głównym:

- układ statyczny ($m = 0$) charakteryzuje się skończoną wartością odpowiedzi w stanie ustalonym, co prowadzi do ustalonego uchybu położenia e_p ;
- odpowiedź układu astatycznego ($m > 0$) na skok jednostkowy narasta nieograniczenie (efekt całkowania wymuszenia), jednak dzięki sprzężeniu zwrotnemu, następuje z czasem redukcja uchybu do zera: w stanie przejściowym odpowiedź układu dąży do wartości określonej przez wymuszenie.

Ustalony błąd prędkościowy jest uchybem, jaki powstaje przy wymuszeniu w postaci jednostajnie narastającego sygnału:

$$u(t) = t1(t), U(s) = 1/s^2,$$

$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/s}{1 + G_1(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{m-1} M(s)}{s^m M(s) + L(s)} \quad (9.6)$$

Łatwo zauważyć, że uchyb ten kształtuje się następująco:

- $m = 0$ (układ statyczny) - $e_v = \infty$;

- $m = 1$ (układ astatyczny 1-go rzędu) - $e_v = \frac{M(0)}{L(0)} = \frac{1}{k}$;
- $m > 1$ - $e_v = 0$.

Ustalony błąd przyśpieszeniowy jest uchybem, jaki powstaje przy wymuszeniu w postaci sygnału narastającego kwadratowo (parabolicznie):

$$u(t) = (1/2)t^2 1(t), U(s) = 1/s^3,$$

$$e_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/s^2}{1 + G_1(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{m-2} M(s)}{s^m M(s) + L(s)} \quad (9.7)$$

Analiza podobna, jak w poprzednim przypadku, prowadzi do następujących wartości błędu ustalonego przyśpieszenia:

- $m = 0$ (układ statyczny) - $e_a = \infty$;
- $m = 1$ (układ astatyczny 1-go rzędu) - $e_a = \infty$;
- $m = 2$ (układ astatyczny 2-go rzędu) - $e_a = \frac{M(0)}{L(0)} = \frac{1}{k}$.

Dla układów astatycznych rzędu wyższego niż drugi ustalone błędy przyśpieszeniowe są równe zero. Zestawienie uchybów ustalonych, odpowiadających rozpatrywanym układom, jest pokazane w Tabeli 9.1.

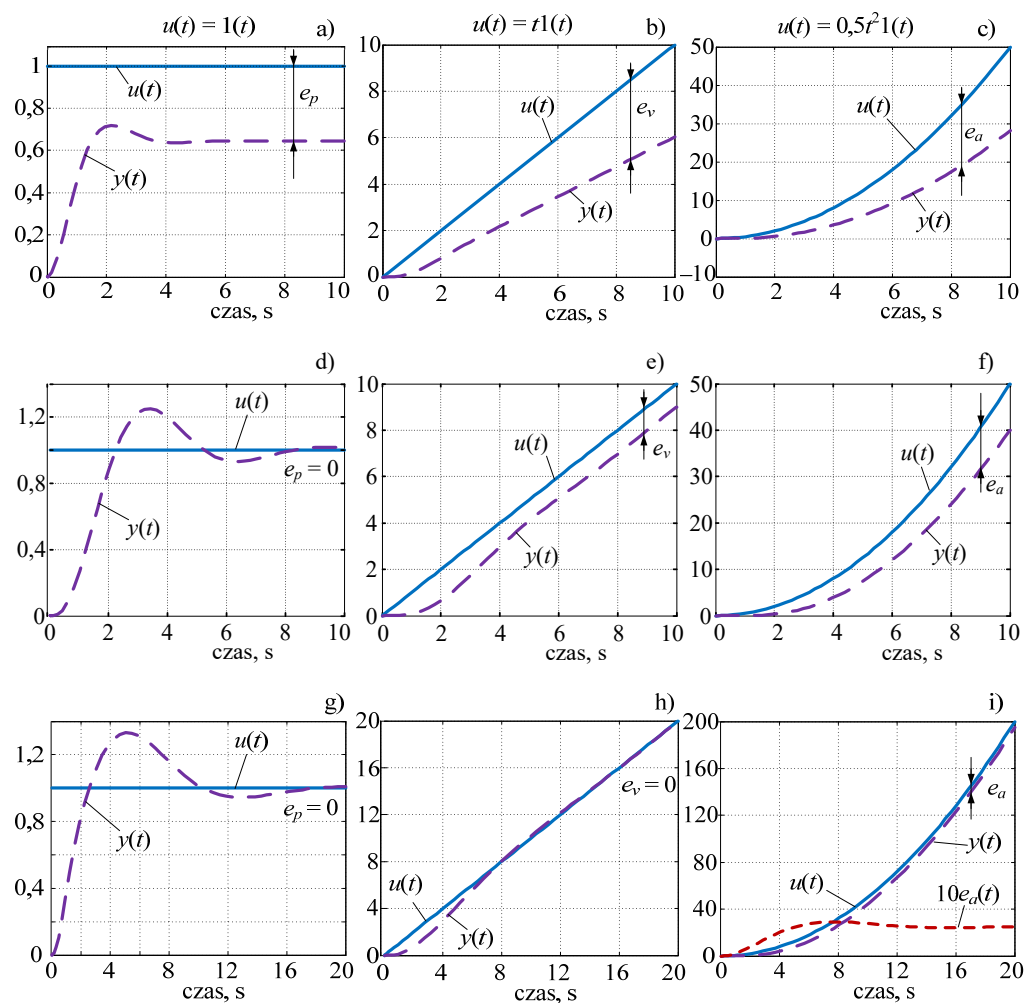
Tabela 9.1. Zestawienie uchybów ustalonych: położenia, prędkościowego i przyśpieszeniowego dla układów: statycznego oraz astatycznych pierwszego i drugiego stopnia.

Transmitancja układu otwartego $G_1(s)$	Charakter wymuszenia/uchyb		
	$u(t)=1(t)$ e_p – uchyb położenia	$u(t)=t1(t)$ e_v – uchyb prędkościowy	$u(t)=(t^2/2)1(t)$ e_a – uchyb przyśpieszeniowy
$G_1(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$ $m = 0$	$\frac{1}{1+k}$	∞	∞
$G_1(s) = \frac{L(s)}{sM(s)}$ $m = 1$	0	$\frac{1}{k}$	∞
$G_1(s) = \frac{L(s)}{s^2 M(s)}$ $m = 2$	0	0	$\frac{1}{k}$

W każdym z rozpatrywanych przypadków wzmocnienie k jest obliczane jako relacja wynikająca z transmitancji układu otwartego, z pominięciem biegunów zerowych:

$k = L(0)/M(0)$. W zależności od charakteru wymuszenia, współczynnik k nosi nazwę wzmocnienia statycznego, prędkościowego lub przyśpieszeniowego. Sposób osiągania wartości ustalonych poszczególnych rodzajów uchybów dla układów klasy 0, 1 i 2 jest

ilustrowany na rys. 9.2. W przypadku układu statycznego (klasy 0, rys. 9.2a-c) tylko uchyb położenia e_p przyjmuje skończoną wartość. Przy wymuszeniu narastającym liniowo (rys. 9.2b) lub parabolicznie (rys. 9.2c) uchyb z czasem narasta nieograniczenie.

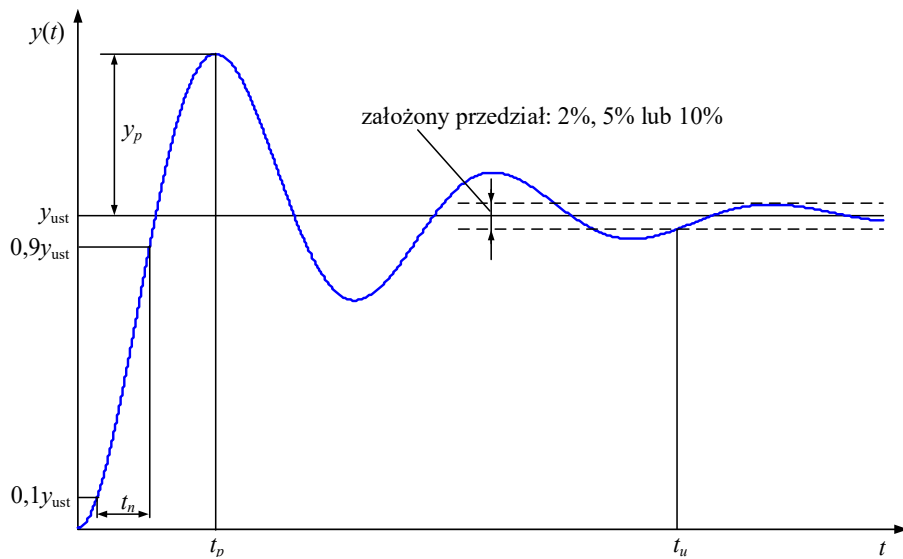


Rys. 9.2. Przykłady odpowiedzi układów:

Również w przypadku układów 1-szej (rys. 9.2d-f) i 2-iej klasy (rys. 9.2g-i) używamy potwierdzenie danych z Tabeli 9.1. W ostatnim przypadku uchyb prędkościowy ustala się na niewielkiej wartości (pokazana jest 10-krotna wartość przebiegu tego uchybu w czasie - rys. 9.2i).

9.1.2. Badanie właściwości dynamicznych układów ze sprzężeniem zwrotnym

Badanie właściwości układów regulacji w czasie nie jest do końca zdefiniowane, jak w przypadku badania stanów ustalonych. Sposób przebiegu odpowiedzi układu zależy od wielu czynników, które są związane z charakterem wymuszenia i transmitancją układu. Podstawowe właściwości dynamiczne można określić na podstawie odpowiedzi układu na skok jednostkowy. Badanie takie jest zbliżone do analizy układu oscylacyjnego (p. 4.3.3).



Rys. 9.3. Parametry odpowiedzi układu oscylacyjnego

Odpowiedź układu na skok jednostkowy daje możliwość określenia podstawowych dynamicznych charakterystyk układu (rys. 9.3):

- t_n – czas narastania;
- t_p – czas do pierwszego maksimum;
- t_u – czas ustalenia (czas, po którym odpowiedź układu nie wykracza poza zdefiniowany przedział);
- przeregulowanie y_p :

$$y_p = \frac{y_{\max} - y_{ust}}{y_{ust}} \cdot 100 \text{ [\%]} \quad (9.8)$$

Czas narastania t_r jest zazwyczaj definiowany w odniesieniu do określonego przedziału zmiany odpowiedzi na skok jednostkowy, na przykład jako czas narastania od 10% do 90% wartości ustalonej y_{ust} . Przy znanej transmitancji układu, wielkości te można łatwo określić, posługując się jednym ze znanych programów obliczeniowych, na przykład, MATLAB [45].

9.1.3. Wskaźniki jakości regulacji

Bardziej ogólne wskaźniki jakości regulacji są definiowane w odniesieniu do przebiegów błędu regulacji (uchybu) w czasie. Wskaźniki te oceniają całkowity błąd regulacji w czasie trwania stanu przejściowego po wymuszeniu w postaci skoku jednostkowego. Wartość wskaźnika jest w takim przypadku odwrotnie proporcjonalna do jakości regulacji. Jeśli uchyb regulacji nie zmienia znaku, to najprostszym wskaźnikiem jest definiowany następująco:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e_p(t) dt \quad (9.9)$$

Gdy odpowiedź układu jest oscylacyjna, to zmodyfikowana postać tego kryterium ma następującą formę:

$$I_{1m} = \int_0^{\infty} |e_p(t)| dt \quad (9.10)$$

Powszechnie jest także stosowane kryterium kwadratowe:

$$I_2 = \int_0^{\infty} e_p^2(t) dt \quad (9.11)$$

Wielkości te można także obliczać w przestrzeni Laplace'a. Na przykład, na podstawie twierdzenia Parsevala, w którym korzysta się z równości mocy sygnału reprezentowanego w dziedzinie czasu i częstotliwości, indeks kwadratowy można określić następująco [47]:

$$I_2 = \int_0^{\infty} e_p^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |E(s)|^2 ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s) ds \quad (9.12)$$

Zauważmy, że całka po prawej stronie równości (9.12) odnosi się do funkcji zespolonej i można ją obliczać na podstawie residuów. Jeśli transformatę uchybu można przedstawić w postaci funkcji wymiernej:

$$E(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, \quad (9.13)$$

to wynik operacji (9.12) prowadzi do kryterium kwadratowego I_2 . Wartości tych wskaźników dla trzech pierwszych rzędów n transformaty (9.13), są zebrane w Tabeli 9.2 [31].

Przykład 9.1. W torze głównym zamkniętego układu regulacji o jednostkowym sprzężeniu zwrotnym znajduje się układ II-rzędu o transmitancji (4.62):

$$G_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta s + \omega_n^2}$$

Tabela 9.2. Wartości kwadratowego wskaźnika jakości I_2 .

n	I_2
1	$\frac{b_0^2}{2a_0a_1}$
2	$\frac{b_1^2a_0 + b_0^2a_2}{2a_0a_1a_2}$
3	$\frac{b_2^2a_0a_1 + (b_1^2 + 2b_0b_2)a_0a_3 + b_0^2a_2a_3}{2a_0a_3(-a_0a_3 + a_1a_2)}$

Określić wartość współczynnika tłumienia ζ , przy którym indeks kwadratowy I_2 przyjmuje najmniejszą wartość.

Transformata uchybu położenia (wymuszenie w postaci skoku jednostkowego) jest następująca:

$$E_p(s) = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) = \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\text{oraz: } E_p(-s) = \frac{-s + 2\zeta\omega_n}{s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Na podstawie Tabeli 9.2 ($n = 2$), otrzymujemy:

$$I_2 = \frac{1 + 4\zeta^2}{4\zeta\omega_n}$$

Minimalizacja wskaźnika I_2 względem współczynnika tłumienia prowadzi do następujących zależności:

$$\frac{dI_2}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1 + 4\zeta^2}{4\zeta\omega_n} \right) = \frac{4\zeta^2 - 1}{4\zeta^2\omega_n} = 0,$$

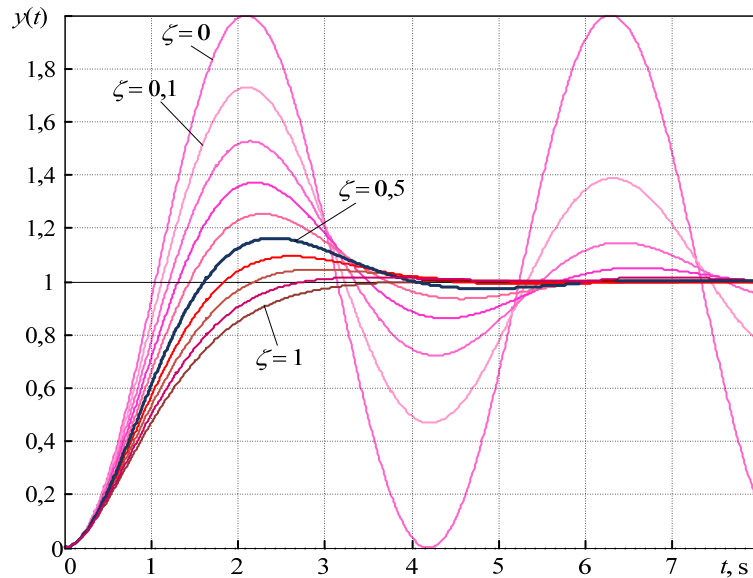
skąd: $\zeta = 0,5$.

Odpowiedzi układu na skok jednostkowy przy różnych wartościach współczynnika $0 \leq \zeta \leq 1$ są pokazane na rys. 9.4. Przyjęto $\omega_n = 1,5$. Linia pogrubioną jest zaznaczona odpowiedź związana z minimalną wartością kwadratowego wskaźnika jakości I_2 . Kwadrat pola pomiędzy przebiegiem tej odpowiedzi i wartością ustaloną ($y = 1$) jest najmniejszy.

Na podstawie (4.69) można określić wartość maksymalną odpowiedzi dla $\zeta = 0,5$:

$$y_{\max} = 1 + \exp \left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \pi \right) = 1,163, \text{ co daje przeregulowanie } y_p = 16,3\%.$$

W zadaniach optymalizacji układów regulacji dąży się do uzyskania minimalnych wartości wskaźników regulacji (najczęściej stosuje się całkowite wskaźniki kwadratowe). Zagadnienia te dotyczą zaawansowanych metod syntezy układów regulacji i sterowania [20, 45].



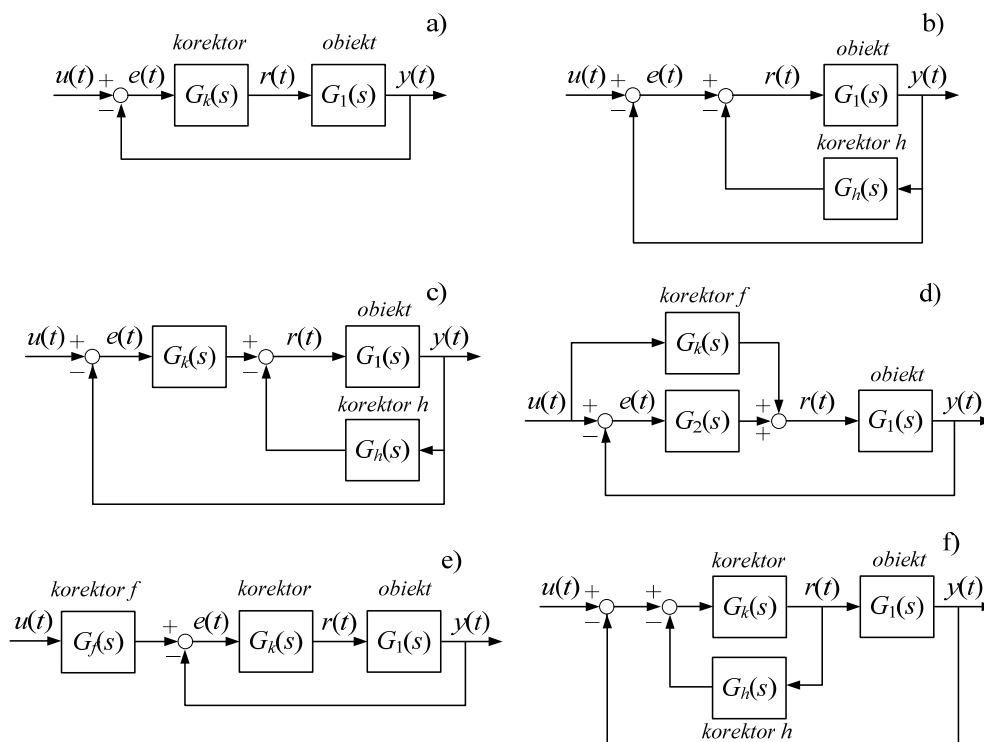
Rys. 9.4. Przebiegi odpowiedzi układu na skok jednostkowy dla różnych wartości współczynnika tłumienia ζ

9.2. Zasady korekcji układów regulacji

Uzyskanie postulowanych charakterystyk układów regulacji jest możliwe przez modyfikację ich transmitancji. Zazwyczaj niemożliwa jest modyfikacja transmitancji obiektu regulacji, wobec czego modyfikacja odbywa się przez dodanie układu o znanej transmitancji w odpowiednie miejsce układu sterowania. Proces ten nazywa się korekcją układu regulacji. W praktyce stosowane są następujące sposoby korekcji:

- korekcja szeregową, gdy korektor jest włączony w torze głównym szeregowo z obiektem regulacji;
- korekcja w torze sprzężenia zwrotnego: korektor znajduje się w dodatkowej pętli sprzężenia zwrotnego z obiektem regulacji lub z klasycznym korektorem szeregowym. Stosowane są także kombinacje obu tych metod. Niektóre przykłady są pokazane na rys. 9.5 [20].

Proces projektowania układu regulacji obejmuje wybór jego struktury, transmitancji korektora oraz parametrów tej transmitancji. Wyjściowym etapem jest jednak identyfikacja obiektu, która ma na celu określenie jego transmitancji oraz charakterystyk czasowych i częstotliwościowych. Na tym etapie należy także zdefiniować oczekiwania w stosunku do projektowanego układu.



Rys. 9.5. Struktury niektórych sposobów korekcji układów regulacji: korekcja szeregową a); korekcja w sprzężeniu zwrotnym b); korekcja szeregową i w sprzężeniu zwrotnym c); korekcja addytywną d); korekcja szeregową z korekcją otwartą e); korekcja predykcyjna f)

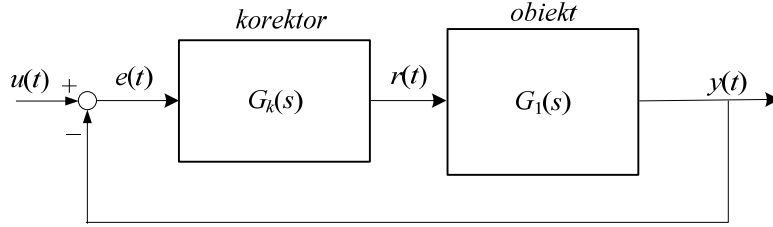
W dalszej części rozdziału omówione są właściwości niektórych szerzej stosowanych metod korekcji oraz zasady ich projektowania.

9.3. Korekcja szeregową

Korekcja szeregową charakteryzuje się tym, że korektor o transmitancji $G_k(s)$ jest umieszczany w torze głównym zamkniętej pętli regulacji (rys. 9.6). Transmitancja korektora ma zazwyczaj postać funkcji wymiernej, co jest uzasadnione zarówno prostotą jej analizy, jak i łatwością fizycznej realizacji.

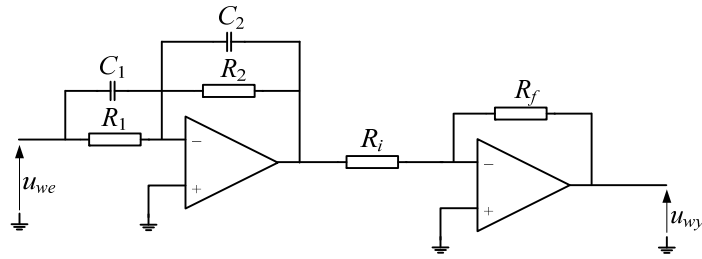
Elementarny korektor ma następującą funkcję przejścia:

$$G_k(s) = A \frac{sT + 1}{s \frac{T}{\beta} + 1} \quad (9.14)$$



Rys. 9.6. Układ regulacji z korektorem szeregowym

Człon o transmitancji (9.14) można łatwo wykonać za pomocą dwóch wzmacniaczy operacyjnych (rys. 9.7).



Rys. 9.7. Realizacja transmitancji (9.14)

Funkcja przejścia układu z rys. 9.7 jest następująca:

$$G_k(s) = \frac{R_f R_2}{R_i R_1} \frac{s R_1 C_1 + 1}{s R_2 C_2 + 1} = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} \quad (9.15)$$

Jeśli przyjąć, że $C_1 = C_2 = C$, to transmitancję (9.15) można zapisać w formie (9.14), gdzie:

$$A = \frac{R_f R_2}{R_i R_1}, \quad T = R_1 C, \quad \beta = \frac{R_1}{R_2}.$$

Właściwości korektora o transmitancji (9.14) zależą przede wszystkim od wartości współczynnika β :

$$\beta = \begin{cases} > 1 & \text{korektor przyspieszający fazę (ang. phase – lead)} \\ < 1 & \text{korektor opóźniający fazę (ang. phase – lag)} \end{cases}$$

Dalej będą analizowane właściwości obu tych korektorów szeregowych. Projektowanie korektorów może się odbywać na bazie analizy położenia biegunów transmitancji lub analizy charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego (charakterystyki Bodego lub Nyquista). Dalej stosowana jest ta druga metoda.

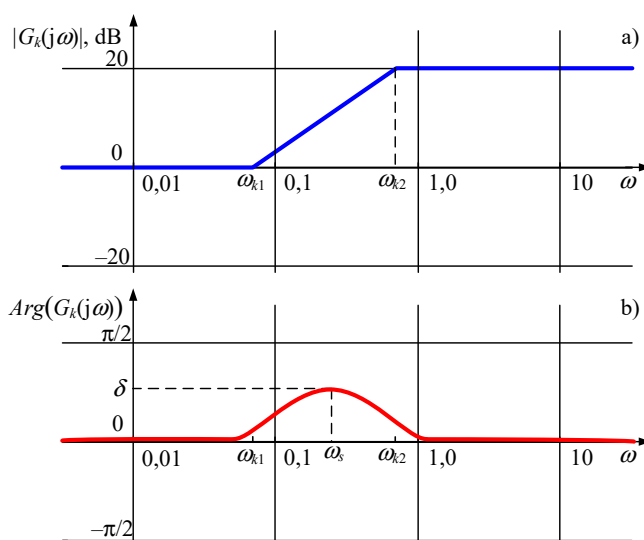
9.3.1. Korektor przyspieszający

Ten typ korektora jest wybierany w przypadku, gdy błędy statyczne (statyczny uchyb ustalony) układu przed korekcją są satysfakcjonujące, natomiast występują problemy ze zbyt małym zapasem stabilności, co objawia się w postaci dużych oscylacji, znacznego przeregulowania i długiego czasu ustalania się odpowiedzi na skok jednostkowy.

Korektor przyspieszający (ang. *phase lead corrector*) ma następującą transmitancję:

$$G_k(s) = A \frac{sT + 1}{s \frac{T}{\beta} + 1}, \beta > 1 \quad (9.16)$$

Logarymiczne charakterystyki fazy takiego układu są pokazane na rys. 9.8.



Rys. 9.8. Logarymiczna charakterystyka częstotliwościowa korektora przyspieszającego: amplitudy (a) oraz fazy (b)

Można zauważyć, że korektor ten ma właściwości zbliżone do rzeczywistego układu różniczkującego: faza na wyjściu korektora ulega przyspieszeniu o niemal $\pi/4$ bez istotnej zmiany amplitudy. Jeśli to przyspieszenie przypadnie na przedział w pobliżu przejścia charakterystyki amplitudowej układu otwartego przez wartość 1, to uzyskuje się przesunięcie zapasu fazy układu o wartość $\pi/4$. Negatywną stroną tego efektu jest wzmocnienie szumów w zakresie wysokich częstotliwości.

Wielkości charakterystyczne zaznaczone na rys. 9.8 są związane z parametrami korektora:

$$\omega_{k1} = \frac{1}{T}, \quad \omega_{k2} = \frac{\beta}{T}, \quad \omega_s = \frac{\sqrt{\beta}}{T}, \quad \delta = \arctg \frac{\beta-1}{2\sqrt{\beta}} = \arcsin \frac{\beta-1}{\beta+1}, \quad |G_k(\omega_s)| = A\sqrt{\beta} \quad (9.17)$$

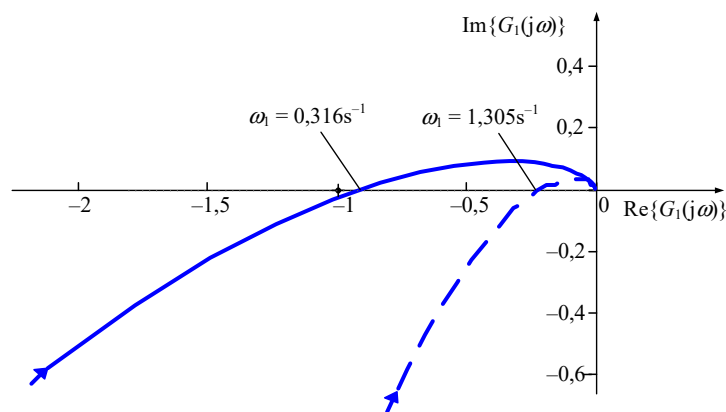
Dobór parametrów korektora prowadzi się w oparciu o charakterystykę amplitudowo-fazową układu otwartego (charakterystyka Nyquista), posilując się jednocześnie odpowiedzią układu zamkniętego na skok jednostkowy w celu weryfikacji uzyskanego rezultatu w dziedzinie czasu. Procedurę tę często realizuje się w kilku krokach na zasadzie ‘prób i błędów’.

Przykład 9.2. Dany jest układ regulacji ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym, w którym transmitancja członu w torze głównym jest następująca:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)(10s+1)}$$

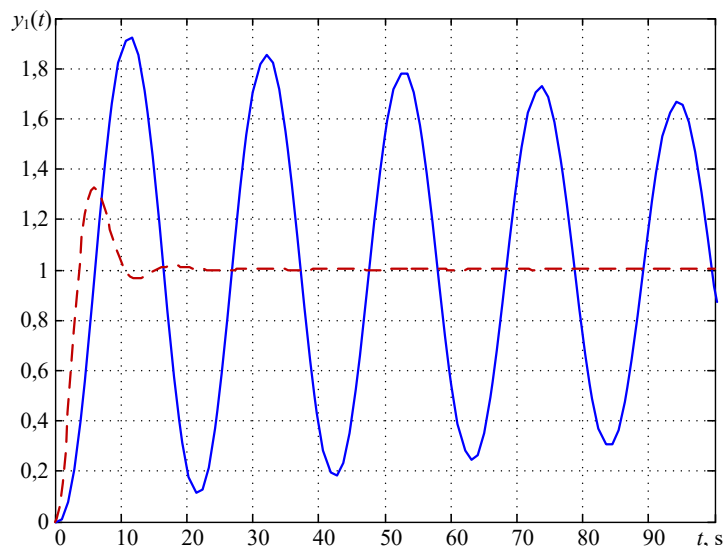
Zbadać właściwości tego układu i zaproponować korektor w celu ich poprawy.

Widać, że układ jest klasy pierwszej (pojedynczy zerowy biegun), więc statyczny uchyb położenia jest równy zero: $e_p = 0$, natomiast uchyb prędkościowy: $e_v = 1/k = 1$, co jest dużą wartością. Charakterystyka Nyquista jest pokazana na rys. 9.9 (linia ciągła). Układ zamknięty ma bardzo mały zapas stabilności: zapas fazy wynosi $\Delta\varphi = 1,7^\circ$, zapas wzmocnienia $g = 1,1$ dla pulsacji $\omega_1 = 0,316s^{-1}$.



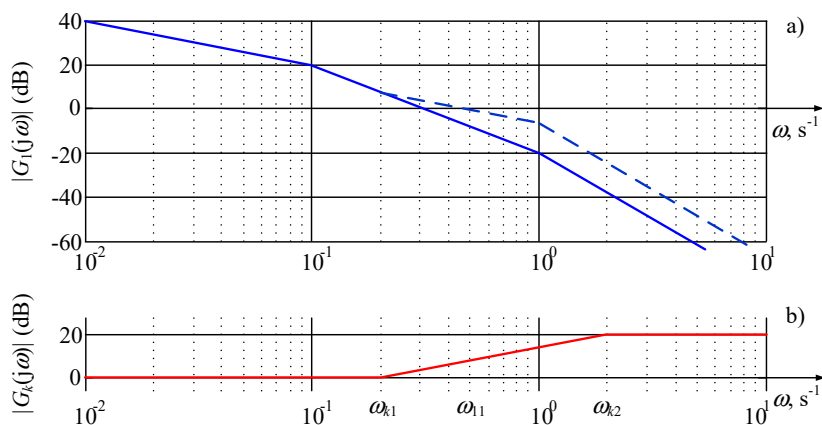
Rys. 9.9. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego: linia przerywana – układ po korekcji

Niekorzystne właściwości układu zamkniętego widać także na podstawie odpowiedzi na skok jednostkowy (rys. 9.10 – linia ciągła): układ znajduje się blisko granicy stabilności, gdyż występuje małe tłumienie oscylacji o dużej amplitudzie.



Rys. 9.10. Odpowiedź na skok jednostkowy: linia przerywana – układ po korekcji

Przy projektowaniu korektora przyspieszającego wygodnie jest także posłużyć się charakterystyką logarytmiczną układu i korektora (rys. 9.11). W tym przypadku widać, że mały zapas stabilności jest związany z dużym nachyleniem logarytmicznej charakterystyki amplitudowej układu w obszarze przecinania z osią pulsacji (w tym przypadku: -40 dB/dek). Korektor powinien złagodzić to nachylenie w rozpatrywanym obszarze.



Rys. 9.11. Charakterystyki logarytmiczne amplitudy układu (a) i korektora (b)

Zaproponowany korektor jest zdefiniowany przez dwie charakterystyczne pulsacje: ω_{k1} i ω_{k2} , którym odpowiadają stałe czasowe w transmitancji korektora (9.16): $1/T = \omega_{k1}$ oraz $\beta/T = \omega_{k2}$.

W danym przypadku (rys. 9.11) przyjęto następujące wartości: $\omega_{k1} = 0,2 \text{ s}^{-1}$ oraz $\omega_{k2} = 2,0 \text{ s}^{-1}$, skąd otrzymujemy: $T = 1/0,2 = 5 \text{ s}$ oraz $\beta = 2,0T = 10$. Prowadzi to do następującej transmitancji korektora:

$$G_k(s) = \frac{5s+1}{0,5s+1}, A = 1.$$

Skorygowana logarytmiczna charakterystyka amplitudowa układu otwartego jest pokazana na rys. 9.11a, natomiast jego charakterystyka amplitudowo-fazowa – na rys. 9.9 (linia przerywana). Można zauważyć, że skorygowany układ ma tym razem duży zapas fazy i wzmocnienia. Odbija się to także na obrazie dynamiki układu zamkniętego - rys. 9.10 (linia przerywana).

Procedura przedstawiona w przykładzie 9.2 pokazuje zasadę postępowania przy doborze korektora przyspieszającego. Przybliżenie się do pożądanej charakterystyki skorygowanego układu niekiedy wymaga wykonania kilku kroków tej procedury. Należy także pamiętać, że logarytmiczna charakterystyka amplitudy może być pomocna tylko w przypadku układów bez opóźnień.

Analizę wpływu korektora przyspieszającego na układ regulacji można także prowadzić z pomocą badania położenia zer i biegunów jego transmitancji. Można zauważyć, że zwiększenie wartości β w transmitancji (9.16) powoduje odsunięcie bieguna transmitancji korektora ($s = -\beta/T$) od osi urojonej, przy niezmiennym położeniu zera: ($s = -1/T$).

9.3.2. Korektor opóźniający

Transmitancja korektora opóźniającego (ang. *phase lag corrector*) różni się od funkcji przejścia korektora przyspieszającego jedynie zakresem zmian współczynnika β :

$$G_k(s) = A \frac{sT+1}{s\frac{T}{\beta}+1}, 0 < \beta < 1 \quad (9.18)$$

Logarytmiczne charakterystyki fazy takiego układu są pokazane na rys. 9.12. Wiadąc, że układ ten ma cechy rzeczywistego układu całkującego: w pobliżu częstotliwości odpowiadającej wzmocnieniu równemu 1, faza układu zostaje opóźniona niemal o wartość $-\pi/4$. Na zespolonej płaszczyźnie pierwiastków transmitancji, zmniejszenie współczynnika β powoduje zbliżenie bieguna transmitancji korektora ($s = -\beta/T$) do osi urojonej przy niezmiennym położeniu zera ($s = -1/T$).

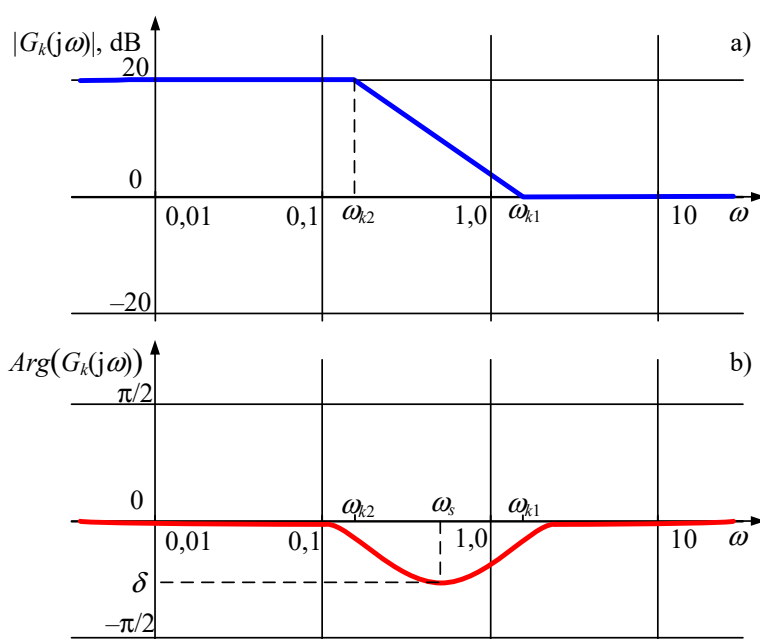
Wielkości charakterystyczne zaznaczone na rysunku są związane z parametrami korektora w tych samych relacjach, jak dla korektora przyspieszającego (9.17):

$$\omega_{k1} = \frac{1}{T}, \quad \omega_{k2} = \frac{\beta}{T}, \quad \omega_s = \frac{\sqrt{\beta}}{T}, \quad \delta = \arctg \frac{\beta-1}{2\sqrt{\beta}} = \arcsin \frac{\beta-1}{\beta+1}, \quad |G_k(\omega_s)| = A\sqrt{\beta}.$$

Korektor opóźniający stosuje się w przypadku dobrych właściwości dynamicznych układu, które są związane z zapasem stabilności, czasem narastania, czy też czasem

ustalania się odpowiedzi, natomiast przy niepoprawnych właściwościach statycznych (w zakresie niskich częstotliwości). Sytuacja taka zachodzi w przypadku układów klasy zerowej (brak zerowego bieguna w transmitancji obiektu), gdzie uchyb statyczny ustalony zależy od wzmocnienia układu otwartego (patrz p. 4.6).

Korektor opóźniający może być także stosowany w celu poprawy stabilności układu zamkniętego przez złagodzenie nachylenia charakterystyki amplitudowej na wykresie Bodego w przedziale przejścia tej charakterystyki przez wartość wzmocnienia równego 1. Wykorzystuje się tu spadek wzmocnienia korektora w zakresie wysokich częstotliwości.



Rys. 9.12. Logarymiczna charakterystyka częstotliwościowa korektora opóźniającego: amplitudy (a) oraz fazy (b)

Zauważmy, że w zakresie wysokich częstotliwości zanika oddziaływanie korektora na układ regulacji (rys. 9.12). Z tej charakterystyki wynika, że rozpatrywany korektor ma cechy filtra dolnoprzepustowego.

Reguły postępowania zależą od transmitancji obiektu, jednak ogólne zasady przy stosowaniu charakterystyki logarymicznej stają się jasne po konfrontacji z wykresem z rys. 9.11, gdzie pokazany jest sposób kompensacji za pomocą korektora przyspieszającego. Tym razem korektor będzie przesuwiał charakterystykę amplitudową w kierunku mniejszych częstotliwości, co wymaga odpowiedniego kształtowania charakte-

rystyki w obszarze, gdzie amplituda przyjmuje wartość zbliżoną do 1. Sposób doboru korektora opóźniającego wyjaśnia kolejny przykład.

Przykład 9.3. Dany jest układ regulacji ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym, w którym transmitancja obiektu jest następująca:

$$G_1(s) = \frac{0,5}{s^2 + s + 1}$$

Dobrać korektor, który zapewni uchyb statyczny położenia $e_p = 2\%$ i zapas fazy $\Delta\varphi = 35^\circ$.

Widać, że rozważany obiekt ma charakter oscylacyjny (para biegunów zespolonych). Zapiszmy jego transmitancję w postaci (4.62):

$$G_1(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2s\omega_n\zeta + \omega_n^2}, \text{ gdzie: } k = 0,5, \omega_n = 1, \zeta = 0,5.$$

Kolejne kroki postępowania można ująć w następujące punkty.

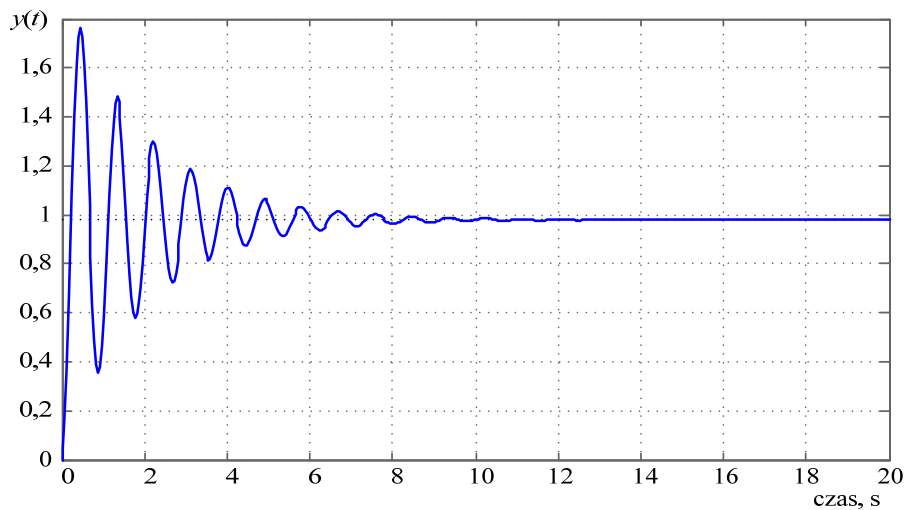
1. Widać, że układ jest klasy zerowej, więc statyczny uchyb położenia układu z korektorem jest równy (9.5):

$$e_p = \frac{1}{1 + Ak},$$

gdzie: $k = 0,5$ (wzmocnienie obiektu), A – wymagane wzmocnienie korektora.

Zadany uchyb położenia:

$$e_p = \frac{1}{1 + 0,5A} = 0,02, \text{ skąd } A = \frac{0,98}{0,5 \cdot 0,02} = 98.$$



Rys. 9.13. Odpowiedź na skok jednostkowy układu regulacji z korektorem proporcjonalnym

Odpowiedź na skok jednostkowy układu zamkniętego z korektorem w postaci tylko wzmacniacza o wartości wzmocnienia A , jest pokazany na rys. 9.13.

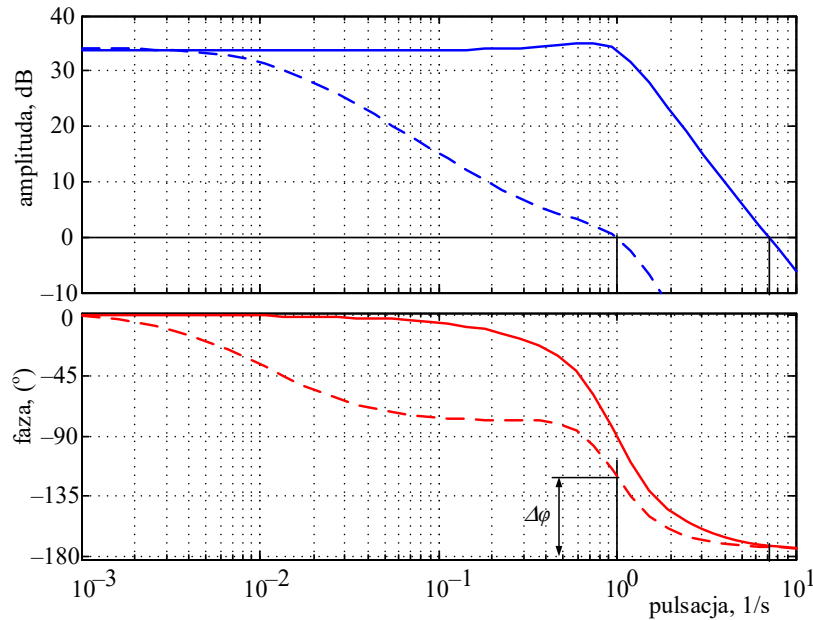
Widać, że wprowadzicie uchyb statyczny jest poprawny, jednak przeregulowanie jest niedopuszczalnie duże.

2. Dobieramy stałą czasową T korektora na podstawie charakterystyki logarymicznej układu otwartego o transmitancji: $AG_1(j\omega)$ (rys. 9.14). Na charakterystyce fazowej zaznaczamy punkt, odpowiadający wymaganemu zapasowi fazy:

$$\varphi_1 = -180^\circ + \Delta\varphi + \alpha,$$

gdzie $\alpha = 5^\circ \div 12^\circ$ (w celu kompensacji związanej ze sprzężeniem zwrotnym).

Przyjmując $\alpha = 10^\circ$, otrzymamy: $\varphi_p = -135^\circ$. Punktowi temu odpowiada pulsacja $\omega_p = 1,62 = 1/T$. Zakładamy, że przy tej pulsacji amplituda układu skorygowanego powinna przyjąć wartość 1 (zero na charakterystyce Bodego). Jednak, w celu ograniczenia zbyt radykalnego działania korektora opóźniającego, należy tę częstotliwość pomniejszyć o około jedną dekadę [45]. Do dalszych rozważań przyjmujemy: $\omega_p = 0,7$ oraz: $T = 1/\omega_p = 1,43$ s.

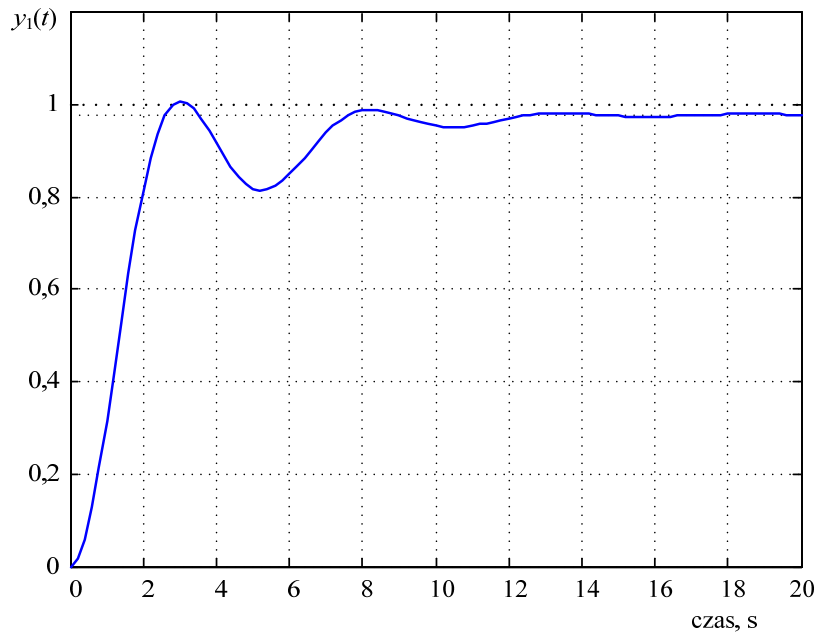


Rys. 9.14. Charakterystyka logarymiczna układu otwartego: układ przed korekcją (linie ciągłe) oraz po korekcji (linie przerywane)

3. Wartość współczynnika β należy wyznaczyć za pomocą kolejnych symulacji tak, aby uzyskać poprawne charakterystyki czasowe układu zamkniętego. W charakterze pierwszego przybliżenia można przyjąć wartość β wychodząc z założenia, że wzmocnienie układu otwartego powinno być zredukowane do wartości 1 dla pulsacji $\omega_p = 0,7$. Widać z rys. 9.14, że redukcja wzmocnienia powinna wynosić 36 dB. Zatem:

$$20 \log \frac{T}{T/\beta} = 20 \log \beta = -36, \text{ skąd otrzymujemy: } \beta = 0,016, \text{ dla którego } \Delta\varphi = 50^\circ.$$

Przebieg odpowiedzi na skok jednostkowy uzyskanego układu zamkniętego jest pokazany na rys. 9.15. Odpowiedź charakteryzuje się niewielkim przeregulowaniem i dosyć krótkim czasem ustalenia.



Rys. 9.15. Odpowiedź na skok jednostkowy układu zamkniętego z korektorem

Transmitancja poszukiwanego korektora jest więc następująca:

$$G_k(s) = A \frac{sT + 1}{sT / \beta + 1} = \frac{140,14s + 98}{89,375s + 1},$$

natomiast transmitancja skorygowanego układu otwartego:

$$G_o(s) = G_k(s)G_1(s) = \frac{70,07s + 49}{89,38s^3 + 90,38s^2 + 90,38s + 1}$$

Na podstawie rezultatów z przykładu 9.3 widać, że niekiedy redukcja uchybu statycznego położenia wymaga zastosowania dużego wzmocnienia w transmitancji korektora, co istotnie zmniejsza zapas wzmocnienia. Dobór podstawowej części transmitancji korektora powinien odwrócić tę tendencję, zapewniając mały uchyb ustalony i dobre właściwości dynamiczne układu.

9.3.3. Korektor przyspieszająco-opóźniający

W przypadku, gdy układ regulacji ma złe właściwości w zakresie niskich częstotliwości (duże statyczne błędy ustalone) oraz mały zapas stabilności (co objawia się dużym przeregulowaniem i długim czasem ustalenia), stosowne jest połączenie korektora

opóźniającego z korektorem przyspieszającym fazę. Transmitancja korektora przyspieszająco-opóźniającego ma następującą postać:

$$G_k(s) = A \frac{sT_1 + 1}{s \frac{T_1}{\beta_1} + 1} \cdot \frac{sT_2 + 1}{s \frac{T_2}{\beta_2} + 1}, \quad (9.19)$$

gdzie: $T_1 > T_2$, $0 < \beta_1 < 1$, $\beta_2 > 1$.

W takim przypadku pierwszy człon stanowi korektor opóźniający, a drugi - korektor przyspieszający fazę.

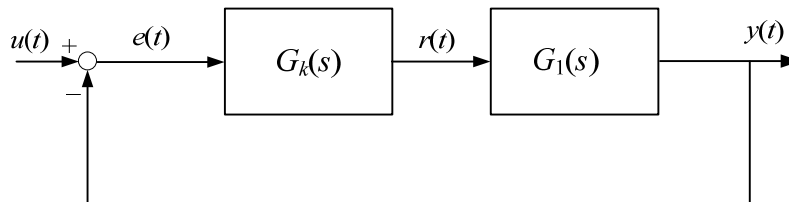
Przykład 9.4. Dany jest układ regulacji ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym, w którym, transmitancja obiektu jest następująca:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(2s+1)(s+1)}$$

Dobrać korektor szeregowy, który zapewni następujące parametry układu regulacji: zerowy uchyb statyczny, dobrą dynamikę w przedziale częstotliwości bliskim $1s^{-1}$ oraz zapas fazy $\Delta\varphi > \pi/4$.

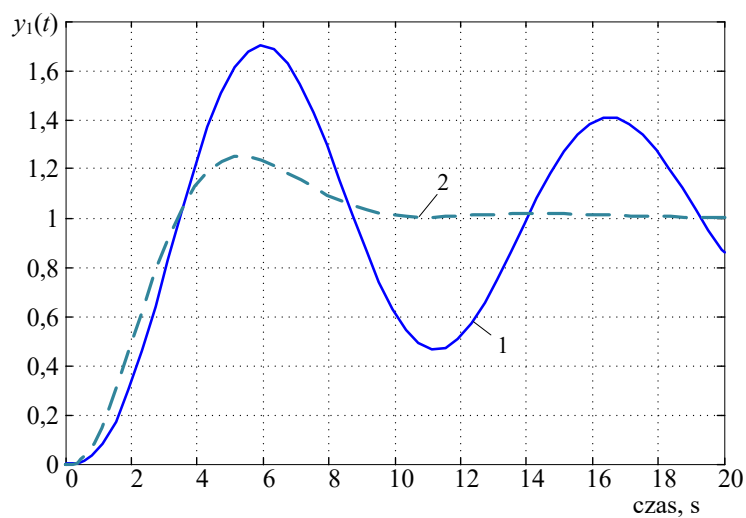
Widać, że obiekt jest klasy pierwszej (zerowy biegun), więc statyczny uchyb położenia w układzie bez korektora jest równy zero (Tabela 9.1), można więc przyjąć: $A = 1$.

Schemat poszukiwanego układu jest pokazany na rys. 9.16. Korektor ma transmitancję o postaci (9.19).

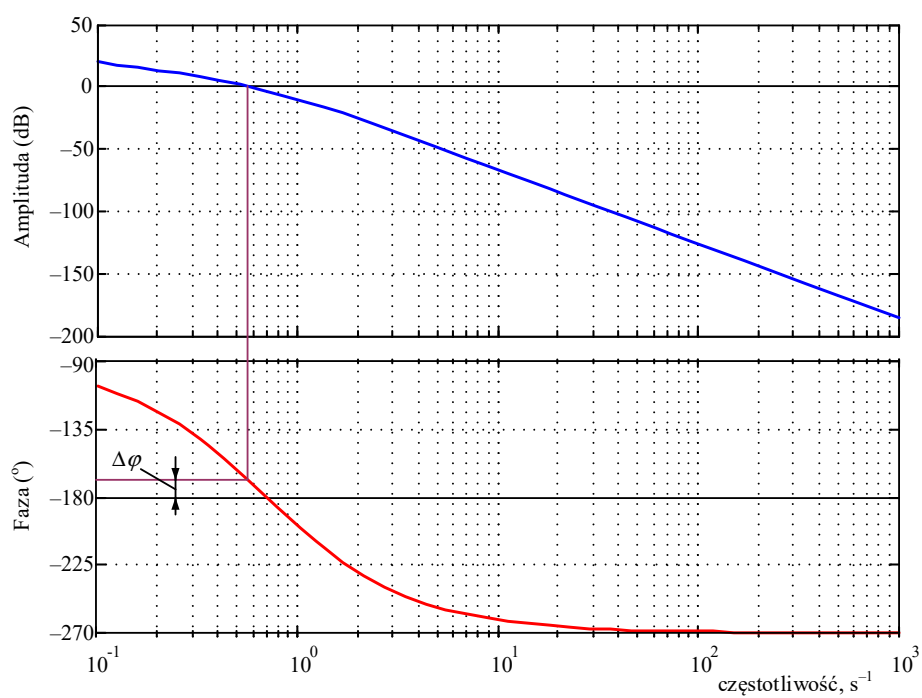


Rys. 9.16. Schemat układu z korektorem

Uzasadnienie doboru odpowiedniego korektora wynika z podstawowych charakterystyk układu bez korektora. Na podstawie odpowiedzi na skok jednostkowy (rys. 9.17, krzywa 1) widać, że występuje duże przeregulowanie (70%) oraz długi czas ustalenia. Podobnie zapas fazy wynosi zaledwie $12,5^\circ$, a w pobliżu częstotliwości $1s^{-1}$ występuje znaczne tłumienie.



Rys. 9.17. Odpowiedź układu zamkniętego na skok jednostkowy: bez korektora (1) oraz z korektorem (2)



Rys. 9.18. Charakterystyka częstotliwościowa (Bodego) układu otwartego bez korekcji

Zadaniem korekcji jest więc: - zwiększenie zapasu fazy oraz - wyrównanie charakterystyki amplitudowej w pobliżu częstotliwości 1 s^{-1} . Kolejność postępowania jest dowolna, ponieważ oba proponowane korektory są liniowe.

Na początku obliczamy parametry korektora opóźniającego w celu wyrównania charakterystyki w dolnym zakresie pulsacji. Na podstawie charakterystyki częstotliwościowej określamy:

$$\omega_{k1} = \frac{1}{T} = 0,4, \quad \omega_{k2} = \frac{\beta}{T} = 0,1$$

Obliczamy stąd: $T = 2,5, \beta = 0,25$.

Transmitancja korektora przyjmuje następującą postać (9.18):

$$G_{ko}(s) = \frac{sT+1}{s\frac{T}{\beta}+1} = \frac{2,5s+1}{10s+1}$$

Korektor przyspieszający ma na celu zwiększenie zapasu fazy ($\Delta\varphi > \pi/4$) oraz wyrównanie charakterystyki amplitudowej w obszarze pulsacji $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$.

Przyjmujemy następujące graniczne wartości dla części przyspieszającej fazę korektora:

$$\omega_{k1} = \frac{1}{T} = 0,2, \quad \omega_{k2} = \frac{\beta}{T} = 2,5, \quad \text{skąd otrzymamy (9.16): } T = 5, \beta = 12,5.$$

$$G_{kp}(s) = \frac{sT+1}{s\frac{T}{\beta}+1} = \frac{5s+1}{0,4s+1}$$

Transmitancja obu połączonych korektorów jest następująca:

$$G_k(s) = \frac{(5s+1)(2,5s+1)}{(0,4s+1)(10s+1)},$$

co daje następującą transmitancję układu otwartego z korektorem:

$$G_o(s) = G_k(s)G_1(s) = \frac{(5s+1)(2,5s+1)}{s(0,4s+1)(10s+1)(2s+1)(s+1)}$$

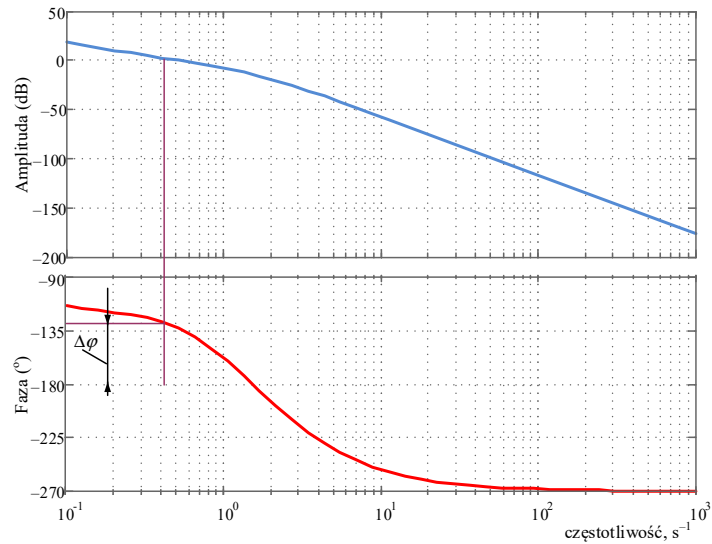
Charakterystyka częstotliwościowa tego układu jest pokazana na rys. 9.19. Można zauważyć, że zapas fazy układu po korekcji przekracza wartość $\pi/4$.

Transmitancja układu zamkniętego po korekcji ma znaną formę:

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$$

Odpowiedź tego układu na skok jednostkowy jest pokazana na rys. 9.17, krzywa 2. Widać, że zastosowany korektor znacznie zredukował czas ustalenia się odpowiedzi oraz wartość przeregulowania. Ostateczny układ jest klasy pierwszej, więc ustalony uchyb położenia ma zerową wartość.

Należy zauważyć, że prezentowana w tym przykładzie procedura projektowania korektora przyspieszająco-opóźniającego ma cechy procedury heurystycznej: przy doborze poszczególnych parametrów początkowych projektant ma dużą swobodę w ich określaniu. W rezultacie właściwości otrzymanego układu nie zawsze spełniają narzucone wymagania. Z tego względu stosuje się iteracyjne przybliżanie do oczekiwanych charakterystyk skorygowanego układu.



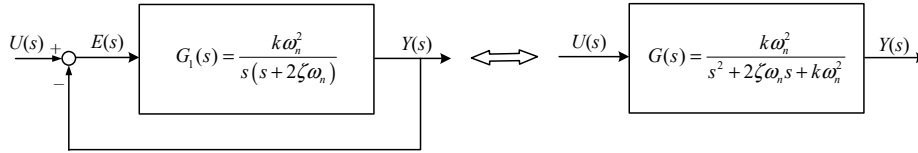
Rys. 9.19. Charakterystyka częstotliwościowa (Bodego) układu otwartego z korekcją

9.4. Dobór korektora za pomocą wykresu Nicholasa

9.4.1. Wprowadzenie

Opisane powyżej metody doboru korektora szeregowego są dosyć kłopotliwe, gdyż oczekiwanym efektem korekcji ma być pożądana charakterystyka układu zamkniętego, podczas gdy stosowane procedury odnoszą się do charakterystyk: obiektu i korektora, które są elementami układu otwartego (jeśli ograniczymy rozważania do układów o sztywnym sprzężeniu zwrotnym). Jednym z pomysłów usprawnienia tej procedury jest założenie, że poszukiwany układ zamknięty po korekcji powinien mieć właściwości zbliżone do członu oscylacyjnego II rzędu, którego charakterystyki są określone przez trzy parametry (4.61): ζ - współczynnik tłumienia oscylacji, ω_n - pulsacja drgań swobodnych (nietłumionych) oraz k - współczynnik wzmocnienia. Idea rozważanej metody polega na wykorzystaniu zależności pomiędzy charakterystykami częstotliwościowymi (amplitudy i fazy), a parametrami odpowiedzi czasowej rozważanego układu. W przypadku układu oscylacyjnego II rzędu te zależności są szczególnie proste i łatwe do zastosowania.

W celu wyprowadzenia odpowiednich zależności wróćmy do analizy układu oscylacyjnego II rzędu (str. 92). Układ zamknięty o transmitancji (4.62), przy założeniu sztywnego sprzężenia zwrotnego, ma strukturę jak na rys. 9.20.



Rys. 9.20. Układ zamknięty II rzędu

Moduł amplitudy oraz faza funkcji przejścia są określone następującymi zależnościami (4.74), $k = 1$:

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4(\zeta\omega_n\omega)^2}} = \left| \frac{P(\omega) + jQ(\omega)}{P(\omega) + 1 + jQ(\omega)} \right| = M, \quad (9.20)$$

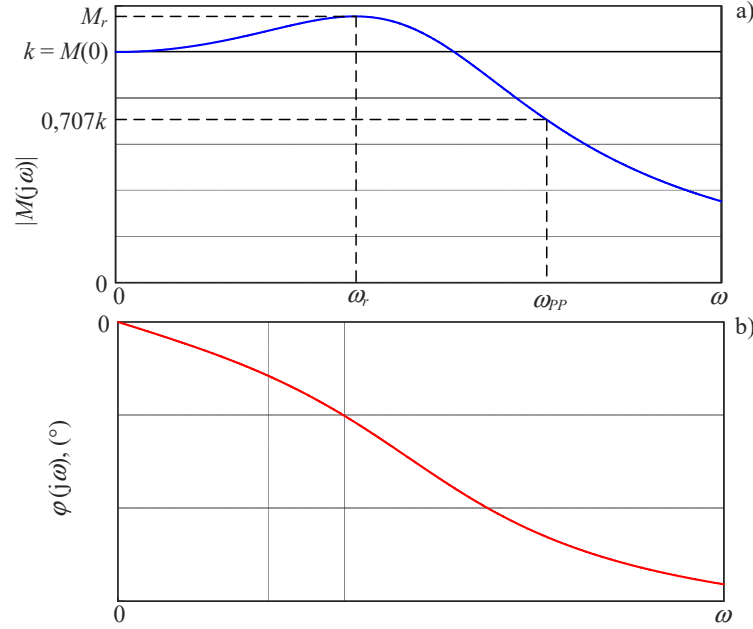
$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}, \quad \tg(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P^2(\omega) + P(\omega) + Q^2(\omega)} = N, \quad (9.21)$$

gdzie:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} = P(\omega) + jQ(\omega) \quad G_1(s) = \frac{k\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + k\omega_n^2}$$

Powyższe parametry, oznaczone wielkościami M oraz N , odnoszą się do charakterystyki częstotliwościowej, jednak również wiążą się z właściwościami czasowymi odpowiedzi analizowanego układu na skok jednostkowy. Typowe charakterystyki amplitudy i fazy układu oscylacyjnego II rzędu są pokazane na rys. 9.21. Zaznaczono tam parametry związane z występującym rezonansem: - amplituda rezonansowa M_r oraz - pulsacja rezonansowa ω_r . Ponadto zaznaczono szerokość pasma przepuszczania ω_{PP} , którego granica jest wyznaczona przez wzmocnienie $M = k/\sqrt{2} \approx 0,707k$. Te trzy wielkości: M_r , ω_r , oraz ω_{PP} są łatwe do wyznaczenia na podstawie charakterystyki częstotliwościowej układu (układu zamkniętego), a ich ważną cechą jest bezpośrednie powiązanie z parametrami określającymi dynamikę układu II rzędu: współczynnikiem tłumienia ζ oraz pulsacją drgań własnych ω_n . W przypadku, gdy współczynnik wzmocnienia układu $k \neq 1$, dodatkowo należy wyznaczyć również wartość $M(0) = k$.

Należy zauważyć, że układ II rzędu pełni tu rolę prototypu (układu o postulowanych cechach), które można z powodzeniem zastosować także w odniesieniu do układu wyższego rzędu. Podstawowym warunkiem tego założenia jest możliwość takiej modyfikacji transmitancji analizowanego układu – w rezultacie doboru odpowiedniego korektora – aby skorygowany układ miał cechy zbliżone do postulowanego układu II rzędu. Jego wyróżniki są zaznaczone na charakterystyce częstotliwościowej układu zamkniętego w postaci określonych wartości wzmocnienia $k = M(0)$, amplitudy i pulsacji rezonansowej M_r , ω_r oraz pasma przepuszczania ω_{PP} (rys. 9. 21).



Rys. 9.21. Charakterystyki częstotliwościowe amplitudy (a) oraz fazy (b) układu II rzędu

Dzięki takiemu podejściu postulowane właściwości dynamiczne układu mogą być bezpośrednio kontrolowane za pomocą parametrów jego charakterystyki częstotliwościowej. Zadanie to można także rozszerzyć na wielkości odnoszące się do stabilności układu, jak zapas fazy lub zapas wzmocnienia. Określenie sposobu powiązania parametrów charakterystyki częstotliwościowej układu z jego właściwościami dynamicznymi wymaga przeprowadzenia szczegółowej analizy zależności pomiędzy obu tymi dziedzinami [20], [44], którą tutaj pomijamy. Sposób ich wykorzystania będzie pokazany na przykładach zastosowania ustalonych algorytmów postępowania.

Praktyczne stosowanie wspomnianych zależności wymaga dodatkowego przetworzenia związków (9.20), (9.21). Jak widać, parametr $M = M(j\omega)$ jest modulem transmitancji widmowej układu zamkniętego. Zależność (9.20) może być przedstawiona w następującej postaci:

$$\left(P(\omega) - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + Q^2(\omega) = \left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2, \quad M \neq 1 \quad (9.22)$$

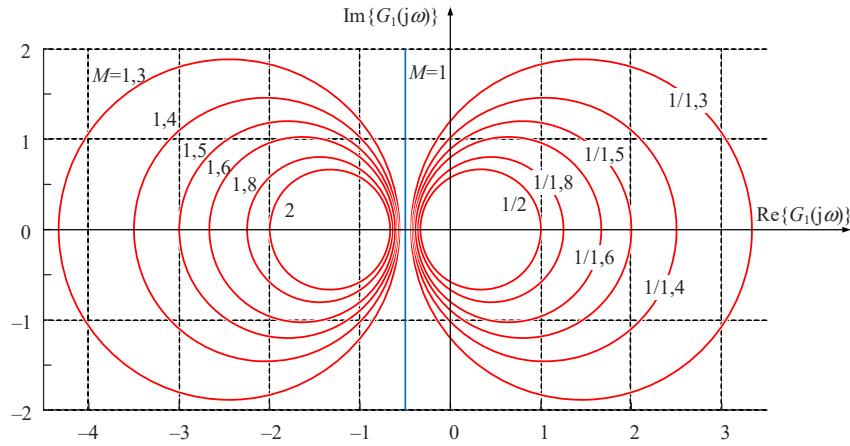
która jest równaniem okręgu na płaszczyźnie zespolonej $G(j\omega)$, ze środkiem o współrzędnych:

$$P(\omega) = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{M^2}{1-M^2}, \quad Q(\omega) = \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = 0, \quad (9.23)$$

natomiast jego promień jest równy:

$$r = \left| \frac{M}{1-M^2} \right| \quad (9.24)$$

Okrąg (9.22) jest miejscem geometrycznym o stałej wartości parametru M , który reprezentuje moduł charakterystyki częstotliwościowej układu zamkniętego. Wielkość ta, przy zadanej wartości współczynnika wzmocnienia k , zależy od pulsacji ω oraz współczynnika tłumienia ζ . Rodzina takich okręgów na płaszczyźnie Nyquista (płaszczyzna zespolona układu otwartego $G_1(j\omega)$) jest pokazana na rys. 9.22. Można zauważyć, że w miarę narastania amplitudy M , okręgi zbliżają się do punktu $(-1, j0)$, natomiast malejące wartości amplitudy M prowadzą do okręgów zacieśniających się wokół początku układu współrzędnych. Dla $M = 1$ okrąg deformuje się do prostej.



Rys. 9.22. Rodzina okręgów o stałych wartościach amplitudy M

Podobny wywód można przeprowadzić w odniesieniu do charakterystyki fazowej układu zamkniętego. Przez proste przekształcenie (9.21), otrzymamy:

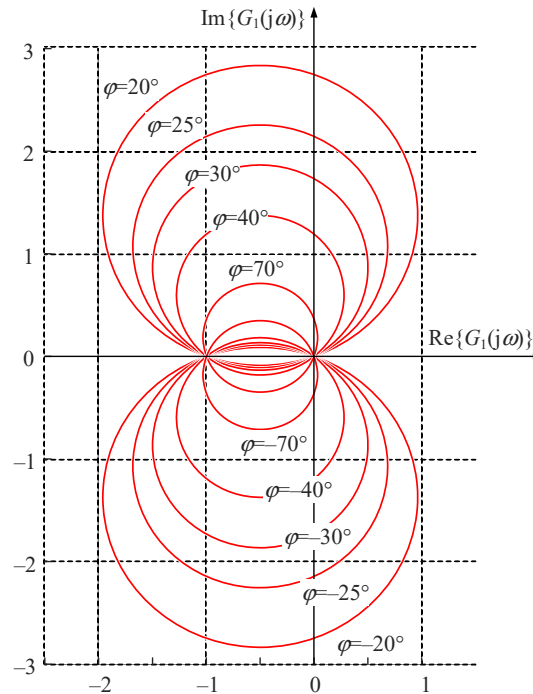
$$\left(P(\omega) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Q(\omega) - \frac{1}{2N} \right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2}, \quad (9.25)$$

skąd łatwo wydzielić parametry okręgu:

- współrzędne środka: $-1/2, 1/(2N)$,
- promień: $\sqrt{(N^2+1)/(2N)}$.

Przykładowe rozmieszczenie takich okręgów na płaszczyźnie Nyquista dla dodatnich oraz ujemnych wartości kąta φ jest pokazane na rys. 9.23.

Atrakcyjność praktycznego wykorzystania wykresów stałej amplitudy M i stałej fazy N bierze się stąd, że na jednym wykresie spotykają się współrzędne odnoszące się do układu otwartego (płaszczyzna zespolona $G_1(j\omega)$) oraz okręgi (współrzędne) M, N , odnoszące się do układu zamkniętego $G(j\omega)$. Płynące stąd korzyści ilustruje kolejny przykład.

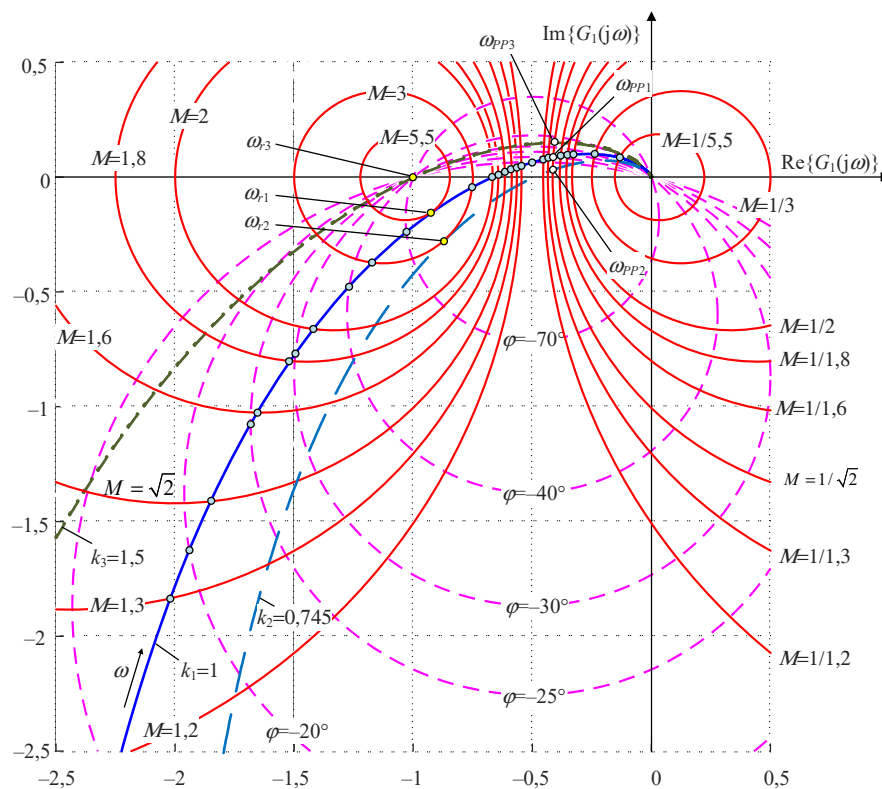
Rys. 9.23. Okręgi stałej fazy N układu zamkniętego**Przykład 9.5.**

Rozpatrzmy obiekt, który był analizowany w przykładzie 9.4. Transmisja układu otwartego jest następująca:

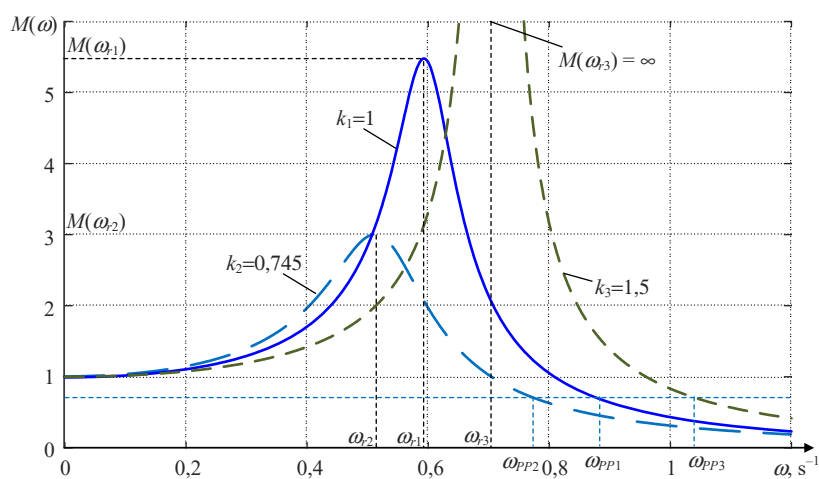
$$G_1(s) = \frac{k}{s(2s+1)(s+1)}, \quad k=1.$$

Narysować charakterystyki amplitudowo-fazowe układu otwartego na tle okręgów M , N dla trzech różnych wartości współczynnika wzmocnienia: $k_1 = 1$, $k_2 = 0,745$ oraz $k_3 = 1,5$. Pokazać możliwość utworzenia stąd charakterystyk amplitudowych układu zamkniętego i ukazać występujące tam charakterystyczne punkty.

Charakterystyki amplitudowo-fazowe układu otwartego dla trzech podanych wartości współczynnika wzmocnienia są pokazane na rys. 9.24 (płaszczyzna Nyquista). Są tam także pokazane okręgi M (stałej amplitudy) oraz N (stałej fazy) układu zamkniętego. Punkty przecięcia charakterystyk amplitudowo-fazowych z tymi okręgami wyznaczają odpowiednie wartości, które są wspólne dla obu układów: otwartego i zamkniętego. Na tej podstawie można wyznaczyć charakterystyki: amplitudową oraz fazową układu zamkniętego. Dodatkowo należy określić wartość pulsacji ω w punkcie przecięcia charakterystyki amplitudowo-fazowej z odpowiednim okręgiem. Dla ilustracji, na rys. 9.25 pokazano charakterystyki amplitudowe trzech rozpatrywanych układów po objęciu ich pętłą sprzężenia zwrotnego.



Rys. 9.24. Okręgi M , N na płaszczyźnie Nyquista z charakterystykami amplitudowo-fazowymi układu dla trzech różnych wartości współczynnika k



Rys. 9.25. Charakterystyki amplitudowe analizowanych układów

Warto zwrócić uwagę na kilka charakterystycznych punktów, które są wspólne dla obu analizowanych rysunków:

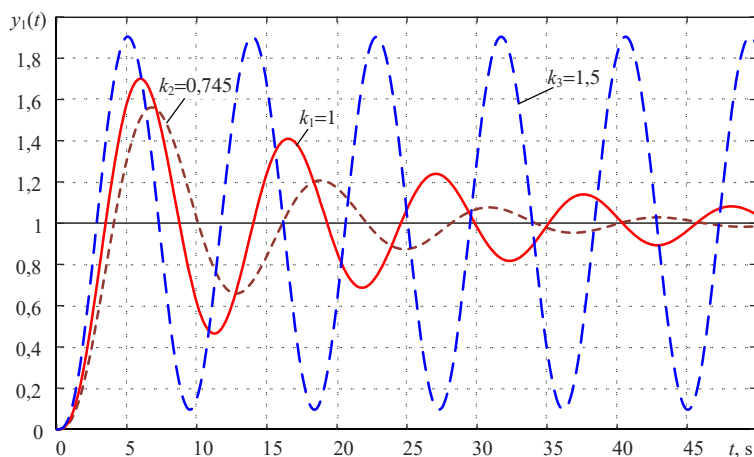
- maksymalna wartość charakterystyki amplitudowej układu zamkniętego (rys. 9.25) występuje przy pulsacji rezonansowej ω_r , czemu odpowiada na rys. 9.24 punkt styczności charakterystyki amplitudowo-fazowej z odpowiednim okręgiem $M(\omega_r)$; odpowiada on amplitudzie charakterystyki układu zamkniętego w punkcie rezonansowym (dla analizowanych układów, wielkości te są oznaczone dolnymi indeksami, odpowiednio: ω_{r1} , ω_{r2} , ω_{r3} oraz $M(\omega_{r1})$, $M(\omega_{r2})$, $M(\omega_{r3})$);

- punkty przecięcia trajektorii amplitudowo-fazowych z okręgiem o amplitudzie $M = 1/\sqrt{2}$ wyznaczają graniczne pulsacje pasma przepuszczania ω_{PP} charakterystyki amplitudowej układu zamkniętego (na obu rysunkach punkty te są oznaczone, odpowiednio: ω_{PP1} , ω_{PP2} , ω_{PP3}).

Zauważmy, że trajektoria układu o wzmacnieniu k_3 przecina punkt $(-1, j0)$ – co oznacza, że układ zamknięty znajduje się na granicy stabilności, w którym amplituda M przyjmuje wartość nieskończoną ($M(\omega_3) = \infty$).

Na podobnej zasadzie może być także wyznaczona charakterystyka fazowa układu zamkniętego. Tym razem należy rozpatrywać punkty przecięcia trajektorii układu otwartego z okręgami stałej fazy N .

Odpowiedzi badanych układów na skok jednostkowy są pokazane na rys. 9.26. Widać tu potwierdzenie obserwacji z przykładu 9.4: układ klasy 1 ma zerowy uchyb położenia, natomiast jego dynamika bezpośrednio zależy od współczynnika wzmacnienia k .



Rys. 9.26. Przebiegi odpowiedzi skokowych analizowanych układów

Przedstawiona procedura wspólnego reprezentowania charakterystyk układu otwartego i zamkniętego na jednej płaszczyźnie może być także stosowana w odniesieniu do układów, w których w torze sprzężenia zwrotnego występuje blok o dowolnej transmitancji $H(j\omega)$ - rys. 9.1. W takim przypadku należy odpowiednio zmodyfikować transmitancję zastępczą układu zamkniętego:

$$D(s) = H(s)G(s), \quad G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + H(s)G_1(s)}, \quad (9.26)$$

przy czym trajektorię układu otwartego należy określić dla równania (5.16):

$G_o(j\omega) = H(j\omega)G_1(j\omega)$. Okręgi M , N będą wówczas odpowiadały układowi zamkniętemu o transmitancji zastępczej:

$$D(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}, \quad (9.27)$$

co oznacza, że transmitancja obiektu $G_1(j\omega)$ w torze głównym została zastąpiona przez transmitancję układu otwartego $G_o(j\omega)$. Charakterystyki częstotliwościowe dla $M(j\omega)$ oraz $N(j\omega)$ powinny być wówczas skorygowane zgodnie z zależnościami:

$$|M(j\omega)| = \frac{|D(j\omega)|}{|H(j\omega)|}, \quad \varphi(\omega) = \angle D(j\omega) - \angle H(j\omega) = \arctg(N(j\omega)) \quad (9.28)$$

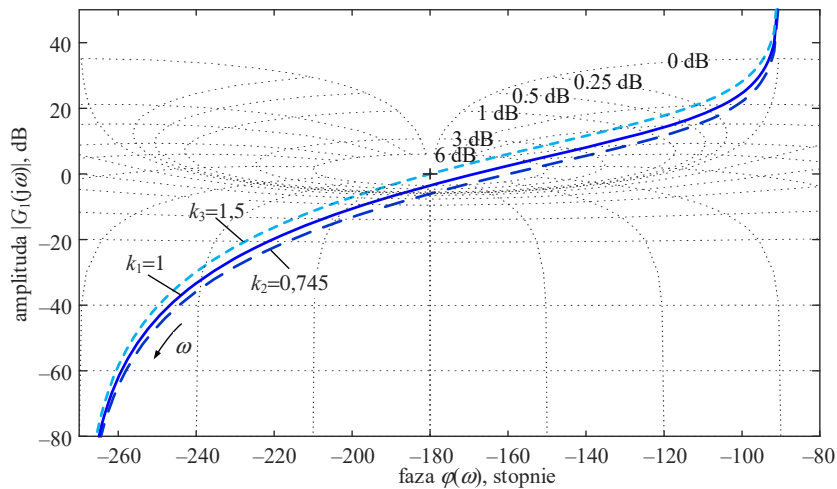
Należy zaznaczyć, że w literaturze często kąt $\varphi(\omega)$ jest oznaczany, jako $N(j\omega)$, z pominięciem trygonometrycznej funkcji w (9.28).

9.4.2. Karta Nicholasa

Główna niedogodność związana ze stosowaniem płaszczyzny Nyquista do korekcji układów regulacji wynika stąd, że zmiana wzmocnienia w torze głównym prowadzi do zmiany kształtu charakterystyki układu otwartego (rys. 9.24), natomiast dodanie transmitancji korektora każdorazowo wymaga powtórzenia całej procedury tworzenia charakterystyk układu otwartego. Modyfikacja tego podejścia polega na zmianie układu współrzędnych na tej płaszczyźnie, co prowadzi do tzw. karty Nicholasa³⁹. Oś rzędnych na płaszczyźnie Nicholasa odnosi się do amplitudy charakterystyki częstotliwościowej układu otwartego i jest skalowana w dB – podobnie jak na wykresie Bodego. Oś odciętych opisuje fazę transmitancji układu otwartego i najczęściej jest skalowana w stopniach. Elementami tej płaszczyzny są krzywe stałej amplitudy układu zamkniętego, które są zdeformowanymi okręgami M z płaszczyzny Nyquista (deformacja wynika ze zmiany układu współrzędnych). Przykład karty Nicholasa jest przedstawiony na rys. 9.27. Pokazane są tam charakterystyki amplitudowo-fazowe układu otwartego z przykładu 9.5. Widać, że zmiana współczynnika wzmocnienia k nie deformuje wykresu trajektorii, powodując jedynie jego odpowiednie przesunięcie wzdłuż osi amplitudy. Charakterystyczny punkt na płaszczyźnie Nicholasa jest wyznaczony przez współrzędne $(-180^\circ, 0)$, co odpowiada punktowi $(-1, j0)$ na płaszczyźnie Nyquista.

Użyteczność karty Nicholasa w procesie analizy i projektowania układów regulacji automatycznej bierze się stąd, że powtórzone są tu właściwości płaszczyzny Nyquista z okręgami M , N , natomiast, dzięki modyfikacji układu współrzędnych, praktyczne korzystanie z tego narzędzia jest znacznie prostsze. Oswojenie techniki posługiwania się nim jest ważne w praktyce inżynierskiej.

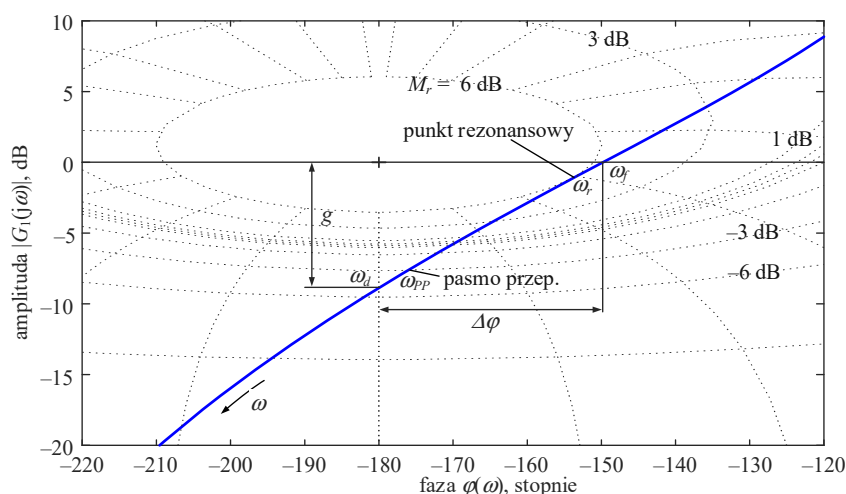
³⁹ Nathaniel B. Nichols (1914–1997) amerykański inżynier automatyk.



Rys. 9.27. Przebiegi trajektorii układu otwartego z przykładu 9.5 na karcie Nicholasa

Można wymienić następujące podstawowe cechy takiego podejścia:

- Korzystanie z karty Nicholasa nie wymaga znajomości funkcji przejścia analizowanego układu; wystarczy znać zależność wzmocnienia (amplitudy $|G_1(j\omega)|$) w funkcji fazy $\varphi(\omega)$, co zazwyczaj można łatwo uzyskać w rezultacie prostych pomiarów laboratoryjnych. Przy wyznaczaniu takiej charakterystyki w postaci tabelarycznej, notowana jest także wartość pulsacji ω w każdym punkcie pomiarowym.
- Punkty przecięcia sporządzonej charakterystyki (amplituda – faza) z siatką okręgów stałej amplitudy wyznaczają odległość do krytycznego punktu $(-1, j0)$ na płaszczyźnie Nyquista (dodatkowo, znana jest także faza trajektorii układu otwartego w tym punkcie).
- Przecięcie naniesionej logarytmicznej charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego z osią fazy o wartości -180° wyznacza zapas fazy $\Delta\varphi$ i zapas wzmocnienia ($g = 1/|G_1(j\omega)|$) analizowanego układu (rys. 9.28). Wymagana jest tu pewna wprawa w poprawnym odczytywaniu i interpretacji parametrów sporządzonej charakterystyki, w czym pomocne może być równoległe posługiwanie się wykresem Bodego lub charakterystyką Nyquista.
- Punkt przecięcia sporządzonej charakterystyki z krzywą stałej wartości $M = -3\text{dB}$ ($= 0,707$) wyznacza pasmo przepuszczania ω_{pp} (rys. 9.20, rys. 9.28).
- Punkt styczności trajektorii z okręgiem o wartości M określa punkt rezonansowy (amplituda $M = M_r$ oraz pulsacja ω_r).
- Powiększenie pasma przepuszczania ω_{pp} układu otwartego prowadzi do przyspieszenia odpowiedzi układu zamkniętego – czas ustalenia t_u zmniejsza się.
- Wzrost amplitudy rezonansowej M_r prowadzi do wzrostu oscylacji w odpowiedzi czasowej układu.



Rys. 9.28. Ilustracja podstawowych wielkości na karcie Nicholsa

Wymienione własności charakterystyki Nicholsa mają istotne znaczenie z punktu widzenia odwzorowania cech dynamicznych układu na podstawie jego charakterystyk widmowych. Będzie to ilustrowane dalszymi przykładami zastosowania tego podejścia.

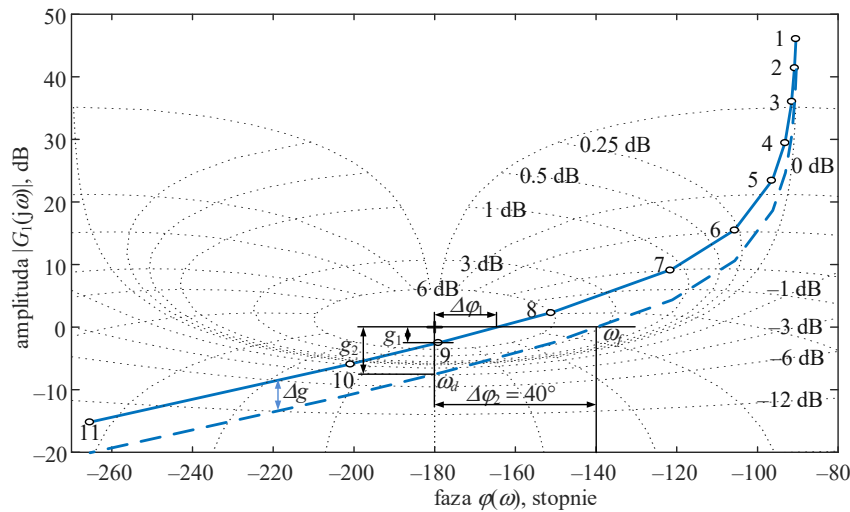
Przykład 9.6. Pomiarzy badanego układu otwartego zostały zamieszczone w Tabeli 9.3. Narysować charakterystykę układu na karcie Nicholsa i określić jego zapas wzmocnienia i zapas fazy. Do szeregowej korekcji układu zastosowano wzmacniacz o współczynniku wzmocnienia k_k . Określić wartość tego wzmocnienia, aby uzyskać zapas fazy $\Delta\varphi_k = 40^\circ$.

Tabela 9.3. Wartości uzyskane z pomiarów układu otwartego $G_1(j\omega)$

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ω, s^{-1}	0,015	0,025	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4	7
$\varphi, (^\circ)$	-90	-91	-92	-93	-96	-106	-121	-151	-178	-203	-265
$ G_1(j\omega) , \text{dB}$	46	42	36	30	24	15	9,2	2,4	-2,3	-6,2	-15

Charakterystyka rozpatrywanego układu na karcie Nicholsa jest pokazana na rys. 9.29 (linia ciągła). Umieszczono punkty odpowiadające kolejnym numerom danych z Tabeli 9.3. Zaznaczono także zapas wzmocnienia $g_1 = 4 \text{ dB}$ oraz zapas fazy $\Delta\varphi_1 = 14^\circ$. Te wielkości odczytano z innego rysunku, o większej rozdzielczości w badanym obszarze. Jak widać, parametry układu związane z zapasem stabilności są niewielkie.

W celu uzyskania żądanej wartości zapasu fazy $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_k = 40^\circ$ badana trajektoria została przesunięta w kierunku mniejszych wartości wzmocnienia o wielkość $\Delta g = 5 \text{ dB}$, przez co skorygowana trajektoria (linia przerywana) przecina współrzędną fazy $\varphi = -140^\circ = -180 + 40^\circ$ dla amplitudy $|G_1(j\omega)| = 0 \text{ dB}$ (co odpowiada wzmocnieniu 1). W tym punkcie pulsacja wynosi $\omega_f = 1,7 \text{ s}^{-1}$.



Rys. 9.29. Karta Nicholasa z charakterystyką układu z Tabeli 9.3 (linia ciągła) i po zmniejszeniu wzmocnienia o wartość Δg , dB (linia przerywana)

W celu zmniejszenia wzmocnienia w torze głównym układu o wartość $\Delta g = 5$ dB należy skorygować wzmocnienie w stopniu k_k , które można obliczyć następująco:

$$20\log(k_k) = -5 \rightarrow \log(k_k) = -5/20 \rightarrow k_k = 10^{-5/20} = 0,56.$$

Tę wartość powinien mieć człon wzmocnienia w torze głównym układu.

Oznacza to, że w celu otrzymania zakładanego zapasu fazy układu należy jego wzmocnienie obniżyć w stopniu niemal dwukrotnym. Z wykresu można odczytać, że w takim przypadku zapas wzmocnienia przyjmuje wartość $g_2 = -8$ dB przy pulsacji $\omega_d = 3,1 \text{ s}^{-1}$.

Zauważmy, że posługując się wykresem Nicholasa dokonujemy dosyć zgrubnego oszacowania parametrów opisujących właściwości statyczne układu i jego dynamikę. Pomimo tego, narzędzie to pozwala w efektywny sposób przybliżyć rozwiązanie do postulowanych warunków działania projektowanego układu. Oczywiście zgrubne szacowanie poszczególnych działań może być poprawione w wyniku kilkukrotnego stosowania tej procedury. Kolejne przykłady ilustrują sposób stosowania tego podejścia w bardziej złożonych przypadkach.

9.4.3. Projektowanie układów za pomocą karty Nicholasa

Procedura wykorzystania karty Nicholasa pokazana w przykładzie 9.6 odnosi się do przypadku doboru współczynnika wzmocnienia w układzie otwartym. W bardziej złożonych przypadkach, gdy projektowany układ powinien spełnić wiele różnych kryteriów, można do tego celu zastosować korektory szeregowo przedstawione w p. 9.3. Wymagania formułowane w odniesieniu do postulowanych układów odnoszą się zazwyczaj do właściwości statycznych (błędy statyczne) i dynamicznych tych układów. W tym ostatnim przypadku wygodnie jest korzystać ze znanych zależności od-

noszących się do układu II rzędu, który pełni tu rolę prototypu. Analizując je można otrzymać podane poniżej praktyczne zależności.

Założmy określoną wartość maksymalną M_r amplitudy charakterystyki częstotliwościowej układu II rzędu. Jest to wartość rezonansowa amplitudy, której odpowiada pulsacja ω_r (rys. 9.20, rys. 9.25): $|G_1(j\omega_r)| = M_r$. Podstawiając ω_r z zależności (4.76) do (4.74), otrzymamy bezpośredni związek pomiędzy współczynnikiem tłumienia a tą właśnie amplitudą rezonansową:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - p_{Mx})}, \quad (9.29)$$

$$\text{gdzie } p_{Mx} = \sqrt{\frac{M_r^2 - M(0)}{M_r^2}} = 1 - 2\zeta^2 \text{ oraz: } M_r = \frac{M(0)}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Warto zwrócić uwagę na ostatnią z powyższych zależności, która wiąże moduł amplitudy rezonansowej M_r ze współczynnikiem tłumienia ζ : korzystając z wyników analizy kwadratowego wskaźnika jakości I_2 dla układu II rzędu (przykład 9.1, str. 267), można łatwo wyznaczyć wartość parametru M_r , która minimalizuje wskaźnik I_2 :

$$M_r = \left. \frac{M(0)}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \right|_{\zeta=0,5} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155 \approx 1,25 \text{ dB}, \quad M(0) = 1 \quad (9.30)$$

Przez podstawienie (9.29) do (4.76) otrzymuje się bezpośrednią zależność pulsacji rezonansowej od amplitudy M_r :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{p_{Mx}} \quad (9.31)$$

Podobnie, analizując układ otwarty z rys. 9.20, który po zamknięciu prowadzi do układu II rzędu, można określić zależność pomiędzy zapasem fazy $\Delta\varphi$ a współczynnikiem tłumienia układu zamkniętego. Częstotliwość w punkcie przecięcia trajektorii układu z okręgiem jednostkowym wyznaczamy z zależności:

$$|G_1(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\omega^4 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} = 1, \quad (9.32)$$

skąd określamy pulsację:

$$\omega = \omega_f = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2} \quad (9.33)$$

oraz fazę układu otwartego $G_1(j\omega)$ w tym punkcie:

$$\angle G(j\omega_f) = 90^\circ - \arctg \frac{\omega_f}{2\zeta\omega_n} = 90^\circ - \arctg \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta}, \quad (9.34)$$

skąd już łatwo wyznaczyć zapas fazy:

$$\Delta\varphi = \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \quad (9.35)$$

Funkcja (9.35) jest niemal liniowa w przedziale $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$ (mianownik jest bliski wartości 1), co pozwala aproksymować ją następującą zależnością:

$$\Delta\varphi = 2\zeta \text{ (rad) lub: } \zeta = \frac{\Delta\varphi}{360^\circ} \pi, \Delta\varphi \text{ (}^\circ\text{)} \quad (9.36)$$

Z kolei zależność odnosząca się do charakterystyki modułu transmitancji w punkcie odpowiadającym pasmu przepuszczania: $|G_1(j\omega_{PP})| = M_{PP} = 1/\sqrt{2}$ może być określona przez podstawienie (9.29) do (4.74):

$$\omega_{PP} = \omega_n \sqrt{p + \sqrt{1+p^2}} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} \quad (9.37)$$

Podobnie można określić parametry odpowiedzi czasowej układu II rzędu. Czas ustalenia się odpowiedzi jednostkowej łatwo można uzyskać z równania, które jest wynikiem analizy prowadzonej w przykładzie 4.1 (str. 95):

$$t_{u2\%} = \frac{-\ln(0,02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} \approx \frac{\ln(50)}{\zeta\omega_n} = \frac{3,91}{\zeta\omega_n}, \quad (9.38)$$

przy założeniu, że dla typowych wartości ζ , $0,5\ln(1-\zeta^2) \approx 0$.

Procentowe przeregulowanie jest określone przez zależność (4.72):

$$y_{p\%} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100 \cdot e^{-2\pi\zeta^2 M_r}, \quad (9.39)$$

natomiast okres drgań tłumionych można określić na podstawie (4.71):

$$T_{nt} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{4\pi\zeta M_r}{\omega_n}, \quad (9.40)$$

co odpowiada pulsacji: $\omega_t = \frac{1}{2\zeta M_r} \omega_n$.

Ze względu na uwikłaną formę równania odpowiedzi czasowej układu II rzędu na skok jednostkowy (4.67) czas narastania t_n (rys. 9.3) nie udaje się w prosty sposób wyznaczyć za pomocą innych parametrów dynamiki układu. Można się w tym celu posłużyć funkcją aproksymującą tę wielkość od współczynnika tłumienia ζ [44]:

$$\omega_n t_n = 1 + 1,039\zeta - 0,417\zeta^2 + 1,76\zeta^3 \quad (9.41)$$

Stosując tę samą metodę można także określić zależność odwrotną:

$$\zeta = -1,738 + 2,504(\omega_n t_n) - 0,883(\omega_n t_n)^2 + 0,115(\omega_n t_n)^3 \quad (9.42)$$

Jak widać, pulsacja drgań nietłumionych ω_n występuje w powyższych zależnościach jako wielkość sprzężona z którąś z innych wielkości. Zatem, w celu jej wyzna-

czenia, należy znać tę właśnie wielkość bliźniaczą. Na przykład, jeśli w zależności (9.41) znana jest wartość czasu narastania t_n , a ponadto zadany jest minimalny zapas fazy (najczęściej jako wielkości postulowane), to poszukiwaną pulsację ω_n można wyznaczyć przez podstawienie współczynnika tłumienia ζ , obliczonego według (9.36), do (9.41). W wyniku otrzymamy następującą zależność:

$$\omega_n = \left(1 + 1,039 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right) - 0,417 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)^2 + 1,76 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)^3 \right) / t_n \quad (9.43)$$

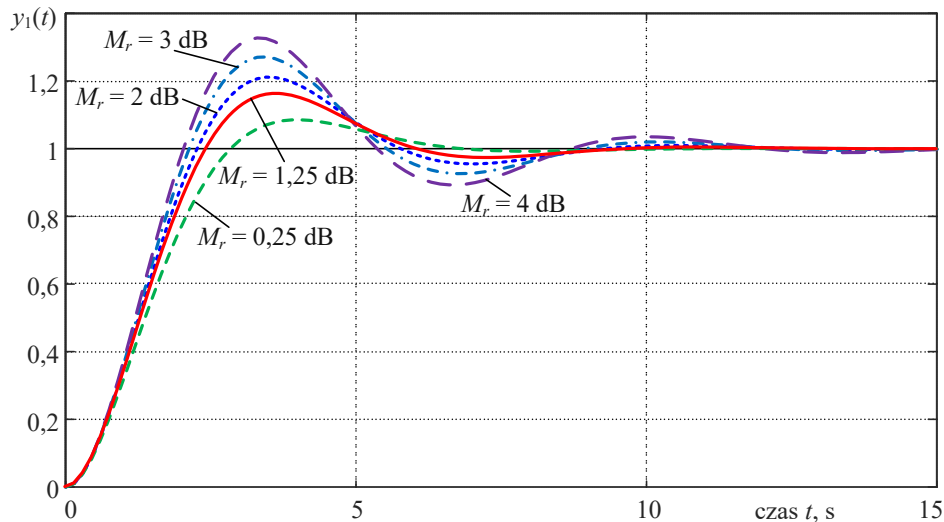
Podobnie, jeśli znana jest pulsacja ω_{pp} na granicy pasma przepuszczania układu zamkniętego, to na podstawie (9.37) można wyznaczyć poszukiwaną pulsację ω_n .

Przytoczone zależności (9.29) - (9.43) są pomocne do określania także innych parametrów czasowych i częstotliwościowych układów prototypowych II rzędu. W celu lepszego zobrazowania tych wielkości zostały one zebrane w Tabeli 9.4 dla pięciu wartości amplitudy rezonansowej M_r ekwiwalentnego układu zamkniętego II rzędu.

Tabela 9.4. Dynamiczne i częstotliwościowe parametry układu II rzędu

M_r	0,25 dB = 1,03	1,25 dB = 1,155	2 dB = 1,26	3 dB = 1,41	4 dB = 1,58
ζ	0,62	0,5	0,44	0,38	0,33
ω_r	0,49 ω_n	0,71 ω_n	0,78 ω_n	0,84 ω_n	0,88 ω_n
ω_{pp}	1,13 ω_n	1,27 ω_n	1,33 ω_n	1,39 ω_n	1,43 ω_n
$y_p\%$, %	6,3	16	21	27	33
ω_t	0,79 ω_n	0,87 ω_n	0,90 ω_n	0,92 ω_n	0,94 ω_n
$\omega_n t_n$	1,9	1,64	1,53	1,44	1,37
$t_{u2}\%$, s	6,3	7,8	8,8	10,2	11,7

Odnoszące się do czasu parametry zawarte w Tabeli 9.4, mogą być ilustrowane za pomocą odpowiedzi układu na skok jednostkowy. Odpowiednie równanie zastępczej transmitancji takiego układu jest podane w prawej części rys. 9.20. Uzyskane przebiegi dla $k = 1$, $\omega_n = 1$, są pokazane na rys. 9.30. Linia ciągłą zaznaczono przebieg dla minimalnej wartości wskaźnika jakości regulacji I_2 .



Rys. 9.30. Przebiegi odpowiedzi układu II rzędu na skok jednostkowy

Procedurę projektowania korektorów szeregowych za pomocą karty Nicholasa można sprowadzić do następujących podstawowych kroków, które są niezależne od wybranego rodzaju korektora [62].

Wykreślić charakterystykę częstotliwościową układu otwartego na karcie Nicholasa. Sprawdzić, czy układ zamknięty jest stabilny: w układzie stabilnym zapas fazy i zapas wzmocnienia powinny przyjmować dodatnie wartości, co łatwo można określić na podstawie przebiegu wykreślonej charakterystyki (rys. 9.28).

Sprawdzić, czy spełnione są warunki statyczne układu zamkniętego, określone za pomocą uchybów ustalonych. W przypadku układu klasy 0 uchyb ustalony położenia może być zbyt duży, co można skorygować przez odpowiedni dobór współczynnika wzmocnienia A korektora – patrz przykład 9.3. Gdy układ jest wyższej klasy, to uchyb położenia nie wymaga korekcji (Tabela 9.1). W tej tabeli widać jednak, że współczynnik wzmocnienia A może wymagać zmiany także w przypadku układów wyższej klasy, gdy warunki korekcji zostały określone w odniesieniu do uchybu prędkościowego lub przyspieszeniowego. Jeśli wypadkowe wzmocnienie układu otwartego uległo zmianie - narysować na karcie Nicholasa charakterystykę skorygowanego układu.

Wyznaczyć dynamiczne charakterystyki projektowanego układu zamkniętego i sprawdzić je w odniesieniu do założonych wymagań. Można w tym celu wyznaczyć na charakterystyce Nicholasa punkt rezonansowy, który jest określony w miejscu styczności trajektorii układu otwartego z odpowiednim okręgiem stałej amplitudy $M = M_{max} = M_r$ układu zamkniętego (rys. 9.28). W wyznaczonym punkcie styczności należy oszacować wartości dwóch związanych z nim wielkości: M_r oraz ω_r . Na ich podstawie można określić pozostałe charakterystyki dynamiczne postu-

lowanego układu, zaczynając od wyznaczenia współczynnika tłumienia ζ zgodnie z (9.29). Ważnym parametrem jest także pulsacja ω_n , którą można wyznaczyć na podstawie (9.31), przy znanych wartościach M_r oraz ω_r .

Jeśli obliczone kryterialne parametry projektowanego układu (odpowiedni zestaw zależności ze zbioru (9.29) - (9.43)) nie spełniają postulowanych założeń, to należy dobrać stosowny korektor i wyznaczyć jego parametry. Ten etap projektowania układu regulacji jest najtrudniejszy, gdyż wymaga pewnego doświadczenia w poprawnej interpretacji przebiegu formowanej trajektorii układu otwartego względem okręgów M na karcie Nicholsa.

Proces projektowania często wymaga wykonania kilku iteracji powyższej procedury. W charakterze korektorów mogą wystąpić człony o różnych transmitancjach, chociaż zazwyczaj stosowane są układy, omówione w p. 9.3. Mają one trzy parametry: współczynnik wzmocnienia A , stała czasowa T oraz współczynnik β , który decyduje o kierunku (przyspieszenie, opóźnienie) i stopniu zmiany fazy (9.14). Praktyczne zastosowanie tych układów do korekcji szeregowej będzie przedstawione w kolejnych przykładach.

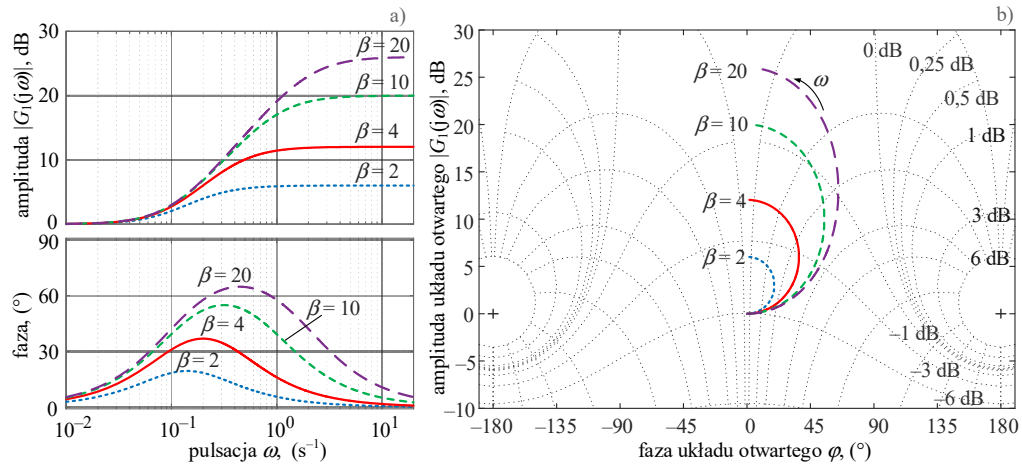
W celu omówienia efektu wykorzystania tych korektorów w odniesieniu do trajektorii układu otwartego na karcie Nicholsa na kolejnych rysunkach pokazane są charakterystyki korektorów: przyspieszającego (rys. 9.31) oraz opóźniającego fazę (rys. 9.32) w zestawieniu z ich charakterystykami Bodego. W obu przypadkach charakterystyki odnoszą się do kilku wartości współczynników β , przy tych samych wartościach pozostałych parametrów: $A = 1$, $T = 10$. Można zauważyć, że odpowiednie trajektorie układu otwartego na kartach Nicholsa są rozmieszczone antysymetrycznie względem punktu o współrzędnych $(0, 0)$. Efekt przesunięcia pokazanych charakterystyk wzdłuż osi amplitudy można osiągnąć przez zmianę współczynnika wzmocnienia A : - w kierunku większych wartości dla $A > 1$ oraz - w kierunku mniejszych wartości dla $A < 1$. Dodajmy jeszcze, że kierunek wzrostu pulsacji wzdłuż trajektorii charakterystyki Nicholsa zależy od rodzaju korektora, co jest pokazane na rys. 9.31b - dla korektora przyspieszającego oraz na rys. 9.32b - dla korektora opóźniającego fazę.

W układzie ekwiwalentnym, po włączeniu korektora w szereg z obiektem i zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego, te relacje są bardziej złożone. Można je jednak wykorzystać do oceny kierunku i stopnia zmiany charakterystyki częstotliwościowej korygowanego układu otwartego w celu osiągnięcia postulowanych parametrów układu zamkniętego. Proces ten może być znacznie ułatwiony, jeśli korzysta się z odpowiedniego programowego narzędzia obliczeniowego.

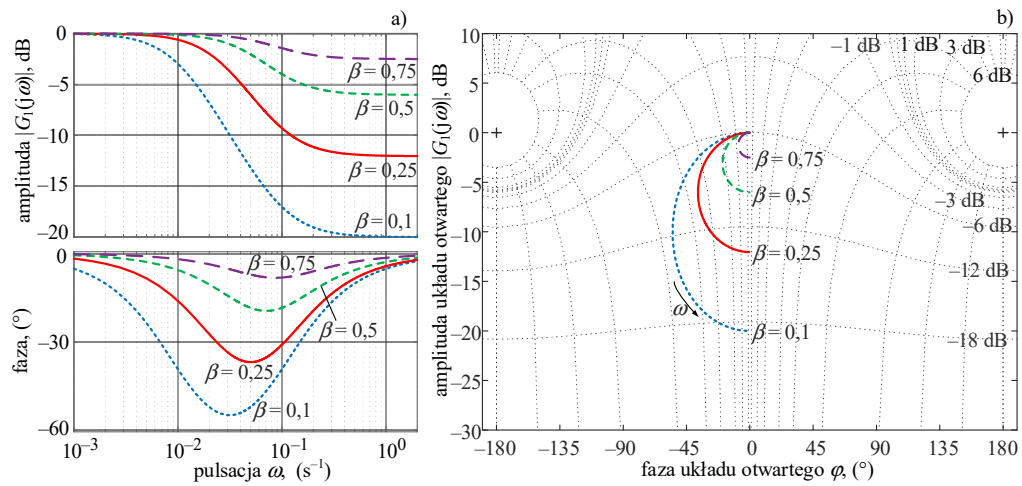
Przykład 9.7. Do regulacji procesu określonego za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{k}{(s+1)(s+5)(s+10)}, \quad k = 50,$$

dobrać korektor szeregowy, który zapewni następujące parametry regulacji: - uchyb statyczny położenia $e_p \leq 5\%$, - przeregulowanie $y_p\% \leq 20\%$, czas narastania $t_n \leq 0,5$ s.



Rys. 9.31. Charakterystyki częstotliwościowe na płaszczyźnie Bodego (a) oraz na karcie Nicholasa (b) korektora przyspieszającego fazę



Rys. 9.32. Charakterystyki częstotliwościowe na płaszczyźnie Bodego (a) oraz na karcie Nicholasa (b) korektora opóźniającego fazę

Jak widać, transmitancja obiektu jest klasy 0, wobec czego należy oszacować wielkość uchybu położenia w układzie zamkniętym i dobrać wielkość wzmocnienia A korektora. W tym celu skorzystamy z zależności (9.3):

$$e_{p0} = \frac{1}{1 + G_1(0)} = \frac{1}{1 + 1} = 0,5 = 50\%$$

Należy więc określić wzmocnienie korektora, które zredukuje tę wielkość do wartości 0,05 (5%). Z powyższej zależności określamy wymagane wzmocnienie ekwiwalentne:

$$G_1(0) \cdot A = \frac{N(0)}{M(0)} \cdot A = \frac{50}{50} \cdot A = \frac{1-e_p}{e_p} = \frac{1-0,05}{0,05} = 19,$$

skąd znajdujemy: $A = 19$, przy czym $M(0) = 5 \cdot 10 = 50$ (w mianowniku transmitancji).

Dalszą analizę prowadzimy na kilka sposobów, które ilustrują właściwości karty Nicholsa.

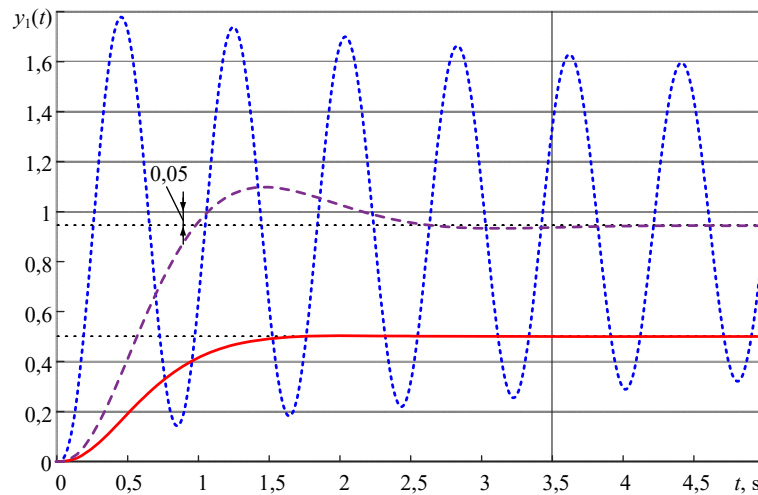
Podejście 1. Korzystając z obliczonej wartości wzmocnienia A , określamy wstępnie skorygowaną transmitancję obiektu:

$$A \cdot G_1(s) = \frac{A \cdot k}{(s+1)(s+5)(s+10)} = \frac{950}{(s+1)(s+5)(s+10)} = \frac{950}{s^3 + 16s^2 + 65s + 50}$$

Transmitancja układu zamkniętego jest więc następująca:

$$G(s) = \frac{A \cdot G_1(s)}{1 + A \cdot G_1(s)} = \frac{950}{s^3 + 16s^2 + 65s + 1000}$$

Odpowiedź na skok jednostkowy tego układu jest pokazana na rys. 9.33 (linia kropkowana).

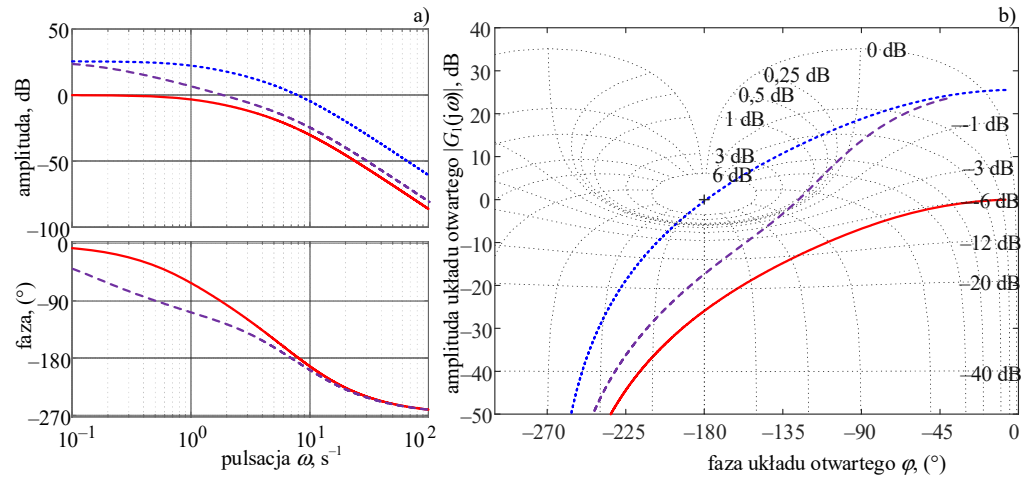


Rys. 9.33. Odpowiedź na skok jednostkowy układu zamkniętego: przed korekcją (linia ciągła), po uwzględnieniu wzmocnienia A (linia kropkowana) oraz po korekcji (linia przerywana)

Widać, że po korekcji wzmocnienia uchyb położenia zmienił się zgodnie z oczekiwaniami, jednak układ znalazł się bardzo blisko granicy stabilności, co potwierdzają sporządzone charakterystyki częstotliwościowe na rys. 9.34.

Wykresy pokazane na rys. 9.34 są mało czytelne, jednak po ich wykreśleniu na monitorze, można użyć polecenia 'Zoom In' w edytorze graficznym, co pozwala z niemal dowolną dokładnością określić krytyczne parametry: amplitudę rezonansową M_r oraz związaną z nią pulsacją ω_r – patrz załączony dalej program w języku Matlab.

Projektowanie korektora opóźniającego może być prowadzone w różny sposób. Zastosujemy tu metodę, w której korzysta się z oszacowanego zapasu fazy, który można wyznaczyć (jeśli nie jest zadany) na podstawie wartości współczynnika tłumienia, zgodnie z (9.36). W tym przypadku, na podstawie założonej wartości przeregulowania wyznaczamy współczynnik tłumienia projektowanego układu (9.39):



Rys. 9.34. Charakterystyki częstotliwościowe układu otwartego: wykres Bodego (a) oraz wykres Nicholasa (b); linie kropkowane – układ po zwiększeniu wzmocnienia; linie przerywane – układ po korekcji opóźniającej

$$\zeta = \frac{-\ln(y_{p\%}/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(y_{p\%}/100)}} = \frac{-\ln(0,2)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0,2)}} = 0,46$$

Teraz możemy oszacować wartość zapasu fazy: $\Delta\varphi = 2\zeta \frac{180}{\pi} = 52^\circ$

Oznacza to, że dla fazy układu otwartego $\varphi_f = -180 + 52 = 128^\circ$, amplituda przyjmie wartość 1. Z wykresu Bodego odczytujemy pulsację w tym punkcie dla układu otwartego: $\omega_f = 3,48 \text{ s}^{-1}$. Niestety, ta wartość znacznie się obniży w układzie zamkniętym, co można zauważyć, analizując na wykresie Nicholasa przesunięcie krzywych stałej fazy układu zamkniętego w miarę ich zbliżania się do punktu $(-180, 0)$. W ten sam sposób zmieniają także wartości pulsacji. Wstępnie zaleca się obniżenie tej pulsacji nawet o jedną dekadę ($\times 10$) – bardziej dokładne oszacowanie osiąga się po kilku próbach, gdyż stopień tej redukcji zależy od transmitancji układu [44]. Proponujemy tutaj obniżenie tej pulsacji $\times 2,5$, co w tym przypadku daje wartość: $\omega_f = 1,4 \text{ s}^{-1}$. Dla tej pulsacji odczytujemy z wykresu Bodego wzmocnienie układu otwartego: $|kG_1(j\omega)| = 20,45 \text{ dB}$. O tę właśnie wartość powinien zredukować amplitudę korektor szeregowy dla pulsacji ω_f .

Możemy więc oszacować wielkość stałej czasowej korektora:

$$T = \frac{1}{\omega_f} = \frac{1}{1,4} = 0,714 \text{ s}$$

Zakładamy, że korektor redukuje wzmocnienie układu otwartego w zakładanym stopniu, zatem:

$$20 \log \frac{T}{T/\beta} = 20 \log(\beta) = -20,45 \text{ i dalej: } \log(\beta) = -20,45 / 20$$

Stąd: $\beta = 10^{-20,45/20} = 0,095$ - korektor opóźniający.

Możemy więc napisać transmitancję proponowanego korektora opóźniającego:

$$G_k(s) = A \frac{sT+1}{sT/\beta+1} = \frac{19(0,714s+1)}{0,714s/0,095+1} = \frac{13,6s+19}{7,6s+1}$$

Po dodaniu tego korektora w szereg z obiektem otrzymujemy następującą transmitancję układu zamkniętego:

$$G(s) = \frac{G_k(s)G_1(s)}{1+G_k(s)G_1(s)} = \frac{682,5s+950}{7,566s^4+122,1s^3+507,8s^2+1126s+1000}$$

Odpowiedź tego układu na skok jednostkowy jest pokazana na rys. 9.33 (linia przerywana). Widać, że korektor spełnia postulowane parametry układu zamkniętego, chociaż czas narastania odpowiedzi jest na granicy oczekiwanych wymagań.

Poniżej zamieszczony jest program w języku Matlab, w którym prowadzone są obliczenia zgodnie z podanym algorytmem. Niektóre dane należy odczytać z wykresów odpowiednich funkcji.

```
% Przykład 9.7 na karcie Nicholisa: korektor opóźniający
close all;
% parametry obiektu
k0=50;
Mn=[1 16 65 50];
G0=tf(k0,Mn);
k=k0/Mn(end);
% zadane (postulowane) parametry regulacji:
ep=0.05; % błąd położenia 5%
tn=0.5; % czas narastania, s
yp=20; % przeregulowanie, %
% obliczenie parametrów:
k1=(1-ep)/ep;
A=k1/k; % wzmocnienie korektora
G1=tf([k0*A],Mn); % transmitancja ze wzmacniaczem
freq=0.1:0.01:100; % przedział zmian częstotliwości
t_step=5;
% wykres Bodego
[mag1,ph1]=bode(G1,freq);
figure(1)
bode(G0,freq);
hold on
bode(G1,freq);
grid;
% wykres Nicholisa
figure(2)
[mag0,ph0]=nichols(G0,freq);
hold on
[mag1,ph1]=nichols(G1,freq);
faza0=squeeze(ph0);
mg0=20*log10(squeeze(mag0));
faza1=squeeze(ph1);
mg1=20*log10(squeeze(mag1));
plot(faza0,mg0,faza1,mg1);
set(gca,'XLim',[-300 0],'YLim',[-50 40]);
xticks([-270:45:0]);
ngrid
% odpowiedź skokowa układu zamkniętego przed korekcją
figure(3)
G1z=feedback(G1,1);
G0z=feedback(G0,1);
hold on
[y1,t1]=step(G1z,t_step);
```

```

[y2,t2]=step(G0z,t_step);
linia=(1+yp/100)*(1-ep);
y3=linia*ones(size(y1));
plot(t1,y1,t2,y2,t1,y3,':');
% obliczanie parametrow korektora:
% wspolczynnik tlumienia na podstawie przeregulowania:
p = -log(yp/100);
dz=p/sqrt(pi^2+p^2); % dla postulowanego przeregulowania
omn=(1+1.039*dz-0.417*dz^2+1.76*dz^3)/tn; % na podstawie dz
% amplituda rezonansowa Mr:
Mr = 1/(2*dz*sqrt(1-dz^2));
Mr_dB=20*log10(Mr);
pMx=sqrt((Mr^2-1)/Mr^2);
omr=omn*sqrt(pMx); % pulsacja rezonansu
% korektor
% zapas fazy dla wyznaczonej wartosci dz:
Dfi=2*dz*180/pi;
fif=-180+Dfi;
omf=3.48; % wartosc odczytana z wykresu Bodego
omf=omf/2.5; % i zredukowana x2,5
Red=20.45; % wymagana redukcja wzmacnienia, dB
p=10^(-Red/20);
T=1/omf; % stala czasowa korektora
disp('Transmitancja korektora:');
Gk=tf(19*[T 1],[T/p 1]),
G0k=Gk*G0; % ukklad otwarty po korekcji
disp('Transmitancja ukkladu zamknietego po korekcji:');
G0kz=feedback(G0k,1), % ukklad zamkniety po korekcji
% odpowiedz skokowa ukkladu skorygowanego
[y1,t1]=step(G0kz,t_step);
linia=(1+yp/100)*(1-ep);
y3=linia*ones(size(y1));
y2=(1-ep)*ones(size(y1));
plot(t1,y1,t1,y2,':',t1,y3,':');
grid;
% uzupelnienie wykresu Bodego o ukklad skorygowany
figure(1)
hold on
bode(G0k,freq);
% uzupelnienie wykresu Nicholasa o ukklad skorygowany
figure(2)
[mag0,ph0]=nichols(G0k,freq);
hold on
faza0=squeeze(ph0);
mg0=20*log10(squeeze(mag0));
plot(faza0,mg0);

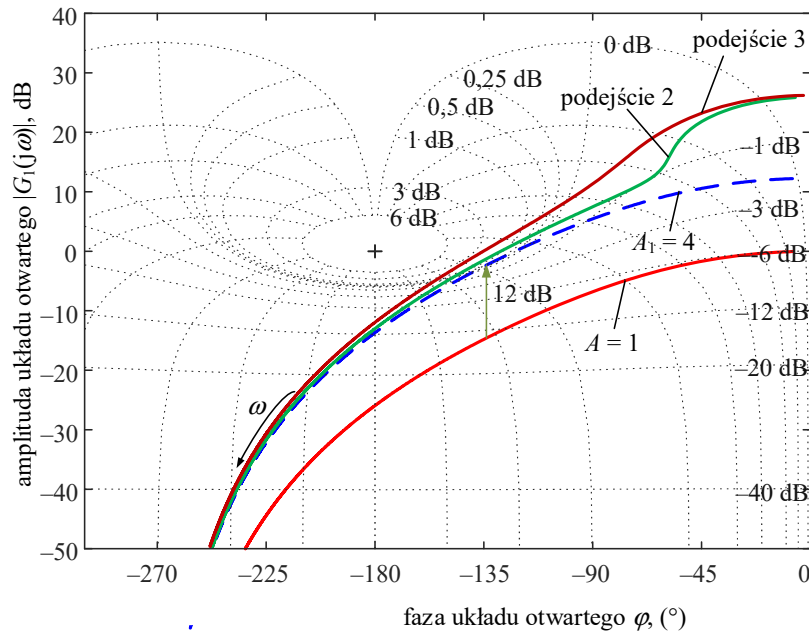
```

Podejście 2. Pewną niedogodnością stosowania powyższej procedury jest konieczność intuicyjnego przewidywania zmiany charakterystyki układu po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego. Zmiana ta jest szczególnie duża w przypadku konieczności zastosowania dużego wzmacnienia korektora, jak w rozważanym przypadku.

W celu obejścia tej niedogodności proponuje się wstępne oszacowanie wzmacnienia korektora A na podstawie założenia, że charakterystyka układu otwartego jest styczna do krzywej stałego modułu o wartości ok. 1 dB. W tym przypadku oznacza to, że charakterystykę układu otwartego przesuwamy na karcie Nicholasa w górę o ok. 12 dB, co jest równoważne zastosowaniu wzmacnienia $A_1 = 4$: $20\log(4) \approx 12$ (rys. 9.35, krzywa przerywana niebieska). Końcowe

wzmocnienie korektora można określić wychodząc od wymagań co do uchybu statycznego, z uwzględnieniem już wprowadzonego wzmocnienia A_1 :

$$A_2 = \frac{1-e_p}{e_p k} = \frac{1-e_p}{e_p A_1} = \frac{1-e_p}{e_p} 10^{\frac{-12}{20}} = \frac{1-0,05}{0,05 \cdot 4} = 4,8 \quad (\text{patrz przykład 9.6})$$



Rys. 9.35. Charakterystyki częstotliwościowe układu otwartego na wykresie Nicholasa: rezultaty korekcji wg podejścia 2 oraz 3

Współczynnik β można określić z następujących warunków [62]:

- moduł korektora bliski jedności $A\beta = 1$, skąd: $\beta = 1/A$, gdzie w tym przypadku $A = A_2$;
- małe opóźnienie wprowadzane przez korektor $\omega_r T = 10$, skąd: $T = 10/\omega_r$, ω_r – pulsacja rezonansowa.

W tym przypadku $\omega_r = 3,8 \text{ s}^{-1}$ (odczyt z rys. 9.35 dla punktu styczności przesuniętej charakterystyki - krzywa oznaczona kolorem niebieskim - z okręgiem stałego modułu $M_r = 1 \text{ dB}$). Na tej podstawie obliczamy:

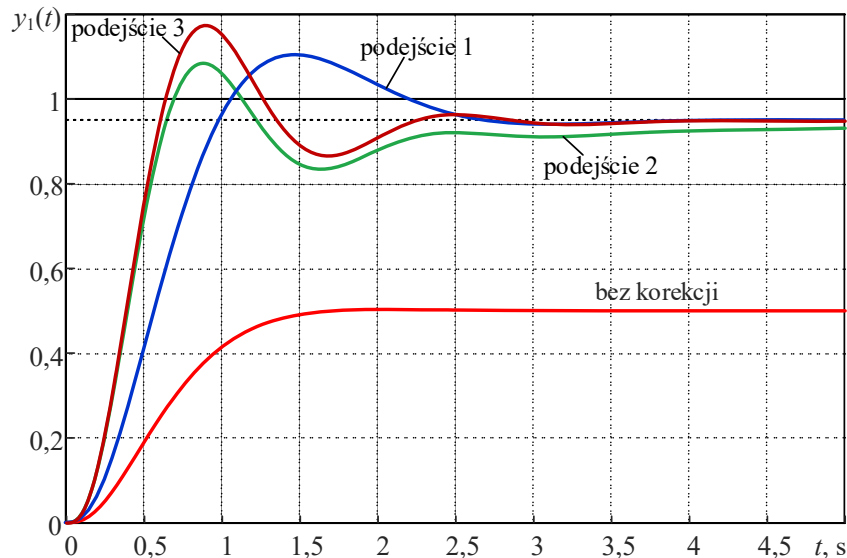
$$\beta = \frac{1}{A_2} = \frac{1}{4,8} = 0,21$$

$$\text{oraz: } T = \frac{10}{\omega_r} = \frac{10}{3,8} = 2,63 \text{ s}$$

Ostatecznie, transmitancja korektora przyjmuje następującą postać:

$$G_k(s) = A_1 A_2 \frac{(Ts+1)}{(Ts/\beta+1)} = A \frac{(Ts+1)}{(Ts/\beta+1)} = 19,2 \frac{(2,63s+1)}{(12,5s+1)}$$

Charakterystyka układu otwartego z korektorem na płaszczyźnie Nicholasa jest pokazana na rys. 9.35 (linia zielona). Odpowiedź na skok jednostkowy układu zamkniętego z korektorem jest pokazana na rys. 9.36 (linia zielona).



Rys. 9.36. Odpowiedzi na skok jednostkowy skorygowanego układu zamkniętego wg rozważanych sposobów korekcji opóźniającej

Podejście 3. Nieznaczna modyfikacja poprzedniego podejścia pozwala poprawić szybkość osiągnięcia stanu ustalonego odpowiedzi układu zamkniętego. Polega ona na poszerzeniu pasma działania rozważanego korektora opóźniającego przez zmniejszenie (w tym przypadku dwukrotnie) stałej czasowej T :

$$T = \frac{5}{\omega_r} = \frac{5}{3,8} = 1,3 \text{ s}$$

Prowadzi to do następującej transmitancji korektora:

$$G_k(s) = A_1 A_2 \frac{(Ts+1)}{(Ts/\beta+1)} = A \frac{(Ts+1)}{(Ts/\beta+1)} = 19,2 \frac{(1,3s+1)}{(6,3s+1)}$$

Charakterystyka układu otwartego z uzyskanym w ten sposób korektorem jest pokazana na rys. 9.35 (krzywa brązowa ciągła). Odpowiedź na skok jednostkowy układu zamkniętego z tym korektorem jest zaznaczona kolorem brązowym na rys. 9.36.

Przykład 9.8. Do regulacji procesu, określonego za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)},$$

dobrać korektor szeregowy, który zapewni następujące parametry regulacji: - uchyb statyczny prędkościowy $e_v \leq 10\%$, - przeregulowanie $y_{p\%} \leq 18\%$, czas narastania $t_n \leq 0,2 \text{ s}$.

Jak widać, transmitancja obiektu jest klasy 1. Zapiszmy ją w postaci, dla której określany jest uchyb prędkościowy (9.6):

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)} = \frac{0,1}{s(s+1)(0,1s+1)} = \frac{k}{s(s+1)(0,1s+1)} = \frac{kL(s)}{sM(s)}, k = 0,1$$

$$\text{skąd: } e_v = \frac{M(0)}{L(0)} = \frac{1}{k} = 10 = 1000\%$$

Widać, że jest to wielkość znacznie przekraczająca oczekiwania: statyczny uchyb położenia jest wprawdzie równy zero, ale układ ma bardzo duży czas narastania i ustalenia - rys. 9.40, ciągła krzywa. W celu poprawienia tych parametrów należy wprowadzić dodatkowe wzmocnienie A o wartości:

$$e_v = \frac{1}{Ak} = 0,1, \text{ skąd: } A = 100.$$

Po uwzględnieniu tego wzmocnienia, transmitancja układu otwartego przyjmuje następującą postać:

$$G_1(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+10)} = \frac{100}{s^3 + 11s^2 + 10s}$$

Charakterystyka układu otwartego o tej transmitancji jest pokazana na rys. 9.37, krzywa 1. Widać, że występuje tu bardzo mały zapas fazy i zapas wzmocnienia. Potwierdza to również odpowiedź tego układu na skok jednostkowy po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego - rys. 9.40, krzywa 1. W celu bardziej dokładnego określenia amplitudy i pulsacji rezonansowej wygodnie jest wykreślić charakterystykę Bodego dla układu zamkniętego (rys. 9.39, krzywe 1), skąd, po odpowiednim powiększeniu ('Zoom In'), odczytamy: $M_{r1} = 31,5$ dB oraz $\omega_{r1} = 3$ s⁻¹ przy zapasie fazy wynoszącym zaledwie $\Delta\varphi_1 = 2^\circ$.

Przechodzimy teraz do wyznaczenia pozostałych parametrów korektora. Na podstawie założonej wartości przeregulowania wyznaczamy współczynnik tłumienia projektowanego układu (9.39):

$$\zeta = \frac{-\ln(y_{p\%}/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(y_{p\%}/100)}} = \frac{-\ln(0,18)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0,18)}} = 0,48$$

Uwzględniając także zakładany czas narastania t_n , możemy określić pulsację drgań swobodnych (9.41):

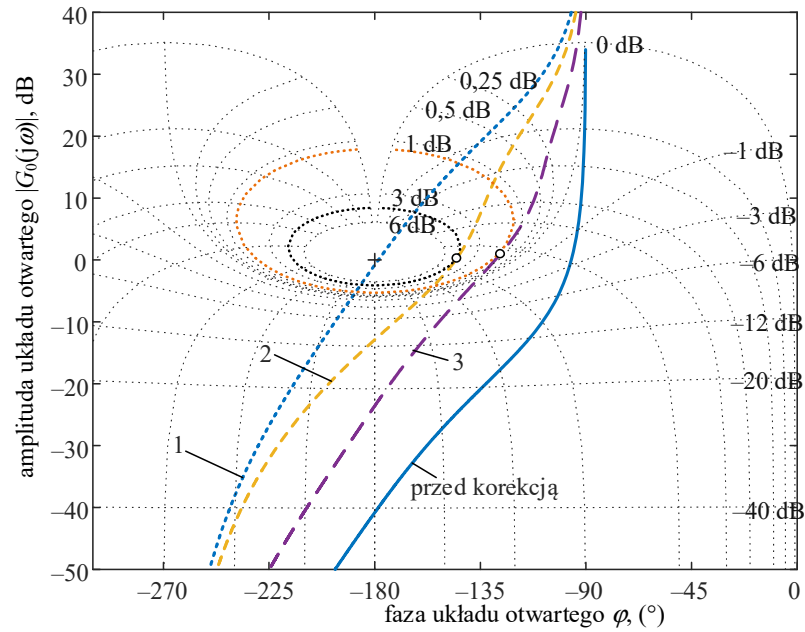
$$\omega_n = (1 + 1,039\zeta - 0,417\zeta^2 + 1,76\zeta^3) / t_n = 7,98 \text{ s}^{-1}$$

oraz punkt rezonansowy postulowanego układu. Jego amplituda jest zależna od wyznaczonego współczynnika tłumienia (9.29):

$$M_{r2} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,5 \text{ dB}$$

$$\text{przy pulsacji (9.31): } \omega_{r2} = \omega_n \sqrt{p_{Mx}} = \omega_n \sqrt{\frac{M_{r2}^2 - M(0)}{M_{r2}^2}} = 5,87 \text{ s}^{-1}$$

Jeśli przyjmiemy, że maksymalne przyśpieszenie fazy zachodzi dla $\omega_k = \omega_{r2}$ i korektor powinien przyśpieszyć fazę o wartość $\delta = 45^\circ$ (założenie), to parametry korektora można oszacować na podstawie (9.17):



Rys. 9.37. Korekcja układu na karcie Nicholisa: 1 – trajektoria układu otwartego po dodaniu wzmocnienia A ; 2 – trajektoria układu po wstępnej korekcji; 3 – trajektoria układu z korektorem

$$\omega_s = \frac{\sqrt{\beta}}{T}, \quad \delta = \arctg \frac{\beta-1}{2\sqrt{\beta}} = \arcsin \frac{\beta-1}{\beta+1},$$

skąd otrzymamy następujące parametry: $\frac{\beta-1}{\beta+1} = \sin \delta = 0,71$, co daje: $\beta = 5,83$

$$\text{oraz: } T = \frac{\sqrt{\beta}}{\omega_s} = \frac{\sqrt{5,83}}{5,87} = 0,41 \text{ s.}$$

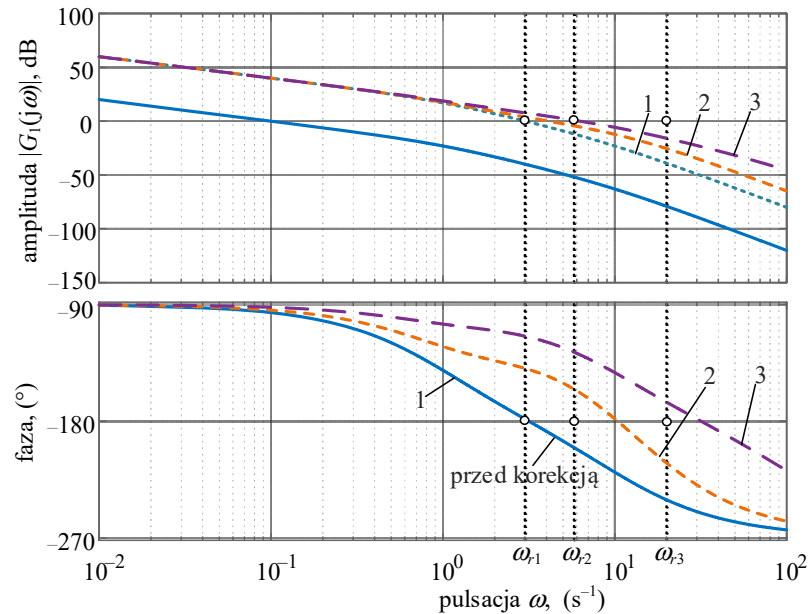
Podstawiając powyższe dane do transmitancji korektora (z uwzględnieniem określonego wcześniej wzmocnienia), otrzymamy:

$$G_k(s) = A \frac{sT+1}{sT/\beta+1} = \frac{100(0,41s+1)}{0,41s/5,83+1} = \frac{41s+100}{0,071s+1}$$

Po włączeniu tego korektora w szereg z obiektem otrzymamy następującą transmitancję układu otwartego po wstępnej korekcji:

$$G_{ik}(s) = \frac{4,1s+10}{0,0071s^4+0,178s^3+1,17s^2+s}$$

Trajektoria tego układu na karcie Nicholisa jest pokazana na rys. 9.37, krzywa 2. Odpowiedź na skok jednostkowy układu zamkniętego jest pokazana na rys. 9.40, krzywa 2. Można zauważyć wyraźną poprawę dynamiki układu, jednak w dalszym ciągu nie są spełnione oczekiwania w zakresie wartości przeregulowania oraz czasu narastania.



Rys. 9.38. Wykresy amplitudy i fazy układu otwartego: 1 – po dodaniu wzmocnienia A ; 2 – po wstępnej korekcji; 3 – układ z korektorem

Główną przyczyną rozbieżności pomiędzy postulowanymi w powyższych obliczeniach parametrami korektora a uzyskanymi rezultatami w postaci charakterystyk dynamicznych poszukiwanego układu zamkniętego jest odkształcenie krzywych stałej fazy N na karcie Nicholasa, które jest szczególnie duże w pobliżu punktu centralnego ($180^\circ, 0$). Aby to skorygować, należy przyjmować znacznie większe wartości pulsacji niż te, obliczone na podstawie zakładanej amplitudy rezonansowej M_r . W kolejnym kroku przyjmujemy pulsację rezonansową o wartości: $\omega_3 = 12 \text{ s}^{-1}$ oraz kąt wyprzedzenia korektora $\delta = 77^\circ$. Powtarzając powyższe obliczenia otrzymamy:

$$\frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \sin \delta = 0,97, \text{ co daje: } \beta = 77$$

$$\text{oraz: } T = \frac{\sqrt{\beta}}{\omega_s} = \frac{\sqrt{77}}{12} = 0,73 \text{ s, gdzie } \omega_s = \omega_3.$$

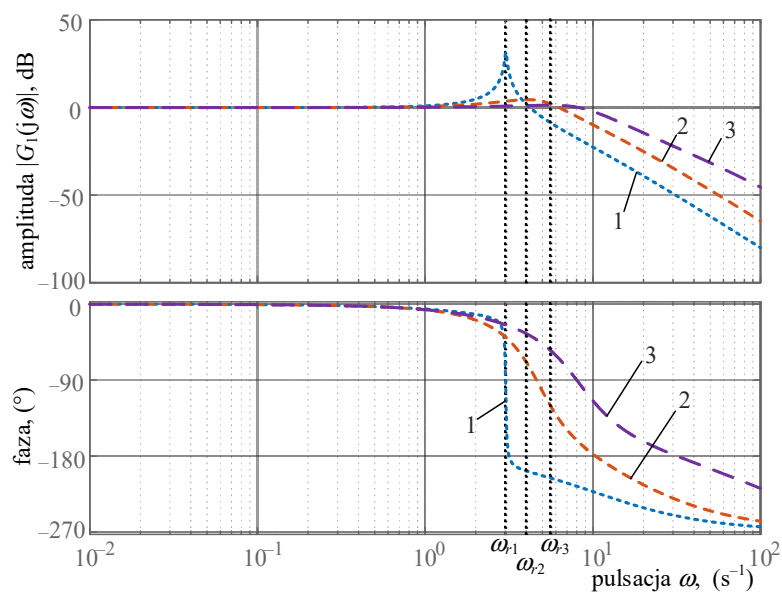
Parametry te prowadzą do poprawionej transmitancji korektora:

$$G_k(s) = A \frac{sT + 1}{sT / \beta + 1} = \frac{100(0,73s + 1)}{0,73s / 77 + 1} = \frac{73s + 100}{0,0095s + 1},$$

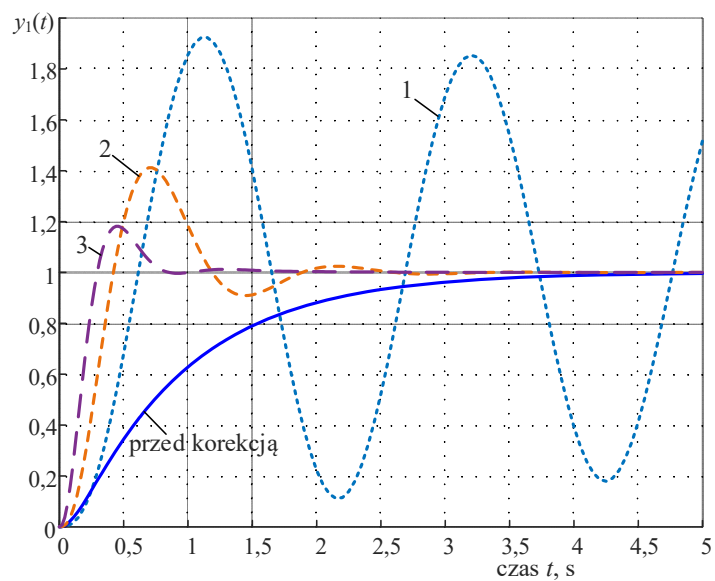
co daje następującą transmitancję układu otwartego:

$$G_{1k}(s) = \frac{7,3s + 10}{0,00095s^4 + 0,11s^3 + 1,11s^2 + s}.$$

Trajektoria układu otwartego o tej transmitancji jest pokazana na rys. 9.37, krzywa 3, natomiast odpowiedź na skok jednostkowy układu zamkniętego przedstawia krzywa 3 na rys. 9.40. Można sprawdzić, że teraz spełnione są założone oczekiwania w odniesieniu do dynamiki układu.



Rys. 9.39. Wykresy amplitudy i fazy układu zamkniętego: 1 – po dodaniu wzmacnienia A ; 2 – po wstępnej korekcji; 3 – układ z korektorem



Rys. 9.40. Odpowiedzi na skok jednostkowy układów zamkniętych: 1 – po uwzględnieniu wzmacnienia A , 2 – po wstępnej korekcji, 3 – dla układu z korektorem. Dla układu przed korekcją skala czasu została zredukowana $\times 10$

Na zakończenie porównajmy charakterystyki częstotliwościowe amplitudy i fazy projektowanego układu otwartego – rys. 9.38 z podobnymi wykresami dla układu zamkniętego – rys. 9.39. Wiadać, że występuje duża różnica w rozmieszczeniu wartości pulsacji rezonansowych ω_2 oraz ω_3 , co jest rezultatem wspomnianej deformacji krzywych stałej fazy N na karcie Nicholasa. Podobnie zachowują się także pulsacje układu otwartego i zamkniętego. Relacje te należy uwzględnić przy projektowaniu korektora.

9.5. Regulatory PID

9.5.1. Rodzaje regulatorów

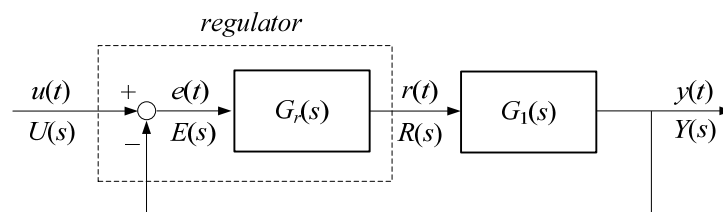
Łatwo zauważyć, że pewną niedogodnością w procesie projektowania układów regulacji z użyciem przedstawionych powyżej korektorów szeregowych jest mała uniwersalność tej metody. Po zaprojektowaniu określonego korektora otrzymuje się jego transmitancję, na podstawie której należy wykonać odpowiednie urządzenie fizyczne, na przykład w postaci elektronicznego układu analogowego (rys. 9.7). W zależności od charakteru sterowanego procesu, może to być także układ hydrauliczny, pneumatyczny lub inny. Oczywiście potrzeba ujednolicenia takich konstrukcji doprowadziła do utworzenia rodziny podstawowych członów korekcyjnych, które mogą być wykonywane z zastosowaniem rozmaitych technologii. W ten sposób powstały regulatory, które objęto ogólną nazwą PID, która jest akronimem wskazującym na:

P – działanie proporcjonalne;

I – działanie integracyjne (całkujące);

D – działanie różniczkujące.

Regulator PID jest korektorem szeregowym, który wchodzi w skład układu regulacji zgodnie ze strukturą przedstawioną na rys. 9.41.



Rys. 9.41. Układ sterowania z regulatorem

Regulatory PID realizują pojedyncze lub złożone funkcje, związane z ich nazwą. Praktyczne znaczenie mają typy regulatorów zebrane w Tabeli 9.3. Sygnałem wejściowym regulatora jest uchyb regulacji $e(t)$, który po przetworzeniu przyjmuje wartość sygnału sterującego $r(t)$. Transmitancja regulatora jest więc określana jako iloraz transformat sygnałów na wyjściu i wejściu:

$$G_r(s) = \frac{R(s)}{E(s)} \quad (9.44)$$

Praktyczne znaczenie mają następujące regulatory: P, I, PI, PD oraz PID.

Regulator P – działanie proporcjonalne realizowane za pomocą wzmacniacza. Transmittancja takiego układu jest następująca:

$$G_r(s) = k_p \quad (9.45)$$

gdzie $k_p > 0$ jest współczynnikiem wzmocnienia.

Jest to element bezinercyjny, w którym sygnał wyjściowy jest określony według następującej relacji:

$$r(t) = k_p e(t) + o_{ff}, \quad (9.46)$$

gdzie o_{ff} jest wartością przesunięcia (ang. *offset*) określanego dla $e(t) = 0$. Dalej będziemy pomijać ten składnik.

Regulator I realizuje funkcję całkowania:

$$G_r(s) = \frac{1}{sT_I}, \quad (9.47)$$

gdzie T_I jest czasem zdwojenia, po którym sygnał wyjściowy przyjmuje wartość 1.

W dziedzinie czasu odpowiada to następującemu przetwarzaniu:

$$r(t) = \frac{1}{T_I} \int e(t) dt \quad (9.48)$$

Obecność takiego członu w układzie regulacji powoduje, z czasem, redukcję uchybu.

Regulator PI – działanie proporcjonalno-całkujące:

$$G_r(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) \quad (9.49)$$

Układ jest utworzony z dwóch równolegle połączonych członów: proporcjonalnego i całkującego. W tym przypadku nazwa parametru T_I (czas zdwojenia) jest bardziej uzasadniona, gdyż po tym czasie sygnał wyjściowy przyjmuje wartość dwukrotnego wzmocnienia (Tabela 9.3) [42].

Sygnał wyjściowy regulatora jest tworzony w rezultacie następującego przetwarzania:

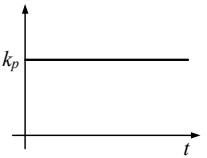
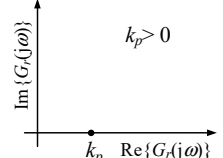
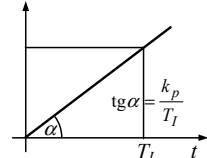
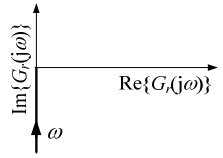
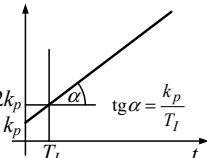
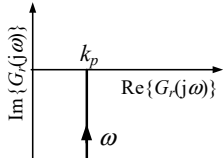
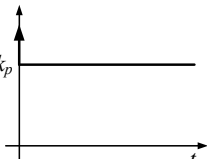
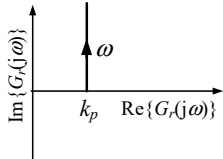
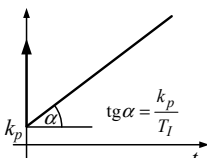
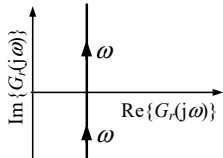
$$r(t) = k_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt \right) \quad (9.50)$$

Regulator PD – działanie proporcjonalno-różniczkujące:

$$G_r(s) = k_p (1 + sT_D), \quad (9.51)$$

gdzie parametr T_D jest nazywany czasem wyprzedzania.

Tabela 9.3. Podstawowe charakterystyki regulatorów PID

Typ	Transmitancja $G_r(s)$	Odpowiedź jednostkowa $y_1(t)$	Charakterystyka częstotliwościowa $G_r(j\omega)$, $\omega \geq 0$
P	k_p		
I	$\frac{1}{sT_I}$		
PI	$k_p \left(1 + \frac{1}{sT_I}\right)$		
PD	$k_p(1 + sT_D)$		
PID	$k_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right)$		

Sygnał wyjściowy otrzymuje się w rezultacie następującego przetwarzania uchybu:

$$r(t) = k_p \left(e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (9.52)$$

Regulator PID – działanie proporcjonalno-całkująco-różniczkujące:

$$G_r(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) = k_p + \frac{k_p}{sT_I} + sk_p T_D \quad (9.53)$$

Wyjście jest sumą trzech operacji dokonywanych na błędzie regulacji $e(t)$:

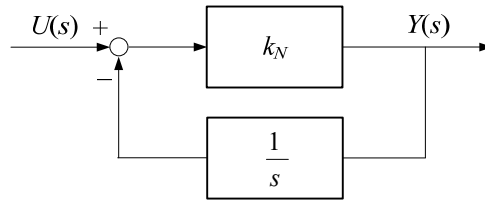
$$r(t) = k_P \left(e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt \right) \quad (9.54)$$

Regulator PID o transmitancji (9.53) jest nazywany regulatorem idealnym, gdyż jest on w tej postaci nierealizowalny. W praktycznych wykonaniach największy kłopot występuje z operacją różniczkowania, gdyż nie jest znany odpowiedni proces fizyczny, w którym można odwzorować taką funkcję. Problem ten można złagodzić przez stosowanie rzeczywistego elementu różniczkującego w miejsce różniczkowania idealnego. Wówczas transmitancja elementu D będzie zastąpiona funkcją:

$$sT_D \rightarrow \frac{sT_D}{s\alpha T_D + 1}, \quad (9.55)$$

gdzie zazwyczaj przyjmuje się $\alpha = 0,0625 \div 0,125$ ($\alpha \ll T_D$) [58].

Regulatory PD oraz PID, zbudowane z użyciem takiej funkcji, będą miały nieco inne właściwości transmitancji. Innym znanym sposobem jest wykorzystanie układu ze sprzężeniem zwrotnym: w torze głównym znajduje się wzmacniacz, a w torze sprzężenia zwrotnego – układ całkujący (rys. 9.42).



Rys. 9.42. Układ o działaniu różniczkującym dla $k_N \gg 1$

Transmitancja zastępcza układu jest następująca:

$$G(s) = \frac{k_N}{1 + \frac{k_N}{s}} = \frac{s}{1 + \frac{s}{k_N}} \approx s \quad (9.56)$$

Przy dużej wartości współczynnika wzmocnienia k_N jest ona bliska funkcji idealnego różniczkowania.

Regulator PID może być wykonany w jednej z dwóch form, w zależności od uporządkowania jego elementów składowych: w formie równoległej – zgodnie z (9.53), lub w formie szeregowej, zgodnej z następującą postacią transmitancji:

$$G_r(s) = k_{Ps} \left(1 + \frac{1}{sT_{Is}} \right) (1 + sT_{Ds}) = k_{Ps} \left(1 + \frac{T_{Ds}}{T_{Is}} + \frac{1}{sT_{Is}} + sT_{Ds} \right) \quad (9.57)$$

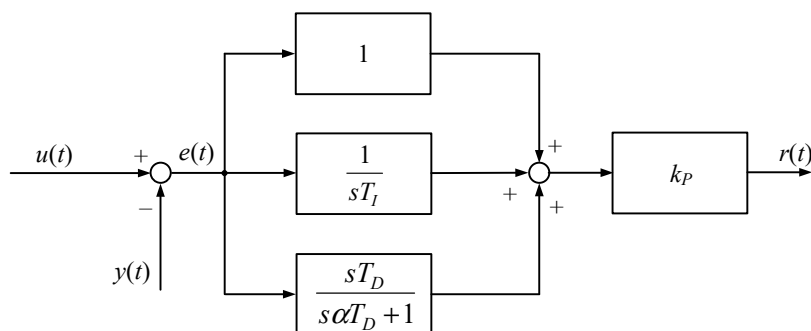
Struktura równoległego regulatora PID jest pokazana na rys. 9.43. Odpowiada ona transmitancji (9.53), przy czym człon różniczkujący jest przybliżony zgodnie z (9.55).

Przez zmianę kombinacji użytych elementów można utworzyć schematy pozostałych regulatorów z rodziny PID.

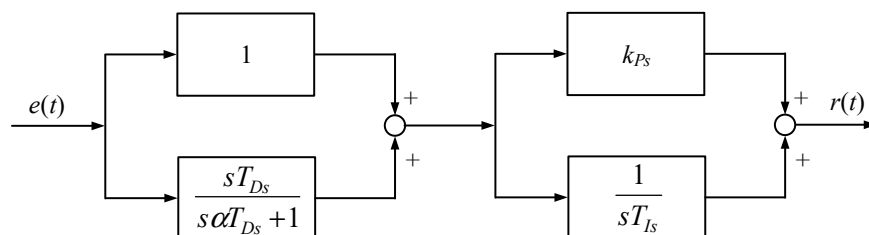
Realizacja szeregowego regulatora PID jest pokazana na rys. 9.44. Na podstawie transmitancji (9.53) i (9.57) można wyznaczyć wzajemne relacje pomiędzy parametrami obu form regulatora:

$$\begin{aligned} k_{Ps} &= \frac{k_P}{2} \left(1 + \frac{1}{T_I} \sqrt{T_I^2 - 4T_I T_D} \right) \\ T_{Is} &= \frac{T_I}{2} \left(1 + \frac{1}{T_I} \sqrt{T_I^2 - 4T_I T_D} \right) \\ T_{Ds} &= \frac{T_I}{2} \left(1 - \frac{1}{T_I} \sqrt{T_I^2 - 4T_I T_D} \right) \end{aligned} \quad (9.58)$$

Przekształcenie to obowiązuje dla przypadku, gdy $T_I \geq 4T_D$. (gdy transmitancja równoległej formy regulatora ma rzeczywiste zera i bieguny).



Rys. 9.43. Realizacja równoległa regulatora PID



Rys. 9.44. Realizacja szeregowego regulatora PID

Zauważmy, że idea regulatora PID w dużej mierze pokrywa się z koncepcją omówionych wcześniej szeregowych korektorów: działanie P spełnia rolę wzmocnienia, I ma działanie opóźniające fazę, natomiast D – przyspiesza fazę. Odpowiedni dobór

konfiguracji regulatora oraz parametrów funkcji przejścia, pozwala zrealizować podobne zadania, jak w przypadku korektorów szeregowych.

Należy dodać, że w literaturze można spotkać bardzo różne struktury regulatorów PID i sposoby ich budowy [58], na przykład ogólna transmitancja (9.53) może być zapisana w następującej postaci:

$$G_r(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s, \quad (9.59)$$

gdzie: $K_P = k_P$, $K_I = k_P / T_I$, $K_D = k_P T_D$.

Człon różniczkujący jest często zasilany sygnałem wyjściowym układu regulacji, co może łagodzić szумы powstające przy dużych zmianach wartości zadanej (rys. 9.53).

9.5.2. Dobór rodzaju regulatora

Zastosowanie i właściwości regulatora PID są podobne do szeregowego korektora opóźniająco-przyspieszającego. Podobnie też należy wybierać odpowiednie konfiguracje regulatora. Można więc powtórzyć ogólne zasady, które odnoszą się do korektorów szeregowych.

Regulator P jest najprostszym rozwiązaniem, gdy układ regulacji jest stosunkowo wolny (niezbyt intensywna dynamika). Wówczas zwiększenie wzmocnienia może poprawić zarówno dynamikę, jak i zmniejszyć błąd ustalony regulacji.

Regulator PI (I) należy wybrać wtedy, gdy układ zamknięty ma satysfakcjonujące właściwości dynamiczne (przeregulowanie, czas narastania, czas ustalenia), natomiast zbyt duży jest ustalony uchyb położenia. Odnosi się to do układów zerowej klasy. Dodanie działania całkującego powoduje, że otrzymujemy układ klasy pierwszej: całkowanie błędów $e(t)$, przy ujemnym sprzężeniu zwrotnym, z biegiem czasu sprowadza go do zera. Działanie całkujące może być także pomocne w przypadku różniczkującego charakteru obiektu, w tłumieniu błędów pomiarowych.

Regulator PD jest wymagany do poprawy właściwości dynamicznych układu zamkniętego, podczas gdy nie wpływa on na wartość błędów ustalonego. Dodanie członu proporcjonalno-różniczkującego w szereg z obiektem sprawia, że zmiana uchybu jest wzmacniana, powodując przyspieszenie zmiany odpowiedzi (efekt predykcji). Działanie takie powinno jednak być rozsądne, gdyż różniczkowanie wzmacnia szумы, co łatwo prowadzi do niestabilności układu. Z tego powodu regulatory PD są rzadko stosowane. Do poprawy właściwości dynamicznych układu używane są regulatory PID.

Regulator PID wprowadza działanie, które jest kombinacją działań regulatorów PI oraz PD. Należy go stosować w takich przypadkach, gdy zamknięty układ bez korekcji wykazuje zarówno złe właściwości statyczne (duży uchyb), jak i dynamiczne.

Można zauważyć, że wybór typu regulatora oraz w dużej mierze określenie jego nastawień ma swoje fizyczne uzasadnienie. Zwiększenie wzmocnienia w członie P prowadzi do poszerzenia częstotliwościowego pasma procesu regulacji, co objawia się w postaci zwiększonych oscylacji. Zwiększenie (wydłużenie) czasu zdwojenia T_i w

członie integrującym prowadzi do opóźnienia reakcji systemu i zwiększenia jego stabilności. I wreszcie, zwiększenie czasu wyprzedzenia T_d prowadzi do przyspieszenia odpowiedzi, chociaż zmniejsza granicę stabilności.

9.5.3. Określenie nastawień regulatora

Wielką zaletą pomysłu stosowania regulatorów PID okazało się opracowanie uniwersalnych reguł określania ich nastawień. Od czasu pierwszej propozycji Zieglera i Nicholasa z 1942 roku⁴⁰, powstało wiele reguł określania nastawień regulatorów PID. Odnoszą się one do uproszczonych modeli otwartego lub zamkniętego (z ujemnym sprzężeniem zwrotnym) układu regulacji. Modele te dzielą się na kilka kategorii [51, 58]:

- model pierwszego rzędu astatyczny z opóźnieniem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s} e^{-s\tau_1}, \quad (9.60)$$

gdzie $k_1 > 0$, $T_1 > 0$, $\tau_1 > 0$;

- model pierwszego rzędu statyczny z opóźnieniem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-s\tau_1}; \quad (9.61)$$

- model drugiego rzędu z opóźnieniem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-s\tau_1}, \quad (9.62)$$

gdzie $k_1 > 0$ jest wzmocnieniem, $T_1 > T_2 > 0$ – stałe czasowe, τ_1 – opóźnienie [s]

lub:

$$G_1(s) = \frac{k_1}{T_1^2 s^2 + 2\zeta T_1 s + 1} e^{-s\tau_1}, \quad (9.63)$$

gdzie: $k_1 > 0$, $T_1 > 0$, $\zeta > 0$, $\tau_1 > 0$.

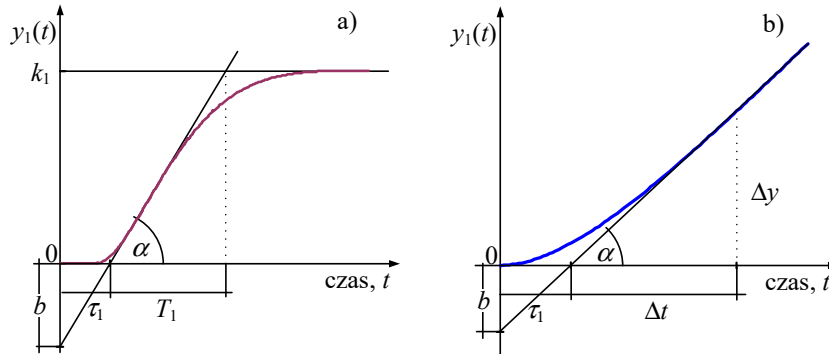
Metoda Zieglera i Nicholasa może być stosowana do określenia nastawień regulatorów P, PI lub PID. Zakłada się, że obiekt może być reprezentowany za pomocą jednej z transmitancji (9.60) - (9.62)⁴¹. Parametry regulatora mogą być określone za pomocą jednego z dwóch testów.

W pierwszym z nich bada się odpowiedź obiektu (układu otwartego bez regulatora) na skok jednostkowy (rys. 9.45). Z przebiegu tej odpowiedzi należy określić dwie wielkości: opóźnienie τ_1 oraz kąt α . W dalszych działaniach korzysta się z wielkości a

⁴⁰ Ziegler J.G., Nichols N.B., *Optimum setting for automatic controllers*. ASME Transactions, 1942, pp. 759–768.

⁴¹ W bardziej zaawansowanych podejściach stosowane są różne reguły nastawiania regulatorów w zależności od rozpatrywanego modelu obiektu [63].

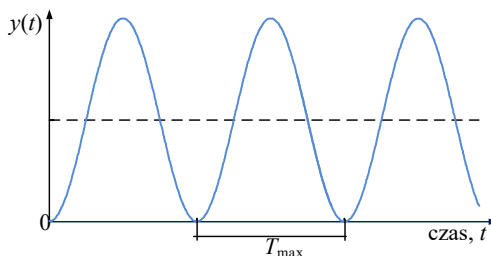
oraz b : $a = \operatorname{tg} \alpha = k_1 / T_1 = \Delta y / \Delta t$, $b = \tau_1 \operatorname{tg} \alpha = a \tau_1$. Jak widać, ważne są tu jedynie parametry obiektu związane z jego dynamiką.



Rys. 9.45. Odpowiedź skokowa układu otwartego: a) klasy $m = 0$, b) klasy $m > 0$

W drugim teście przeprowadza się badanie charakterystyki obiektu w układzie z regulatorem P i jednostkowym sprzężeniem zwrotnym. Gdy w charakterze korektora znajduje się regulator PID, należy wyłączyć działanie całkujące (T_I – bardzo duże) oraz działanie różniczkujące ($T_D = 0$). W tej konfiguracji należy ustawić małą wartość k_P , wolno ją zwiększając. W ten sposób, jeśli osiągnięta zostanie granica stabilności, w odpowiedzi układu pojawią się regularne oscylacje (rys. 9.46). Stan ten na charakterystyce Nyquista odpowiada punktowi $(-1+j0)$. Należy wówczas zmierzyć dwa parametry: wzmacnienie $k_P = k_{p\max}$, które wyznacza krytyczną trajektorię układu otwartego oraz pulsację $\omega_{\max}$, przy której ta trajektoria przecina ujemną część osi rzeczywistej. Krytyczna pulsacja może być wyznaczona przez pomiar okresu oscylacji obserwowanej odpowiedzi układu: $\omega_{\max} = 2\pi/T_{\max}$. Stąd wynika nazwa tego testu: badanie odpowiedzi częstotliwościowej.

Doświadczalna analiza wyników przeprowadzonych w teście odpowiedzi na skok jednostkowy układu otwartego lub w próbie pomiaru granicy stabilności układu otwartego (odpowiedź częstotliwościowa) pozwala określić nastawienia regulatorów P, PI oraz PID (Tabela 9.4).



Rys. 9.46. Wynik badania układu zamkniętego na granicy stabilności

Tabela 9.4. Wartości nastawień regulatorów według reguł Zieglera-Nicholsa

regulator	odpowiedź skokowa			odpowiedź częstotliwościowa		
	k_P	T_I	T_D	k_P	T_I	T_D
P	$1/b$			$k_{pmax}/2$		
PI	$0,9/b$	3τ		$k_{pmax}/2,2$	$T_{max}/1,2$	
PID	$1,2/b$	2τ	$0,5 \tau$	$k_{pmax}/1,7$	$T_{max}/2$	$T_{max}/8$

Jeśli transmitancja obiektu jest znana, to parametry granicy stabilności (k_{pmax}) można określić, analizując stabilność układu zamkniętego z parametrem k_P . Następnie T_{max} można oszacować na podstawie pulsacji transmitancji tego układu zamkniętego z wstawioną wartością granicznego wzmocnienia.

Przykład 9.9. Dobrać regulator PID do układu, w którym obiekt jest określony za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)}$$

Nastawienia regulatora określić za pomocą podstawowej metody Zieglera-Nicholsa. Przeprowadzić analizę otrzymanego układu regulacji.

Układ jest klasy zerowej (brak zerowego bieguna), więc parametry regulatora można określić za pomocą odpowiedzi na skok jednostkowy modelu o postaci (9.61) lub za pomocą odpowiedzi częstotliwościowej (badanie granicy stabilności układu zamkniętego). Zaczniemy od tej drugiej metody.

Parametry układu zamkniętego na granicy stabilności wyznaczymy, stosując kryterium Routha-Hurwitza w odniesieniu do układu, w którym, oprócz obiektu, występuje człon proporcjonalny P, o wzmocnieniu k_P . Transmitancja układu otwartego jest następująca:

$$G_o(s) = G_1(s)k_P = \frac{2k_P}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2k_P}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2},$$

co daje następującą transmitancję układu zamkniętego:

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{2k_P}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2(1 + k_P)}$$

Granica stabilności tego układu jest wyznaczona przez równanie charakterystyczne:

$$s^3 + 4s^2 + 5s + 2(1 + k_P) = 0$$

Budujemy tablicę Routha:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 4 & 2(1+k_P) \\ s & \frac{2(1+k_P)-20}{-4} & \\ 1 & 2(1+k_P) & \end{array}$$

skąd obszar stabilności jest wyznaczony przez dwa warunki określone przez wartości współczynników w trzecim i czwartym wierszu:

$$\frac{2(1+k_P)-20}{-4} > 0 \text{ oraz } 2(1+k_P) > 0.$$

Pierwszy z nich prowadzi do wartości granicznej: $\frac{2(1+k_P)-20}{-4}=0$, $k_P = k_{Pmax} = 9$, natomiast

drugi daje ograniczenie wartości współczynnika k_P od dołu: $k_P > -1$.

Równanie charakterystyczne przy wzmacnieniu granicznym k_{Pmax} jest więc następujące:

$$s^3 + 4s^2 + 5s + 20 = 0.$$

W celu określenia granicznej częstotliwości przechodzimy do postaci widmowej ($s = j\omega$) i w kolejnych krokach obliczamy rzeczywistą pulsację:

$$-j\omega^3 - 4\omega^2 + j5\omega + 20 = 0, \quad j\omega(5 - \omega^2) + 4(5 - \omega^2) = 0 \text{ oraz:}$$

$$(5 - \omega^2)(4 + j\omega) = 0$$

Oscylacje występują dla rzeczywistej wartości $\omega = \sqrt{5}$. Okres tych oscylacji można określić z zależności:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{5}, \text{ skąd: } T = T_{max} = 2\pi / \sqrt{5}.$$

Na podstawie Tabeli 9.4 (prawa część) obliczamy nastawienia regulatora PID:

$$k_P = k_{Pmax}/1,7 = 9/1,7 = 5,29$$

$$T_I = T_{max}/2 = \pi / \sqrt{5} = 1,405$$

$$T_D = T_{max}/8 = \pi / (4\sqrt{5}) = 2\pi/8 = 0,351$$

W podobny sposób można otrzymać nastawienia regulatorów P oraz PI. Odpowiedzi jednostkowe układu z tymi regulatorami są pokazane na rys. 9.47.

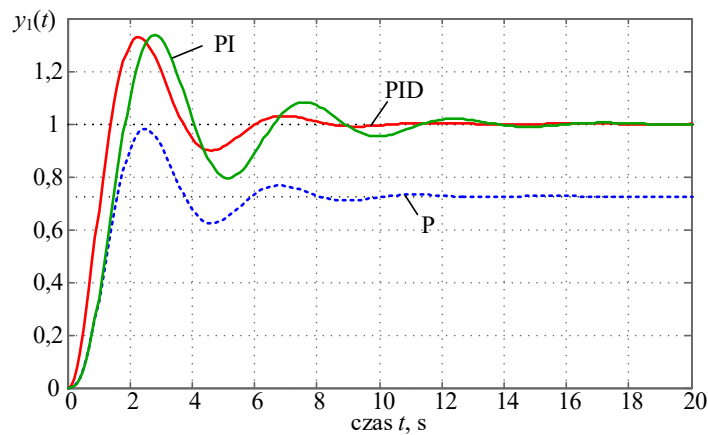
Do obliczenia nastawień regulatorów i rysowania przebiegów można posłużyć się programem MATLAB:

```
% Przykład 9.9: Regulator PID, odpowiedź częstotliwościowa, stabilność
close all; clear all;
G1=tf(2,[1 4 5 2]);
kmax=9/1.7;
Tmax=2*pi/sqrt(5);
%P
kd=kmax/2;
G_c=feedback(kd*G1,1);
step(G_c,0:0.1:20);
hold on;
%PI
s=tf('s');
kd=kmax/2.2;
Ti=Tmax/1.2;
```

```

Gc=kd*(1+1/Ti/s);
G_c=feedback(G1*Gc,1);
step(G_c,0:0.1:20)
hold on;
%PID
al=0.1;
kd=kmax/1.7;
Ti=Tmax/2;
Td=Tmax/8;
Gc=kd*(1+1/Ti/s+Td*s/(1+Td*al*s));
G_c=feedback(G1*Gc,1);
step(G_c,0:0.1:20);
grid;

```



Rys. 9.47. Odpowiedzi na skok jednostkowy układu dla trzech regulatorów uzyskanych z testu odpowiedzi częstotliwościowej

Człon różniczkujący w regulatorze PID jest realizowany zgodnie z zależnością (9.55).

Widać, że regulator PID nastawiony zgodnie z regułami Zieglera-Nicholsa prowadzi do szybkiego ustalania się odpowiedzi układu (rys. 9.47). Niestety, odbywa się to kosztem znacznego przeregulowania – ponad 25%.

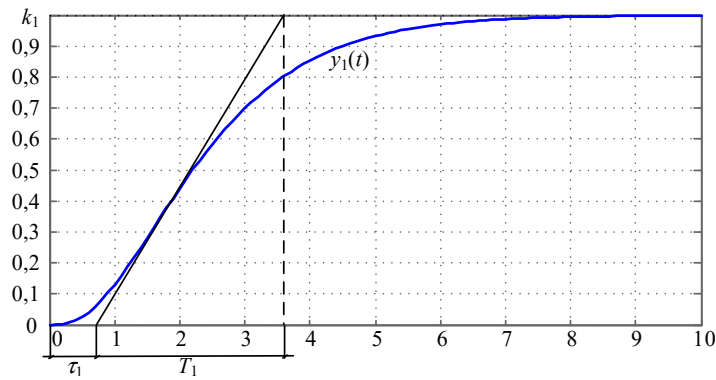
Inny sposób określania nastawień regulatorów PID polega na założeniu, że obiekt może być reprezentowany za pomocą transmitancji (9.61). Parametry tego modelu należy określić na podstawie odpowiedzi obiektu na skok jednostkowy. Na podstawie przeprowadzonej próby otrzymujemy (rys. 9.48):

$$k_1 = 1, \quad \tau_1 = 0,68\text{s}, \quad T_1 = 2,72\text{s},$$

$$\text{skąd: } b = 1 \cdot 0,68 / 2,72 = 0,25.$$

Nastawienia regulatora PID obliczamy na podstawie Tabeli 9.4:

$$k_P = 1,2/b = 1,2T_1/(k_1 \tau_1) = 4,8, \quad T_I = 2 \tau_1 = 2 \cdot 0,68 = 1,36, \quad T_D = 0,5 \tau_1 = 0,5 \cdot 0,68 = 0,34.$$



Rys. 9.48. Odpowiedź obiektu na skok jednostkowy

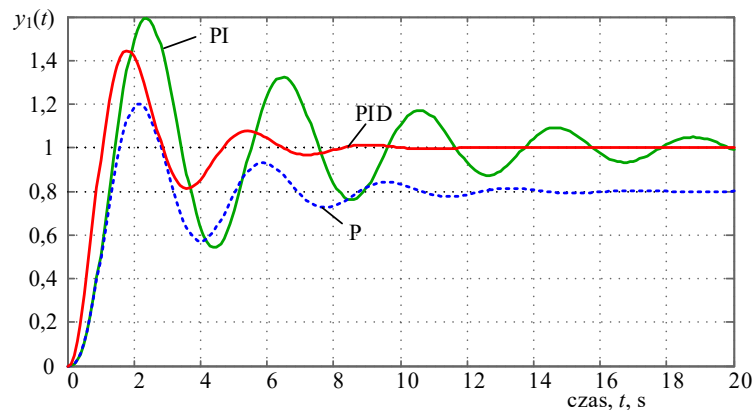
Podobne obliczenia można wykonać dla regulatorów P oraz PI. Odpowiedzi na skok jednostkowy rozpatrywanego układu z regulatorami nastawionymi według metody Zieglera-Nicholsa na podstawie testu odpowiedzi na skok jednostkowy są pokazane na rys. 9.49.

Można zauważyć, że parametry dynamiczne tych odpowiedzi są nieco gorsze od tych, uzyskanych na podstawie testu odpowiedzi częstotliwościowej (rys. 9.47). Wpływ na dokładność obliczanych nastawień ma duża swoboda w określaniu parametrów odpowiedzi na skok jednostkowy (rys. 9.48).

W przypadku, gdy obiekt ma charakter astatyczny (zero w mianowniku transmitancji, obiekt klasy $m > 0$), można go reprezentować za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} e^{-s\tau_1}, \quad (9.64)$$

gdzie: $k_1 > 0$, $T_1 > 0$, $\tau_1 > 0$.



Rys. 9.49. Odpowiedzi na skok jednostkowy układu dla trzech regulatorów uzyskanych z testu odpowiedzi na skok jednostkowy

Ponieważ statyczny błąd położenia układu zamkniętego będzie w tym przypadku zerowy, to w dobieranym regulatorze można pominąć człon całkujący I. W rezultacie nastawienia regulatora PD można określić na podstawie odpowiedzi na skok jednostkowy samego obiektu, zgodnie z następującymi zależnościami [64]:

$$k_p = \frac{2}{3k_1\tau_1}, \quad T_D = T_1 \quad (9.65)$$

Można także w tym celu stosować zasady przyjęte przy doborze korektora przyspieszającego [37].

Przykład 9.10. W badanym układzie obiekt jest określony za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(3s+1)}$$

Dobrać rodzaj regulatora i określić jego parametry. Przeprowadzić analizę otrzymanego układu regulacji.

Widać, że układ jest klasy pierwszej (pojedynczy biegun zerowy), więc w regulatorze nie ma potrzeby umieszczania członu całkującego I. Nastawienia regulatora PD można określić zgodnie z (9.65). Wymagane są następujące parametry modelu (9.64): k_1 , T_1 oraz τ_1 . Bezpośrednie wyznaczenie tych parametrów na podstawie odpowiedzi na skok jednostkowy nie jest możliwe, gdyż w układzie astatycznym te wielkości są ze sobą powiązane.

Jedną z możliwych dróg jest usunięcie zerowego bieguna z transmitancji obiektu przez włączenie w szereg z nim modułu różniczkującego. W ten sposób, transmitancja obiektu przekształci się do następującej postaci:

$$G_{10}(s) = \frac{s}{\alpha s + 1} \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} e^{-s\tau_1} \approx \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-s\tau_1}, \quad \alpha = 0,04.$$

Odpowiedź na skok jednostkowy tak zmodyfikowanego obiektu jest pokazana na rys. 9.50.

Z rysunku można odczytać poszukiwane parametry:

$k_1 = 1,0$, $T_1 = 3,06$, oraz $\tau_1 = 1,0$.

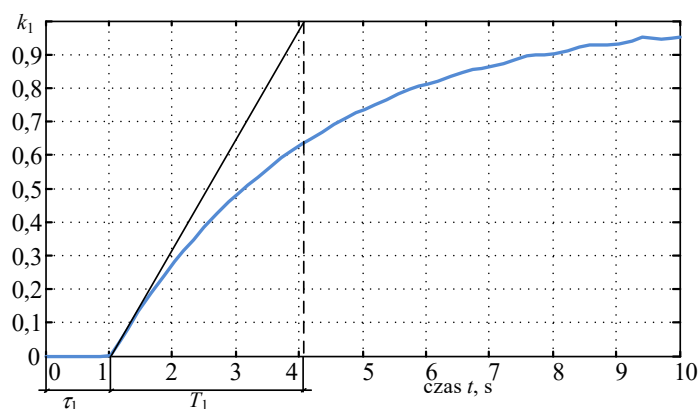
Można także zauważyć, że z upływem czasu w przebiegu pojawiają się odkształcenia, co jest wynikiem ich wzmocnienia w dodanym członie różniczkującym. W stanie początkowym odpowiedzi efekt ten jest nieznaczny i nie wpływa na ustalenie wartości parametrów.

Na podstawie (9.65) obliczamy parametry regulatora PD:

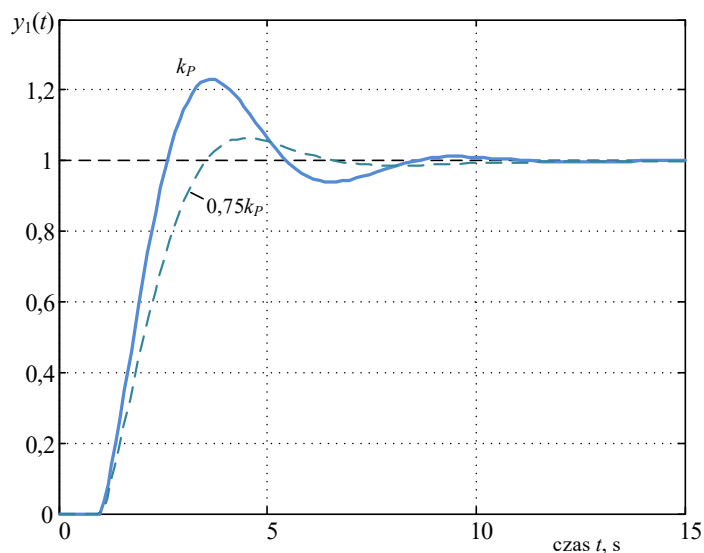
$$k_p = \frac{2}{3k_1\tau_1} = 0,667, \quad T_D = T_1 = 3,06.$$

Odpowiedzi układu regulacji na skok jednostkowy dla dwóch różnych wartości współczynnika wzmocnienia k_p są pokazane na rys. 9.51.

Krzywa ciągła odpowiada regulatorowi z nastawieniami obliczonymi zgodnie z (9.65), natomiast krzywa przerywana została uzyskana po zmniejszeniu wartości współczynnika wzmocnienia k_p w stopniu 0,75. Widać, że nastąpiła znaczna redukcja przeregulowania, natomiast zwiększył się czas narastania.



Rys. 9.50. Odpowiedzi na skok jednostkowy układu



Rys. 9.51. Odpowiedź na skok jednostkowy układu regulacji

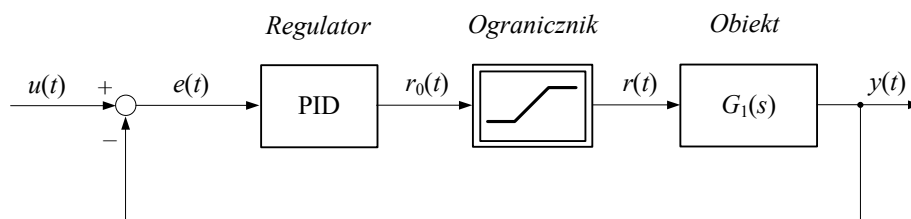
Metody Zieglera-Nicholsa są proste w zastosowaniu i w wielu przypadkach dają dobre przybliżenie dynamiki korygowanego systemu. Niestety, ta prostota nie spełnia bardziej wygórowanych wymagań. Dzieje tak dlatego, że tylko niewielka część informacji o projektowanym systemie jest wykorzystywana. Projektowany układ jest często nieodporny, co oznacza, że jest czuły na zmianę parametrów procesu oraz na zakłócenia.

Od czasu powstania pionierskiej metody Zieglera-Nicholsa powstało wiele nowych propozycji obliczania nastawień regulatorów PID [2, 51, 58]. Idą one w kierunku lepszego wykorzystania informacji zawartej w modelu procesu (obiektu). Zazwyczaj jednak, takie metody można stosować do węższej grupy rozważanych modeli.

9.5.4. Nasycenie regulatora

Rozpatrywane do tej pory zjawiska w układzie regulacji przebiegały przy założeniu liniowego charakteru jego poszczególnych elementów. Należy jednak zauważyć, że sygnał sterujący, podawany z regulatora na obiekt regulacji, nie może przyjmować dowolnych wartości, które wynikają z algorytmu regulacji. Wynika to z ograniczeń technicznych, takich jak: dopuszczalna wartość napięcia, prądu, ciśnienia, prędkości, temperatury i innych wielkości fizycznych, które w układzie regulacji reprezentują wielkość sterującą. Ograniczniki (dyskryminatory) są nieliniowymi blokami, które mogą wystąpić w różnych miejscach układu sterowania.

Klasyczna struktura układu sterowania z ogranicznikiem jest pokazana na rys. 9.52. Dolne i górne ograniczenie sygnału sterującego prowadzi do jego „nasycenia”, co powoduje degradację układu regulacji, gdyż pomimo zmiany sygnału wyjściowego regulatora $r_0(t)$ (powyżej lub poniżej wielkości granicznej), zmiana nie jest przekazywana do obiektu. Ograniczniki mogą także występować wewnątrz regulatora, gdy należy chronić jego elementy przed uszkodzeniem. Ograniczenie może dotyczyć bieżącej wartości sygnału lub innych jego parametrów, jak np. szybkość narastania.



Rys. 9.52. Podstawowy układ sterowania z ogranicznikiem

W przypadku nasycenia sygnału wyjściowego regulatora traci on zdolność oddziaływania na proces, pozostając w jednym ze skrajnych wartości dyskryminatora (r_{min} lub r_{maks}). W takim przypadku uchyb regulacji zmniejsza się znacznie wolniej, niż wynikałoby to z algorytmu regulacji, co jest wzmacniane przez człon całkujący regulatora, który długo ‘pamięta’ poprzedni stan.

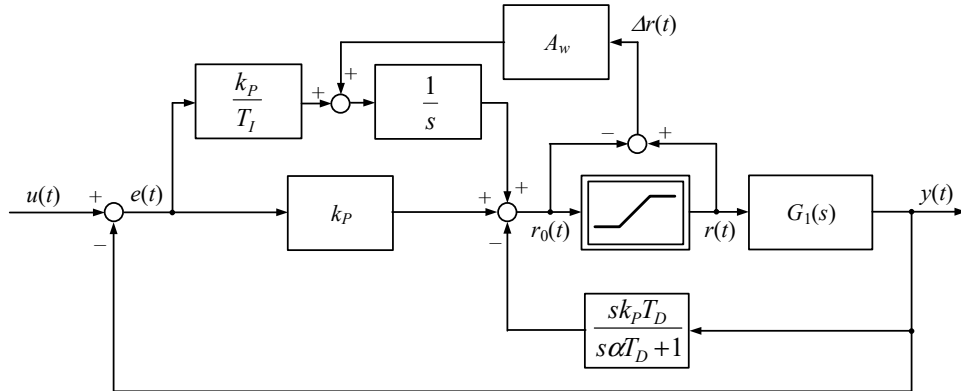
Nasycenie integratora (ang. *integrator windup*) objawia się w postaci dużych prze-regulowań i długich czasów ustalania, widocznych w odpowiedziach czasowych układu regulacji. Zjawisko to obserwuje się zazwyczaj podczas startu układu lub dużej zmiany wielkości zadanej, gdy występuje znaczna zmiana uchybu regulacji. Przytoczony termin angielski (*windup - nakręcić*) nawiązuje do całkowicie ściśniętej sprężyny, która w tym stanie traci swoje właściwości dynamiczne. Powrót do normalnego stanu wymaga redukcji ściskającej siły. Zjawisko to występuje w członie całkującym, gdy duży sygnał wymuszający (co objawia się jako składowa stała lub o długim okresie oscylacji) powoduje wystąpienie także dużego wyjściowego sygnału regulatora

(nasylenie). Odwrócenie tej tendencji jest niemożliwe w krótkim odcinku czasu, co prowadzi do zaniku sterowania [49].

Profesjonalne regulatory PID są wyposażone w układy przeciwdziałające nasyceniu integratora. Ogólnie, ich działanie polega na detekcji wystąpienia nasycenia (lub zbliżania się do poziomu nasycenia) i blokowania na ten czas integratora [58].

Jedno ze stosowanych rozwiązań układu przeciwdziałającego nasyceniu jest pokazane na rys. 9.53. Stan nasycenia członu całkującego objawia się w postaci dużej różnicy wartości sygnałów na obu końcach dyskryminatora (sygnał $\Delta r(t)$). Jeśli, na przykład, zachodzi warunek nasycenia: $r_0(t) > r_{maks}$, to $r(t) = r_{maks}$ oraz: $\Delta r(t) = r_{maks} - r_0(t) < 0$. Ujemny sygnał $\Delta r(t)$, po przemnożeniu przez współczynnik A_w , zmniejsza efekt całkowania w członie I, eliminując nasycenie. Wartość tego współczynnika można oszacować według następującej zależności [2]:

$$A_w = 1/\sqrt{T_I T_D} \quad (9.66)$$



Rys. 9.53. Struktura układu sterowania z ogranicznikiem i schematem zapobiegającym nasyceniu

Zwróćmy uwagę, że regulator PID w układzie z rys. 9.53 ma inną strukturę niż w dotychczas rozważanych regulatorach. Nie jest to związane z problemem nasycenia się członu całkującego, a jedynie stanowi ilustrację takiego rozwiązania, gdy człon różniczkujący D jest bezpośrednio zasilany sygnałem wyjściowym. Jest ono stosowane wówczas, gdy uchyb $e(t)$ może zawierać szumy wysokiej częstotliwości lub pojedyncze skoki, które w tradycyjnej strukturze regulatora będą wzmacniane w wyniku różniczkowania. Transmitancja obiektu $G_1(s)$ ma zazwyczaj częstotliwościową charakterystykę dolnoprzepustową, dzięki czemu sygnał wyjściowy $y(t)$ jest w dużej mierze pozbawiony szumów.

Kolejny przykład ilustruje problem nasycenia integratora i jego eliminacji.

Przykład 9.11. Model obiektu w projektowanym układzie regulacji jest określony za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{0,1}{s(s+1)^2}$$

Stosując metodę Zieglera-Nicholsa według odpowiedzi częstotliwościowej, określić nastawienia regulatora PID. Przeprowadzić analizę otrzymanego układu regulacji.

Do ochrony obiektu na wyjściu regulatora umieszczony został ogranicznik o następujących parametrach: $r_{maks} = 1,2$, $r_{min} = -1,2$. Zaprojektować układ do eliminacji nasycenia integratora. Zbadać zachowanie się układu regulacji z ogranicznikiem oraz układem eliminującym nasycenie.

Widać, że układ jest klasy pierwszej (zerowy biegun), więc parametry regulatora nie można określić za pomocą odpowiedzi na skok jednostkowy. Stosujemy więc test badania stabilności układu zamkniętego z działaniem proporcjonalnym P. Postępujemy podobnie jak w przykładzie 9.9.

Transmitancja układu otwartego jest następująca:

$$G_o(s) = G_1(s)k_P = \frac{0,1k_P}{s(s+1)^2} = \frac{0,1k_P}{s^3 + 2s^2 + s}$$

Zastępcza transmitancja układu zamkniętego jest następująca:

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{0,1k_P}{s^3 + 2s^2 + s + 0,1k_P}$$

Granica stabilności tego układu jest wyznaczona przez równanie charakterystyczne:

$$s^3 + 2s^2 + s + 0,1k_P = 0$$

Budujemy tablicę Routha:

s^3	1	1
s^2	2	$0,1k_P$
s	$\frac{0,1k_P - 2}{-2}$	
1	$0,1k_P$	

skąd granica stabilności jest określona z warunków:

$$\frac{0,1k_P - 2}{-2} = 0, k_P = k_{pmax} = 20 \text{ oraz } 0,1k_P > 0 \text{ (co daje oczywiste ograniczenie: } k_P > 0 \text{)}.$$

Równanie charakterystyczne dla wzmocnienia $k_{pmax} = 20$:

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0.$$

W celu określenia granicznej częstotliwości przechodzimy do postaci widmowej ($s = j\omega$) i w kolejnych krokach obliczamy rzeczywistą pulsację:

$$-j\omega^3 - 2\omega^2 + j\omega + 2 = 0$$

$$j\omega(1 - \omega^2) + 2(1 - \omega^2) = 0$$

$$(1 - \omega^2)(2 + j\omega) = 0$$

Oscylacje występują dla $\omega = 1$. Okres tych oscylacji można określić z zależności:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ skąd: } T = T_{\max} = 2\pi.$$

Na podstawie Tabeli 9.4 (prawa część) obliczamy nastawienia regulatora PID:

$$k_P = k_{P\max}/1,7 = 20/1,7 = 11,76$$

$$T_I = T_{\max}/2 = 2\pi/2 = 3,14$$

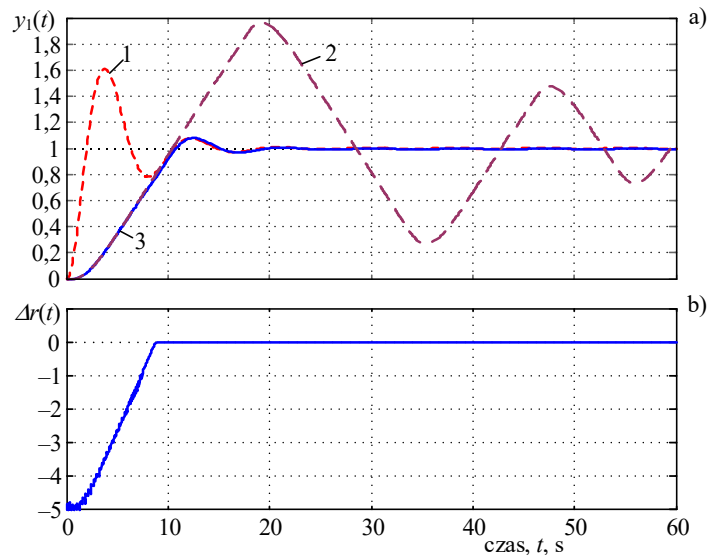
$$T_D = T_{\max}/8 = 2\pi/8 = 0,785$$

W podobny sposób można otrzymać nastawienia regulatorów P oraz PI. Odpowiedź jednostkowa układu z regulatorem PID jest pokazana na rys. 9.54, krzywa 1. Widać, że występuje znaczne przeregulowanie, przekraczające 60%.

W celu ochrony obiektu na wyjściu regulatora został umieszczony ogranicznik z zadanymi granicznymi wartościami. Model tego układu regulacji został opracowany w programie SIMULINK (rys. 9.55). Struktura modelu jest zgodna z rys. 9.53. Układ blokujący nasycenie integratora jest sterowany przez blok wzmacniacza ustawianego za pomocą współczynnika A_w . W celu odstawienia blokowania nasycenia można przyjąć: $A_w = 0$. W takim przypadku uzyskamy odpowiedź na skok jednostkowy jak na rys. 9.54, krzywa 2. Można zauważyć, że w przedziałach nasycenia kontynuowane jest całkowanie, co objawia się prostymi odcinkami odpowiedzi o niemal stałym nachyleniu. Kierunek tego nachylenia zależy od znaku nasycenia: narastanie odpowiada osiągnięciu górnej granicy, a opadanie – dolnej granicy komparatora. Jak widać, w przedziałach nasycenia proces nie jest sterowany.

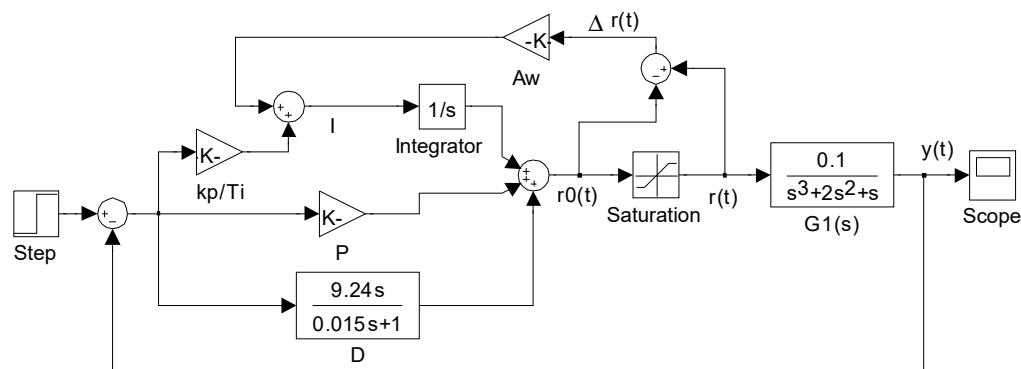
Aby uniknąć nasycenia w modelu z rys. 9.55, uaktywniany jest układ blokowania nasycenia. Współczynnik A_w w obwodzie sterowania integratorem obliczamy zgodnie z (9.66):

$$A_w = 1/\sqrt{T_I T_D} = 0,637.$$



Rys. 9.54. Odpowiedzi na skok jednostkowy układu (a): 1 – regulator PID bez ogranicznika; 2 – regulator z ogranicznikiem; 3 – regulator z ogranicznikiem i układem odblokowującym nasycenie integratora; przebieg sygnału $\Delta r(t)$ (b)

W rezultacie układ regulacji z ogranicznikiem i obwodem blokującym nasycenie integratora wykazuje się zupełnie innymi właściwościami. Krzywa 3 na rys. 9.54a) pokazuje przebieg odpowiedzi tego układu na skok jednostkowy. Sposób narastania odpowiedzi układu z blokadą nasycenia jest w pierwszej części taki sam, jak w układzie bez eliminacji nasycenia. Z powodu dużego uchybu na początku procesu regulacji działanie członu I jest ograniczone przez górną wartość komparatora (nasycenie). Trwa to ok. 9s (rys. 9.54b). Po zbliżeniu się odpowiedzi do wartości zadanej (mała wartość uchybu) zmniejsza się także wartość sygnału na wyjściu regulatora. Stan ten jest wykrywany przez układ blokady nasycenia (zerowa wartość sygnału $\Delta r(t)$), co powoduje odblokowanie integratora: regulator funkcjonuje według normalnych zasad.



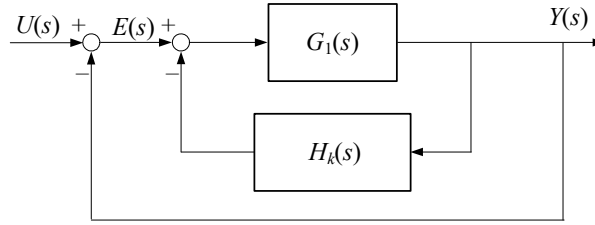
Rys. 9.55. Schemat modelu układu regulacji PID w programie SIMULINK

Jeśli sygnał sterujący $r_0(t)$ utrzymuje się w przedziale wyznaczonym przez obie granice komparatora, regulacja odbywa się, jak w układzie liniowym. Na rys. 9.54, krzywa 1, widać także, że usunięcie ogranicznika powoduje przyspieszenie procesu regulacji, jednak duże przeregulowanie może być niedopuszczalne dla obiektu.

W układzie regulacji, uzyskanym w przykładzie 9.11, człon różniczkujący w regulatorze PID jest realizowany zgodnie z (9.55) i jest zasilany sygnałem uchybu – jak w klasycznym schemacie. Takie rozwiązanie prowadzi jednak do pojawienia się bardzo dużej wartości pochodnej w przypadku dużej zmiany uchybu (w tym krótkim czasie rośnie także sygnał $\Delta r(t)$, co jednak pominięto na rys. 9.54b aby pokazać szczegóły sygnału sterującego). Ten duży skok sygnału na wyjściu członu D może być niebezpieczny dla trwałości konstrukcji regulatora. Z tego powodu, w praktycznych realizacjach, człon różniczkujący jest zasilany sygnałem wyjściowym $y(t)$ (rys. 9.53). Nie zmienia to algorytmu regulacji.

9.6. Korekcja w sprzężeniu zwrotnym

Zasada korekcji układu regulacji poprzez sprzężenie zwrotne odnosi się do modyfikacji transmitancji obiektu przez objęcie go pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego z adekwatną transmitancją $H_k(s)$ (rys. 9.56).



Rys. 9.56. Zasada korekcji w sprzężeniu zwrotnym

Jak widać, tego rodzaju korekcja zmienia transmitancję układu w torze głównym, co może mieć także wpływ na wartość uchybu $e(t)$. Człon $H_k(s)$ w sprzężeniu wybiera się zazwyczaj o charakterze różniczkującym, co powoduje efekt całkowania w układzie zamkniętym (patrz przykład 4.5). To zwiększa tłumienie całego układu i polepsza jego stabilność.

Przykład 9.12. Zbadać wpływ korektora o transmitancji (rys. 9.56):

$$H_k(s) = k_k s,$$

na właściwości układu ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym, w którym proces jest określony następującą transmitancją:

$$G_1(s) = \frac{k_1}{s(sT_1 + 1)}.$$

Podana transmitancja korektora jest typowa dla tachometru, który służy do pomiaru prędkości obrotowej lub przesunięcia układu mechanicznego: wyjściowy sygnał elektryczny jest proporcjonalny do pochodnej przesunięcia (prędkości).

Przed korekcją zastępcza transmitancja układu zamkniętego jest następująca:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} = \frac{k_1}{s^2 T_1 + s + k_1} = \frac{1}{s^2 \frac{T_1}{k_1} + \frac{1}{k_1} s + 1} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{1}{\omega_n} s + 1}.$$

Łatwo można określić pulsację drgań własnych i współczynnik tłumienia tego układu:

$$\frac{k_1}{T_1} = \omega_n^2, \text{ skąd: } \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{T_1}},$$

$$2\zeta \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{k_1}, \text{ skąd: } \zeta = \frac{\omega_n}{2k_1} = \frac{1}{2\sqrt{T_1 k_1}}.$$

Po zastosowaniu korekcji w sprzężeniu zwrotnym (rys. 9.56) zastępcza transmitancja obiektu jest następująca:

$$G_{ik}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H_k(s)} = \frac{\frac{k_1}{s^2 T_1 + s}}{1 + \frac{k_1}{s^2 T_1 + s} k_k s} = \frac{k_1}{s(sT_1 + 1) + k_1 k_k s}$$

Transmitancja zamkniętego układu po korekcji jest następująca:

$$G_k(s) = \frac{G_{1k}(s)}{1 + G_{1k}(s)} = \frac{k_1}{s^2 T_1 + s(1 + k_1 k_k) + k_1} = \frac{1}{s^2 \frac{T_1}{k_1} + s \frac{(1 + k_1 k_k)}{k_1} + 1}$$

Można zauważyć, że pulsacja własna układu nie ulega zmianie:

$$\frac{k_1}{T_1} = \omega_{nk}^2 = \omega_n^2, \text{ natomiast współczynnik tłumienia:}$$

$$2\zeta \frac{1}{\omega_{nk}} = \frac{1}{k_1} (1 + k_1 k_k).$$

Podstawiając z poprzedniej analizy: $2\zeta \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{k_1}$, otrzymamy relację pomiędzy współczynnikami tłumienia przed- i po korekcji:

$$2\zeta_k \frac{1}{\omega_{nk}} = 2\zeta \frac{1}{\omega_n} (1 + k_1 k_k), \text{ skąd: } \zeta_k = \zeta (1 + k_1 k_k).$$

Widać, że współczynnik tłumienia po zastosowaniu podanej korekcji w sprzężeniu zwrotnym zwiększa się $(1 + k_1 k_k)$ razy. Dzięki temu, można zmieniać przeregulowanie (p. 4.3.3):

$$y_p = 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \text{ oraz czas narastania: } t_{n2\%} = \frac{4}{\zeta\omega_n}.$$

Badając uchyb układu po korekcji (9.1):

$$E_k(s) = \frac{U(s)}{1 + G_{1k}(s)},$$

widać, że także on podlega modyfikacji. Jej charakter zależy od rodzaju transmitancji układu w torze sprzężenia zwrotnego $H_k(s)$.

W analizowanym przypadku korekcyjna transmitancja członu w sprzężeniu zwrotnym jest rezultatem zastosowania odpowiedniego czujnika pomiarowego (tachometru). Pożądany efekt korekcyjny nie wymaga więc użycia oddzielnego członu. Jak widać z rys. 9.56, czujnik pomiarowy w głównym sprzężeniu zwrotnym powinien mieć charakterystykę proporcjonalną.

9.7. Korekcja addytywna

Korekcja addytywna polega na dodaniu do istniejącego układu regulacji dodatkowego wymuszenia pochodzącego od odwrotnego modelu procesu (rys. 9.5d). W rezultacie występuje zmiana warunków regulacji podczas trwania procesu. Jeśli transmitancja procesu $G_1(s)$ jest znana, to transmitancja dodanego członu jest określana z warunku:

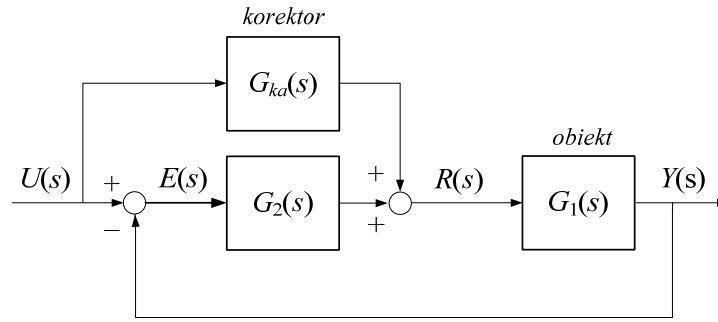
$$G_{ka}(s) \approx \frac{1}{G_1(s)} \quad (9.67)$$

Przybliżona wartość relacji (9.67) wynika stąd, że uzyskanie dokładnie odwrotnej transmitancji jest zazwyczaj niemożliwe.

W celu uzasadnienia poprawności korekcji addytywnej rozpatrzmy schemat jak na rys. 9.57. Przed wprowadzeniem członu korekcyjnego o transmitancji $G_{ka}(s)$, układ regulacji zawiera w torze głównym dwa człony $G_1(s)$ oraz $G_2(s)$. Ten ostatni reprezentuje jakiś standardowy korektor (regulator).

Transmitancja układu zamkniętego przed korekcją addytywną jest następująca:

$$G_n(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}, \quad (9.68)$$



Rys. 9.57. Zasada korekcji addytywnej

natomiast transformata uchybu:

$$E_n(s) = U(s) \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (9.69)$$

Celem wprowadzenia korekcji addytywnej jest uzyskanie jak najmniejszego uchybu.

Transmitancję $G_k(s)$ układu skorygowanego można określić z zależności wyznaczającej transformatę wyjścia:

$Y(s) = ((U(s) - Y(s))G_2(s) + U(s)G_{ka}(s))G_1(s)$, skąd, po rozdzieleniu zmiennych wejściowych i wyjściowych, uzyskujemy:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_1(s)G_{ka}(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (9.70)$$

Zauważmy, że po spełnieniu warunku (9.67) transmitancja ta przyjmuje wartość: $G_k(s) \approx 1$. Łatwo sprawdzić, że wówczas uchyb (dynamiczny) ma wartość bliską zero:

$$E_k(s) = U(s) - Y(s) \approx 0.$$

W ogólnym przypadku transformata uchybowa jest następująca:

$$E_k(s) = U(s) - Y(s) = U(s) \frac{1 - G_1(s)G_{ka}(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}, \quad (9.71)$$

gdzie

$$G_u(s) = \frac{U(s) - Y(s)}{U(s)} = \frac{1 - G_1(s)G_{ka}(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}, \quad (9.72)$$

jest transmitancją uchybową układu z korekcją addytywną. Amplituda tej transmitancji zmierza do zera, gdy spełniony jest warunek idealnej korekcji (9.67).

Działanie dodatkowe z użyciem bloku $G_{ka}(s)$ może być uruchamiane tylko podczas określonych sytuacji, na przykład podczas startu systemu lub przy dużych zmianach wartości zadanej. W normalnych stanach pracy właściwą regulację zapewnia korektor o transmitancji $G_2(s)$.

Przykład 9.13. Dobrać korektor addytywny do układu regulacji z obiektem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{2}{s(0,5s+1)}, \text{ bez regulatora: } G_2(s) = 1.$$

Idealna transmitancja członu korekcyjnego jest następująca:

$$G_{kai}(s) = \frac{1}{G_1(s)} = 0,5s(0,5s+1)$$

Ta transmitancja może być przybliżona realizowalną transmitancją o postaci:

$$G_{ka}(s) = \frac{s}{2(0,25s+1)}$$

Jest to transmitancja rzeczywistego układu różniczkującego, co intuicyjnie odpowiada odwrotności rzeczywistego układu całkującego, który przedstawia transformatę obiektu $G_1(s)$.

Zgodnie z (9.70), transmitancja skorygowanego układu jest następująca:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_1(s)G_{ka}(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{1,5s+2}{0,125s^3 + 0,75s^2 + 1,5s+2}$$

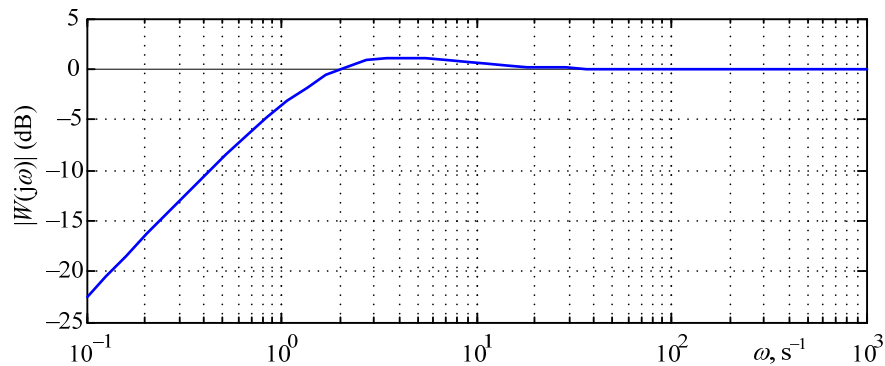
Dzieląc transformaty uchybowe układu skorygowanego (9.71) i układu bez korekcji (9.69), otrzymamy względną transmitancję uchybową:

$$W(s) = \frac{E_k(s)}{E_n(s)} = \frac{G_u(s)}{G_{un}(s)} = \frac{\frac{1 - G_1(s)G_{ka}(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}}{1} = 1 - G_1(s)G_{ka}(s) = \frac{0,125s^2 + 0,75s}{0,125s^2 + 0,75s + 1}$$

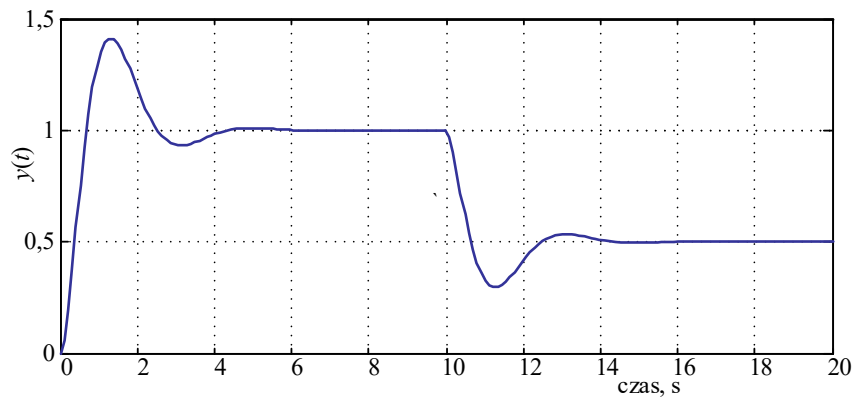
co można zapisać w postaci iloczynowej: $W(s) = \frac{0,75s(0,167s+1)}{(0,5s+1)(0,125s+1)}$.

Na rys. 9.58 jest pokazana częstotliwościowa charakterystyka amplitudy tej wielkości. Widać, że niskie częstotliwości w skorygowanym układzie są skutecznie tłumione, natomiast dla wysokich częstotliwości układ skorygowany odtwarza charakterystykę oryginalnego układu bez korekcji.

Odpowiedź układu z korekcją addytywną jest pokazana na rys. 9.59. Wymuszeniem jest skok jednostkowy (w pierwszej części rysunku), który następnie zmniejsza amplitudę dwukrotnie. Widać, że odpowiedź dosyć szybko się ustala: wzmocnienie statyczne jest równe 1.



Rys. 9.58. Logarytmiczna charakterystyka amplitudy



Rys. 9.59. Odpowiedź układu z korektorem na zmienne wymuszenie

Dalszą modyfikację układu, w celu zmniejszenia przeregulowania i skrócenia czasu ustalenia odpowiedzi, można uzyskać przez odpowiedni dobór członu $G_2(s)$ (rys. 9.57), który został tu przyjęty: $G_2(s) = 1$.

9.8. Korekcja predykcyjna

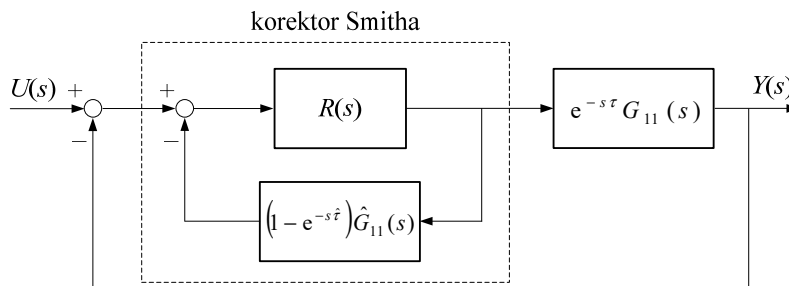
Korekcja predykcyjna jest stosowana w przypadku, gdy w transmitancji obiektu występuje opóźnienie, co często ma miejsce w procesach przemysłowych. Zapewnienie określonych wartości zapasu wzmocnienia w zamkniętym układzie regulacji jest wówczas utrudnione. Można wtedy stosować korekcję predykcyjną, której ogólny schemat jest pokazany na rys. 9.5f. Najbardziej znanym korektorem tego typu jest predyktor Smitha⁴² (rys. 9.60).

⁴² Otto J.M. Smith (1917 - 2009), amerykański profesor i inżynier elektronik.

Pierwotny układ regulacji zawiera obiekt o transmitancji:

$$G_1(s) = e^{-s\tau} G_{11}(s)$$

oraz regulator o znanej transmitancji $R(s)$. Załóżmy, że znana jest transmitancja obiektu, na podstawie której utworzony został człon korekcyjny w torze sprzężenia zwrotnego korektora:



Rys. 9.60. Układ regulacji z korektorem Smitha

$G_1(s) = e^{-s\tau} G_{11}(s)$, przy czym: $\hat{G}_{11}(s) = G_{11}(s)$, $\hat{\tau} = \tau$ (rys. 9.60).

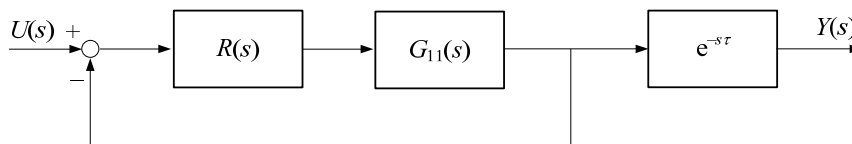
Transmitancja toru głównego (korektor wraz z obiektem) jest następująca:

$$G_{ks}(s) = \frac{e^{-s\tau} G_{11}(s) R(s)}{1 + (1 - e^{-s\hat{\tau}}) G_{11}(s) R(s)}, \quad (9.73)$$

skąd można określić transmitancję zastępczą układu z zewnętrzną pętlą sprzężenia zwrotnego:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_{ks}(s)}{1 + G_{ks}(s)} = \frac{G_{11}(s) R(s)}{1 + G_{11}(s) R(s)} e^{-s\tau} \quad (9.74)$$

Jak widać, transmitancja układu z rys. 9.60 może być rozłożona na dwa czynniki, z których jeden przedstawia układ regulacji z ujemną pętlą sprzężenia zwrotnego, a drugi – element opóźniający (rys. 9.61). Dzięki zastosowaniu omawianego korektora człon opóźniający został wyprowadzony poza pętlę sprzężenia zwrotnego, co eliminuje problemy związane ze stabilnością takiego układu. W ten sposób, z punktu widzenia stabilności rozważanego systemu, zastosowanie korektora (predyktora) Smitha do układu z opóźnieniem jest równoważne układowi, w którym nie występuje opóźnienie (rys. 9.61).



Rys. 9.61. Schemat zastępczy układu z korektorem Smitha

Transmitancja regulatora $R(s)$ nie ma więc wpływu na proces korekcji opóźnienia. Regulator należy zatem dobierać na podstawie żądanych charakterystyk tej części układu, która jest objęta pętlą sprzężenia zwrotnego bez elementu opóźniającego.

Podstawową niedogodnością w stosowaniu algorytmu Smitha jest konieczność dokładnej znajomości wartości opóźnienia występującego w modelu obiektu. Odchylenie od rzeczywistej wartości tego opóźnienia może prowadzić do dużych błędów. Ponadto zakłócenia w sygnale wejściowym są przenoszone na wyjście i mogą być nawet wzmacniane. W celu ograniczenia związanych z tym błędów stosowane są różne modyfikacje podstawowego korektora Smitha.

Przykład 9.14. Dobrać korektor Smitha do układu regulacji z obiektem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{e^{-2s}}{(5s+1)(3s+1)} = G_{11}(s)e^{-2s}.$$

W charakterze korektora układu z pominięciem opóźnienia proponowany jest regulator PD (rys. 9.61):

$$R(s) = K_p + K_D s.$$

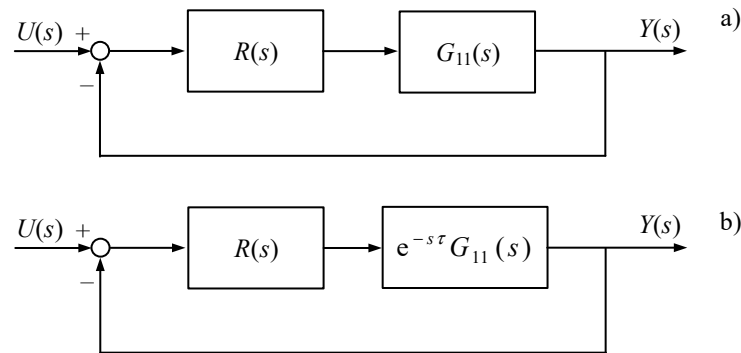
Transmitancja układu objętego sprzężeniem zwrotnym jest następująca (rys. 9.62a):

$$G(s) = \frac{K_p + K_D s}{15s^2 + (8 + K_D)s + K_p + 1} = \frac{K_p + K_D s}{s^2 + \frac{8 + K_D}{15}s + \frac{K_p + 1}{15}}$$

Jest to więc układ drugiego rzędu z transmitancją pierwszego rzędu w liczniku. Parametry K_p oraz K_D można dobrać przez analogię do układu oscylacyjnego, w którym mianownik transmitancji (funkcja charakterystyczna) jest następujący:

$$M(s) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

$$\text{A zatem: } \omega_0^2 = \frac{K_p + 1}{15}, \text{ skąd: } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_p + 1}{15}}.$$



Rys. 9.62. Schemat badanego układu: z pominięciem członu opóźniającego a); z członem opóźniającym, $\tau = 2$ b)

Z kolei: $2\zeta\omega_0 = \frac{8+K_D}{15}$.

Zakładając: $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, otrzymamy:

$$2\zeta\omega_0 = \frac{8+K_D}{15} = \sqrt{2 \frac{K_p+1}{15}}.$$

Otrzymujemy stąd relację pomiędzy obu poszukiwanymi współczynnikami:

$$K_D = \sqrt{30(K_p+1)} - 8.$$

Przyjęcie: $K_p = 100$, daje: $K_D = 47,045$ (duża wartość K_p jest uzasadniona dążeniem do zmniejszenia statycznego uchybu położenia).

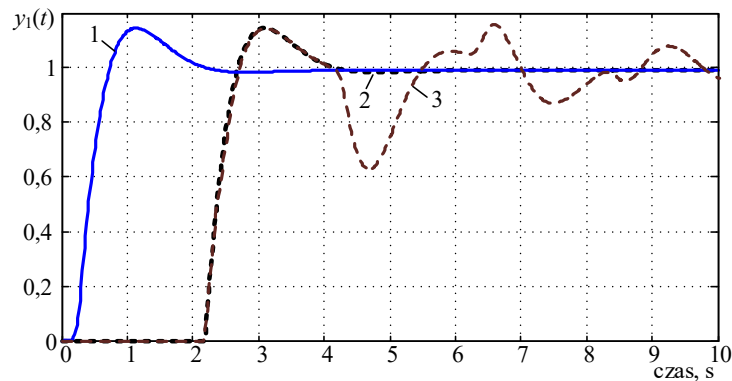
Przebieg odpowiedzi układu na skok jednostkowy jest pokazany na rys. 9.63, krzywa 1). Pełny schemat badanego układu jest pokazany na rys. 9.62b. Wprowadzenie opóźnienia o zadanej wartości $\tau = 2$ powoduje, że staje się on niestabilny.

Poprawnie zaprojektowany korektor Smitha eliminuje problem niestabilności, gdyż ekwiwalentny układ przybiera postać jak na rys. 9.61.

Przy założeniu że obiekt regulacji jest znany, można zaprojektować korektor, którego parametry odpowiednio pokrywają się z parametrami obiektu (rys. 9.60):

$$\hat{\tau} = \tau, \quad \hat{G}_{11}(s) = G_{11}(s).$$

Odpowiedź na skok jednostkowy układu z opóźnieniem i zaprojektowanym w ten sposób korektorem jest pokazana na rys. 9.63, krzywa 2. Kształt tej odpowiedzi jest taki sam, jak w przypadku układu bez opóźnienia, jedynie jest ona opóźniona o wartość $\hat{\tau} = \tau = 2$ s.



Rys. 9.63. Odpowiedzi na skok jednostkowy układu bez opóźnienia (1); z opóźnieniem i dokładną korekcją predykcyjną (2); z opóźnieniem i zwiększonym o 10% czasem opóźnienia w korektorze (3)

W przypadku, gdy parametry obiektu nie są dokładnie znane, należy oczekiwać odchylenia w przebiegu odpowiedzi od tego idealnego założenia. Na rys. 9.63, krzywa 3, pokazany jest przebieg odpowiedzi na skok jednostkowy, gdy w modelu korektora założono opóźnienie o 10% większe niż w obiekcie: $\hat{\tau} = 1,1\tau = 2,2$ s.

Widać istotne różnice w przebiegu tej odpowiedzi.

Powyżej jest przedstawiona podstawowa zasada korekcji predykcyjnej na przykładzie korektora Smitha. Jej główną zaletą jest wydzielenie członu opóźniającego z zamkniętej pętli regulacji. Znane są różne modyfikacje tej metody, które mają na celu osiągnięcie większej elastyczności korektora przy niedokładnej znajomości parametrów obiektu [51].

9.9. Regulacja z modelem wewnętrznym

Koncepcja regulacji z modelem wewnętrznym (RMW) (ang. *Internal Model Controller*, IMC) wywodzi się ze znanej zasady mówiącej, że jeśli znany jest dokładny model procesu, to możliwe jest jego sterowanie dokładne. Wystarczy w charakterze korektora o transmitancji $R(s)$ przyjąć (rys. 9.64):

$$R(s) = \left(\hat{G}_1(s) \right)^{-1}, \quad (9.75)$$

gdzie $\hat{G}_1(s)$ jest modelem procesu $G_1(s)$.

Sterowanie może się odbywać w układzie otwartym (rys. 9.64), gdyż pożądany sygnał wyjściowy jest równy wartości zadanej. Wówczas powinna zachodzić równość:

$$\hat{G}_1(s) = G_1(s), \quad (9.76)$$

gdzie $\hat{G}_1(s)$ jest modelem procesu $G_1(s)$.

Wiemy jednak, że w praktyce trudno zbliżyć się do równości (9.76). Ponadto układ z rys. 9.64 poddany jest zakłóceniom zewnętrznym, co jest źródłem dodatkowych błędów regulacji.



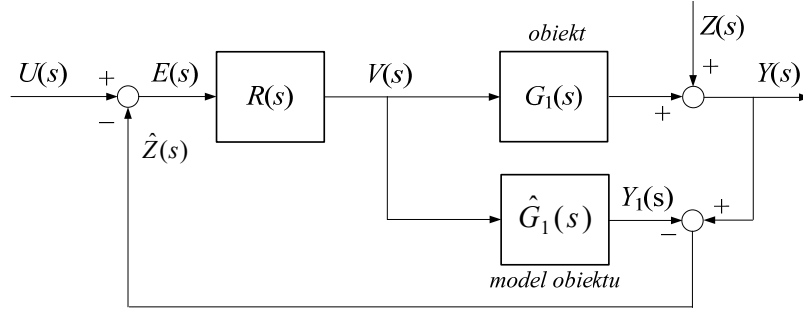
Rys. 9.64. Schemat otwartego układu sterowania

W celu kompensacji tych błędów proponuje się układ RMW o strukturze jak na rys. 9.65. Wielkość $Z(s)$ przedstawia transformatę zakłóceń, natomiast $\hat{Z}(s)$ jest jej estymatą, o czym można się przekonać na podstawie równania:

$$\hat{Z}(s) = Y(s) - Y_1(s) = G_1(s)V(s) + Z(s) - \hat{G}_1(s)V(s) \quad (9.77)$$

Łatwo zauważyć, że $\hat{Z}(s) = Z(s)$, gdy spełniona jest zależność (9.76). Sygnał $\hat{Z}(s)$ zawiera więc informację o niedopasowaniu modelu do obiektu (przy założeniu, że

zakłócenia $Z(s)$ są nieznaczne), co można wykorzystać do poprawy sterowania w takim przypadku (pętla sprzężenia zwrotnego na rys. 9.65).



Rys. 9.65. Schemat układu regulacji z modelem wewnętrznym

Sygnał sterujący $V(s)$ przyjmuje następującą wartość:

$$V(s) = (U(s) - \hat{Z}(s))R(s) = \left\{ U(s) - (G_1(s) - \hat{G}_1(s))V(s) - Z(s) \right\} R(s) \quad (9.78)$$

Podstawiając oczywistą zależność: $Y(s) = G_1(s)V(s) + Z(s)$ do (9.78), otrzymamy:

$$Y(s) = \frac{(U(s) - Z(s))R(s)G_1(s)}{1 + (G_1(s) - \hat{G}_1(s))R(s)} + Z(s) = \frac{R(s)G_1(s)U(s) + (1 - R(s)\hat{G}_1(s))Z(s)}{1 + (G_1(s) - \hat{G}_1(s))R(s)} \quad (9.79)$$

Prawa strona w (9.79) jest transmitancją układu RMW względem sygnału zadanego i zakłócenia. Wynikają stąd ważne właściwości tego układu:

- jeśli $R(s) = (\hat{G}_1(s))^{-1}$ oraz $G_1(s) = \hat{G}_1(s)$, to $Y(s) = R(s)G_1(s)U(s) = U(s)$, a więc sygnał zadany w pełni kontroluje wyjście;
- jeśli nawet drugi warunek nie jest spełniony: $G_1(s) \neq \hat{G}_1(s)$, to nadal sygnał wyjściowy nie zależy od zakłóceń.

Ponieważ rozbieżność pomiędzy modelem i obiektem zachodzi zazwyczaj w zakresie wysokich częstotliwości, więc w celu redukcji związanych z tym błędów często w szereg z regulatorem $R(s)$ dodawany jest filtr dolnoprzepustowy o transmitancji $G_f(s)$. Częstotliwość odcięcia tego filtra ustalana jest powyżej najwyższej częstotliwości związanej z dynamiką procesu.

Obecność w układzie RMW odwrotnej transmitancji, obliczanej zgodnie z (9.75), jest zazwyczaj źródłem niestabilności całego systemu lub jego nierealizowalności (problemy z przyczynowością układu, gdy stopień licznika transmitancji jest większy niż stopień mianownika). Dotyczy to zwłaszcza układów z opóźnieniem lub z dodatkowymi pierwiastkami mianownika transmitancji $R(s)$ (gdy takie zera występują w liczniku).

ku transmitancji $\hat{G}_1(s)$). Aby uniknąć tych problemów, należy zapisać transmitancję modelu w postaci iloczynu dwóch czynników, z których jeden można odwracać bez wspomnianych problemów:

$$\hat{G}_1(s) = \hat{G}_1^o(s) \hat{G}_1^n(s), \quad (9.80)$$

gdzie: $\hat{G}_1^o(s)$ jest czynnikiem ‘odwracalnym’, natomiast $\hat{G}_1^n(s)$ przedstawia czynnik ‘nieodwracalny’. Wskazane jest, aby wzmocnienie tej transmitancji w stanie ustalonym było równe 1.

Do dalszych etapów syntezy układu RMW pomija się czynnik ‘niesprzyjający’ odwracaniu, przyjmując:

$$\hat{G}_1(s) = \hat{G}_1^o(s) \quad (9.81)$$

Pominięcie czynnika $\hat{G}_1^n(s)$ w (9.81) zapewnia realizowalność i stabilność końcowego układu, a wynikające stąd błędy są redukowane przez dodanie filtra dolnoprzepustowego $G_f(s)$. W ten sposób transmitancja regulatora jest określana następująco:

$$R(s) = G_f(s) \left(\hat{G}_1(s) \right)^{-1} = G_f(s) \left(\hat{G}_1^o(s) \right)^{-1} \quad (9.82)$$

W charakterze filtra dolnoprzepustowego można wybrać prosty filtr o jednostkowym wzmocnieniu [51]:

$$G_f(s) = \frac{1}{(T_c s + 1)^r} \quad (9.83)$$

gdzie: r – rząd filtra (zazwyczaj r nie jest większe od 2); T_c – stała czasowa związana z częstotliwością odcięcia: $T_c = 1/f_c$.

Szczegóły projektowania takiego układu wyjaśnia kolejny przykład.

Przykład 9.15. Przeprowadzić syntezę układu RMW do sterowania obiektem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(5s+1)(3s+1)}, \quad \tau = 5s.$$

Porównać przebiegi odpowiedzi na skok jednostkowy przy założeniu, że:

- 1) spełniony jest warunek (9.76);
- 2) funkcja wykładnicza w modelu opóźnienia jest przybliżona wg aproksymacji Padé, natomiast zastosowany filtr odcinający jest rzędu $r = 1$;
- 3) jak w p. 2), z tym, że zastosowano filtr odcinający rzędu $r = 2$.

Wykonujemy kolejne założenia.

1) W pierwszym podejściu zakłada się, że model obiektu wiernie odwzorowuje sam obiekt, a więc:

$$\hat{G}_1(s) = G_1(s) = \frac{e^{-5s}}{(5s+1)(3s+1)}.$$

Transmitancję tę przedstawiamy w postaci iloczynu dwóch czynników:

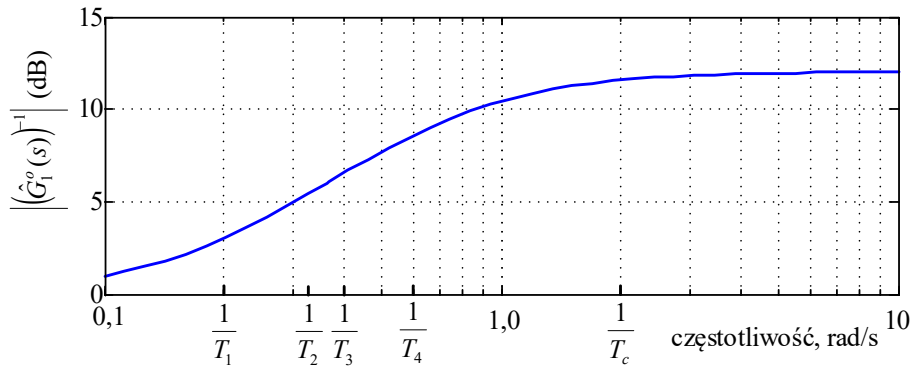
$$\hat{G}_1(s) = \frac{1}{(5s+1)(3s+1)} e^{-5s} = \hat{G}_1^o(s) \hat{G}_1^n(s), \text{ gdzie:}$$

$$\hat{G}_1^o(s) = \frac{1}{(5s+1)(3s+1)}, \quad \hat{G}_1^n(s) = e^{-5s}.$$

Zgodnie z (9.82), do obliczenia transformaty regulatora, należy określić transformatę filtru odcinającego i transformatę odwrotną: $(\hat{G}_1^o(s))^{-1}$. Tę ostatnią można w przybliżeniu określić następująco:

$$\left(\hat{G}_1^o(s)\right)^{-1} = \frac{(5s+1)(3s+1)}{(2,5s+1)(1,5s+1)} = \frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{(T_3s+1)(T_4s+1)}.$$

Występujące tu stałe czasowe wyznaczają ‘roboczy’ przedział częstotliwości, który jest związany z dynamiką układu (stałe czasowe czynników mianownika są dwa razy mniejsze niż w liczniku). Można to zaobserwować na logarytmicznej charakterystyce amplitudy transformaty $(\hat{G}_1^o(s))^{-1}$ (rys. 9.66).



Rys. 9.66. Charakterystyka amplitudowa członu $(\hat{G}_1^o(s))^{-1}$

Można zauważyć, że w paśmie wysokich częstotliwości występuje duże stałe wzmocnienie, co wzmacnia szumy i nie jest uzasadnione właściwościami dynamicznymi układu. Analizując ten wykres, można określić częstotliwość odcięcia filtru dolnoprzepustowego, która jest wyznaczona przez wartość $1/T_c = 2,0$, co daje następującą transformatę filtru:

$$G_f(s) = \frac{1}{(sT_c+1)^r} = \frac{1}{(0,5s+1)^r}.$$

Ostatecznie transformata regulatora ma następującą postać ($r = 1$):

$$R(s) = G_f(s) \left(\hat{G}_1(s) \right)^{-1} = \frac{(5s+1)(3s+1)}{(2,5s+1)(1,5s+1)(0,5s+1)}$$

Odpowiedź na skok jednostkowy uzyskanego układu jest pokazana na rys. 9.67, krzywa 1.

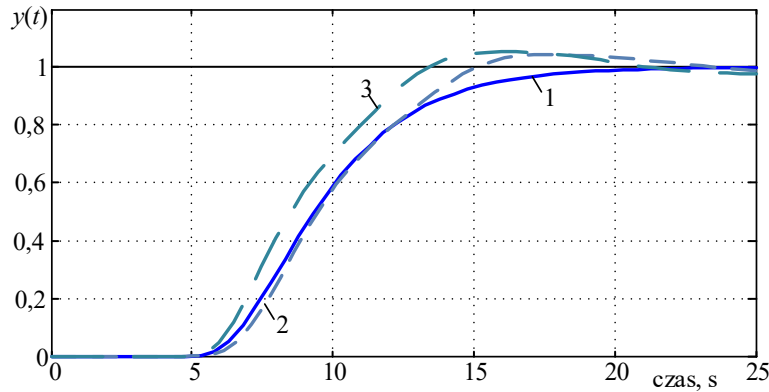
2) Jeśli opóźnienie w modelu obiektu będzie odwzorowane według aproksymacji Padé:

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s},$$

to transmitancja modelu przyjmie następującą formę:

$$\hat{G}_1(s) = \frac{1 - 2,5s}{(5s+1)(3s+1)(2,5s+1)} = \hat{G}_1^o(s) \hat{G}_1^n(s)$$

Czynnik w liczniku ma pierwiastek w prawej części płaszczyzny s , więc nie może być brany pod uwagę przy obliczaniu odwrotności tej transmitancji. A więc:



Rys. 9.67. Odpowiedź układu RMW na skok jednostkowy dla rozważanych przypadków: 1- model dokładnie odtwarza obiekt; 2 – opóźnienie jest odwzorowane wg aproksymacji Padé, 3 – zastosowano filtr 2-go rzędu

$$\hat{G}_1^o(s) = \frac{1 - 2,5s}{(5s+1)(3s+1)(2,5s+1)}, \quad \hat{G}_1^n(s) = 1 - 2,5s.$$

Macierz odwrotna może być aproksymowana według podobnej reguły, jak powyżej:

$$\left(\hat{G}_1^o(s) \right)^{-1} = \frac{(5s+1)(3s+1)(2,5s+1)}{(2,5s+1)(1,5s+1)(1,25s+1)} = \frac{(5s+1)(3s+1)}{(1,5s+1)(1,25s+1)}$$

Zakładając, że stosujemy ten sam filtr co w poprzednim przypadku, otrzymamy następującą transformatę regulatora:

$$R(s) = G_f(s) \left(\hat{G}_1(s) \right)^{-1} = \frac{(5s+1)(3s+1)}{(1,5s+1)(1,25s+1)(0,5s+1)}$$

Odpowiedź na skok jednostkowy tego układu przedstawia krzywa 2 na rys. 9.67.

3) Jeśli w poprzednim przypadku założyć, że filtr odcinający jest drugiego rzędu: $r = 2$, to transmitancja filtru będzie następująca:

$$G_f(s) = \frac{1}{(0,5s + 1)^2}$$

Prowadzi to do odpowiedniej zmiany transmitancji regulatora:

$$R(s) = G_f(s) \left(\hat{G}_1(s) \right)^{-1} = \frac{(5s + 1)(3s + 1)}{(1,5s + 1)(1,25s + 1)(0,5s + 1)^2}$$

Odpowiedź uzyskanego układu RMW na skok jednostkowy jest pokazana na rys 9.67, krzywa 3. Wszystkie rozpatrywane układy poprawnie identyfikują opóźnienie występujące w obiekcie. W przypadku, gdy model niedokładnie odwzorowuje obiekt, w stanie przejściowym odpowiedzi pojawiają się niewielkie zanikające oscylacje, co zwiększa czas ustalenia się odpowiedzi. Rząd filtru odcinającego ma w tym przypadku niewielki wpływ na przebieg odpowiedzi.

9.10. Uwagi końcowe

Powyższy przegląd klasycznych metod regulacji w jednowejściowych/jednowyjściowych (*SISO*) liniowych systemach ciągłych pozwala ocenić obszar stosowania poszczególnych korektorów. Można tu sformułować następujące uwagi:

- Korekcja szeregową (w oparciu o korektory oraz regulatory PID) jest podstawowym sposobem formowania pożądanej zastępczej transmitancji rozpatrywanych układów regulacji. Zakres jej stosowania jest jednak ograniczony do małej wartości opóźnienia, co można określić za pomocą następującej relacji (rys. 9.45):

$$0,1 < \tau_1 / T_1 < 1,0 \quad (9.84)$$

- W przypadku większych opóźnień należy stosować korektory predykcyjne, algorytmy RMW lub inne podejścia. Przy bardzo krótkich opóźnieniach lepsze rezultaty dają korektory wyższego rzędu, np. przyśpieszająco-opóźniające.
- Jeśli warunek (9.84) jest spełniony, to najchętniej są stosowane regulatory PID, które można stosunkowo łatwo nastawiać. Od czasu sformułowania reguł Zieglera-Nicholsa powstało wiele metod syntezy tych regulatorów, które mogą prowadzić do uzyskania lepszych charakterystyk regulacji w określonych przypadkach [2, 3, 58].
- Projektując korektor, należy mieć na uwadze, że obiekt regulacji (rys. 9.5) przedstawia zazwyczaj złożony proces, w którym ujęte są także dodatkowe elementy, jak wymuszałnik, czy układ pomiarowy. Transmitancja tak rozumianego obiektu jest użytecznym odwzorowaniem jego uproszczonego (niskiego rzędu) modelu matematycznego.
- Każdy rzeczywisty obiekt funkcjonuje przy określonych ograniczeniach odnośnie do wartości sygnałów (najczęściej są to sygnały sterujące). Wprowadzenie stosownych ograniczeń wartości tych wielkości łączy się z nieliniową charakterystyką członów regulacji, co zazwyczaj prowadzi do efektów nasycenia. Jego skutki powinny być uwzględniane przy projektowaniu takich korektorów.

- Niekiedy dobre warunki korekcji układu regulacji można osiągnąć przez modyfikację transmitancji obiektu regulacji, co można uzyskać przez korekcję w torze sprzężenia zwrotnego, obejmującego sam obiekt.
- Proste metody nastawiania korektorów zostały opracowane w odniesieniu do regulatorów PID. W ogólnym przypadku spełnienie bardziej dokładnych wymagań odnośnie do dynamicznych i częstotliwościowych charakterystyk układu regulacji wymaga zastosowania zaawansowanych metod projektowych [2, 3].

Większość powyższych uwag odnosi się także do korekcji liniowych układów dyskretnych, co jest rozważane w następnym rozdziale.

Zadania

- 9.1 W przykładzie 9.12 analizowany jest korektor w sprzężeniu zwrotnym o idealnej transmitancji różniczkowej. Takie założenie jest trudne do spełnienia w praktyce. Z badać możliwość zastąpienia tego korektora bardziej realistycznym rzeczywistym elementem różniczkującym o transmitancji:

$$H_k(s) = \frac{k_k s}{sT_k + 1}$$

Określić przedziały zmian współczynników k_k oraz T_k , przy których układ pozostaje stabilny. Przyjąć, że obiekt ma transmitancję, jak w przykładzie 9.12 (przyjąć takie wartości współczynnika k_k , aby wśród biegunów transmitancji układu zamkniętego była para liczb zespolonych).

- 9.2 Dany jest obiekt o podanej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{5(s+6)}{s(s^2 + 4s + 25)}$$

Narysować charakterystykę układu otwartego na karcie Nicholasa, wyznaczyć na rysunku zapas fazy, zapas wzmocnienia oraz pulsację ω dla przejścia trajektorii przez współrzędną zerową wzmocnienia. Przygotować odpowiedni program w kodach programu Matlab.

- 9.3 Dany jest obiekt o następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{50}{s(s+36)(s+100)}$$

Narysować trajektorię układu na karcie Nicholasa i określić następujące parametry: - zapas fazy i zapas wzmocnienia, amplitudę i pulsację rezonansową, - pasmo przepuszczania. Dobrać korektor szeregowy zapewniający 15% przeregulowanie.

- 9.4 Dany jest układ regulacji z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym, w którym obiekt jest określony następującą transmitancją:

$$G_1(s) = \frac{0,5}{s(s+1)(s+5)}$$

Dobrać typ regulatora i jego nastawienia zgodnie z regułami Zieglera-Nicholasa. Porównać odpowiedzi układów na skok jednostkowy: przed i po wprowadzeniu korekcji.

- 9.5 Stosując reguły Zieglera-Nicholsa dobrać typ regulatora PID oraz jego parametry do układów regulacji z obiektem o podanej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}, \quad G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}, \quad G_1(s) = \frac{2}{s(s+1)}.$$

- 9.6 Dany jest obiekt o następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{0,1}{0,2s+1}$$

Określić nastawienia regulatora PID, przy których równanie charakterystyczne zamkniętego układu regulacji jest następujące: $M(s) = s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2$, gdzie: $\zeta = 1/\sqrt{2}$, $\omega_0 = \pi$.

Zbadać podstawowe charakterystyki uzyskanego układu regulacji. Porównać z regulatorem nastawionym według reguł Zieglera-Nicholsa.

- 9.7 Powtórzyć zadanie (9.6) dla obiektu o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{0,1}{s(0,5s+1)}$$

z regulatorem PD.

- 9.8 W układzie o strukturze jak na rys. 9.52 obiekt jest określony za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{e^{-2s}}{10s+1}$$

Przeprowadzić analizę tego układu regulacji, gdy w torze głównym znajduje się regulator PID o następujących parametrach: $k_p = 3$, $T_i = 8$, $T_d = 2$, a także dyskryminator z ograniczeniami: $r_{min} = -1,25$, $r_{maks} = 1,25$.

Przeanalizować zachowanie się układu regulacji po jego załączeniu.

- 9.9 Dany jest obiekt regulacji o następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{0,05}{2,1s+1} e^{-9s}$$

Zbudować układ regulacji z zastosowaniem predyktora Smitha. W charakterze korektora zastosować regulator PID. Zbadać i porównać właściwości układu regulacji z samym regulatorem PID oraz z dodaniem korektora Smitha. Nastawienie regulatora PID określić na podstawie reguł Zieglera-Nicholsa z pominięciem opóźnienia w obiekcie.

- 9.10 Dany jest obiekt o następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{e^{-6s}}{s(2,5s+1)}$$

Utworzyć układ regulacji:

- z zastosowaniem regulatora PD oraz korektora Smitha;
 - z zastosowaniem algorytmu z modelem wewnętrznym (RMW).
- Porównać właściwości obu układów.

10. KOREKCJA LINIOWYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH

10.1. Wprowadzenie

Zastosowanie techniki cyfrowej do realizacji zadań sterowania zarówno w układach ciągłych, jak i dyskretnych, ma wiele zalet w porównaniu z technologią analogową. Można łatwo wymienić podstawowe zalety związane z zastosowaniem układów cyfrowych (komputerowych):

- elastyczność w realizacji niemal dowolnych funkcji sterowania;
- niski koszt wykonania;
- duża dokładność i szybkość sterowania;
- łatwe rozszerzenie zakresu funkcji (rejestracja, analiza zdarzeń);
- łatwość komunikacji.

Czynniki te sprawiają, że obecnie powszechnie stosowane są komputerowe układy sterowania. Projektowanie takich (dyskretnych) układów regulacji może się odbywać na dwa sposoby:

- przez zastosowanie metod korekcji układów ciągłych oraz transformacji uzyskanych transmitancji korektorów ciągłych do postaci dyskretniej;
- na drodze bezpośredniego projektowania korektorów dyskretnych.

Pokażemy, że niektóre sposoby projektowania korektorów mogą być stosowane tylko w odniesieniu do układów dyskretnych.

10.2. Błędy ustalone w układach dyskretnych

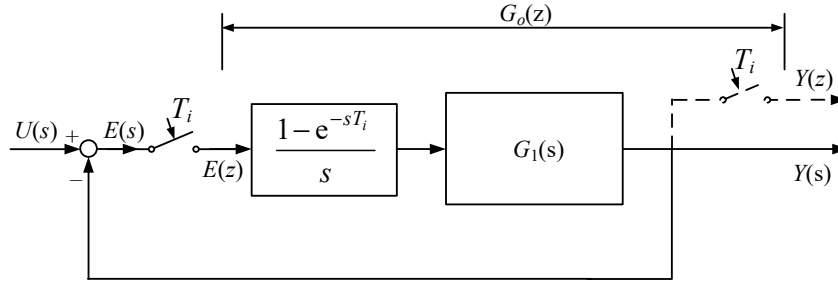
Podobnie jak w przypadku układów ciągłych wartość błędu regulacji w układach dyskretnych jest ważnym wskaźnikiem, charakteryzującym właściwości układu. W dyskretnym układzie regulacji transformata uchybu jest określona następująco (rys. 10.1):

$$E(z) = U(z) - Y(z) = \frac{U(z)}{1 + G_o(z)}, \quad (10.1)$$

gdzie $G_o(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G_1(s)H(s)}{s}\right\}$.

Jeśli układ jest stabilny, to do obliczenia wartości uchybu ustalonego można skorzystać z twierdzenia o wartości granicznej:

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)E(z)) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{(z-1)U(z)}{1 + G_o(z)} \right) \quad (10.2)$$



Rys. 10.1. Uchyb w układzie dyskretnym

Widać, że wartość uchybu ustalonego zależy od przebiegu na wejściu układu oraz od transmitancji układu otwartego. Podobnie jak w przypadku układów ciągłych (5.5) transmitancja układu otwartego może być przedstawiona w postaci iloczynowej:

$$G_o(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = \frac{kz^q (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_m)}{(z-1)^p (z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_n)}, \quad (10.3)$$

gdzie: $a_i \neq 1$, $b_j \neq 1$ są w ogólnym przypadku liczbami zespolonymi, natomiast czynnik $(z-1)^p$ odgrywa podobną rolę, jak s^p w transmitancji układu ciągłego (5.5): odnosi się on do bieguna leżącego na granicy stabilności p -tego rzędu: wykładnik p określa klasę układu dyskretnego. W analogiczny sposób można także określić poszczególne błędy ustalone układu dyskretnego.

Błąd położenia jest ustaloną wartością uchybu w przypadku, gdy na wejście podawany jest dyskretny skok jednostkowy:

$$u(k) = 1(k), \quad U(z) = z/(z-1).$$

Jeśli w (10.3) $p = 0$ (układ klasy 0), to na podstawie (10.2), otrzymamy:

$$e_p = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)E(z)) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{(z-1) \frac{z}{z-1}}{1 + G_o(z)} \right) = \frac{1}{1 + k_p}, \quad (10.4)$$

gdzie: $k_p = \lim_{z \rightarrow 1} (G_o(z))$ jest współczynnikiem wzmocnienia położenia.

W przypadku, gdy $p = 1$ (układ klasy 1), to w (10.4) zachodzi związek: $k_p = \lim_{z \rightarrow 1} (G_o(z)) \rightarrow \infty$, skąd $e_p = 0$. Podobnie jest dla układu klasy 2 ($p = 2$).

Błąd prędkościowy jest ustaloną wartością uchybu w przypadku, gdy na wejście podawany jest dyskretny sygnał narastający:

$$u(k) = T_i k, \quad U(z) = T_i z/(z-1)^2.$$

Jeśli w (10.3) $p = 0$ (układ klasy 0), to na podstawie (10.2), otrzymamy:

$$e_v = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)E(z)) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{(z-1) \frac{T_i z}{(z-1)^2}}{1 + G_o(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{T_i}{(z-1)G_o(z)} \right) = \frac{T_i}{k_v}, \quad (10.5)$$

gdzie: $k_v = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)G_o(z)) \rightarrow 0$, a więc $e_v \rightarrow \infty$.

W przypadku, gdy $p = 1$ (układ klasy 1), to w (10.5) zachodzi związek: $k_v = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)G_o(z))$ - czynniki $(z-1)$ ulegają redukcji.

Dla układu klasy 2 ($p = 2$) wartość współczynnika wzmocnienia prędkościowego dąży do nieskończoności: $k_v = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)G_o(z)) \rightarrow 0$, a więc $e_v = 0$.

Błąd przyspieszeniowy jest ustaloną wartością uchybu w przypadku, gdy na wejście podawany jest dyskretny sygnał paraboliczny:

$$u(k) = 0,5(T_i k)^2, \quad U(z) = 0,5T_i^2 z(z+1)/(z-1)^3.$$

Jeśli w (10.3) $p = 0$ (układ klasy 0), to na podstawie (10.2) otrzymamy:

$$e_a = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)E(z)) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{(z-1) \frac{T_i^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}}{1 + G_o(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{T_i^2}{(z-1)^2 G_o(z)} \right) = \frac{T_i^2}{k_a}, \quad (10.6)$$

gdzie: $k_a = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)^2 G_o(z)) \rightarrow 0$, a więc $e_a \rightarrow \infty$.

Podobna zależność zachodzi dla układu klasy 1, gdy $p = 1$.

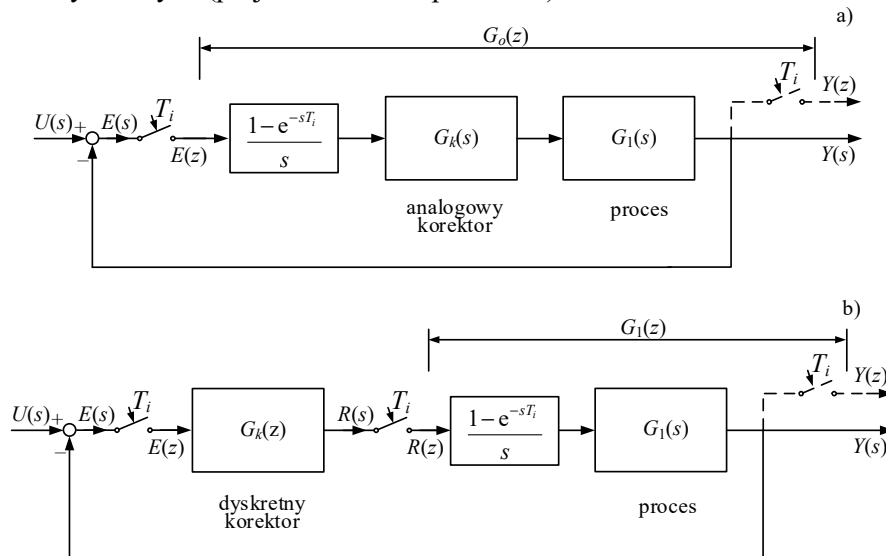
Dla układu klasy 2 ($p = 2$) współczynnik wzmocnienia przyspieszeniowego przyjmuje następującą wartość: $k_a = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)^2 G_o(z))$, a uchyb jest określony zgodnie z (10.6).

Można zauważyć, że uchybem ustalonym w układach dyskretnych rządzą podobne zasady, jak w przypadku układów ciągłych. Na podstawie przeprowadzonej analizy można utworzyć tabelę podobną do Tabeli 9.1, w której zestawione są wartości poszczególnych rodzajów uchybów ustalonych. Podobnie należy także podchodzić do problemu korekcji uchybu ustalonego. Na przykład układ dyskretny klasy $p > 0$ nie wymaga korekcji ustalonego uchybu położenia, gdyż wówczas $e_p = 0$.

10.3. Korekcja szeregową

Zasada doboru korektorów w układach ciągłych może być powtórzona w odniesieniu do układów dyskretnych. Należy jednak zwrócić uwagę na dużą swobodę w doborze fizycznych cech korektora. W ogólnym przypadku w układzie regulacji dyskretny może być stosowany korektor ciągły lub dyskretny. Odpowiadające temu struktury regulacji są przedstawione na rys. 10.2 [33]. Stosownie do tego, projektowanie pro-

wadzi się w odniesieniu do korektora ciągłego (rys. 10.2a) lub korektora dyskretnego (rys. 10.2b). W tym ostatnim przypadku w procesie projektowania korektora dyskretnego mogą być stosowane metody znane dla układów ciągłych (uzyskany korektor ciągły jest następnie transformowany do postaci dyskretniej) lub metody syntezy korektorów dyskretnych (projektowanie bezpośrednie).



Rys. 10.2. Struktura dyskretnego układu regulacji: a) z korektorem analogowym; b) z korektorem dyskretnym

10.3.1. Projektowanie korektora analogowego.

Korekcja układu regulacji według schematu z rys. 10.2a praktycznie nie jest obecnie stosowana. Przyczyną tego jest rozwój technologii mikroprocesorowej, dzięki czemu postać dyskretna sygnału na wyjściu przetwornika A/C może być poddana przetwarzaniu w korektorze dyskretnym jak na rys. 10.2b. Łatwo jednak zauważyć, że znając transmitancję korektora ciągłego $G_k(s)$, można zastosować technikę modelowania dyskretnego w celu określenia postaci dyskretniej $G_k(z)$ tej transmitancji. Uzyskany korektor dyskretny może być następnie stosowany w układzie jak na rys 10.2b.

Procedura projektowania takiego korektora składa się z następujących kroków:

1. Znając transmitancję obiektu $G_1(s)$, przeprowadzić syntezę korektora ciągłego o transmitancji $G_k(s)$ - p. 9.3:

$$G_k(s) = A \frac{sT_1 + 1}{s \frac{T_1}{\beta} + 1}.$$

2. Stosując przekształcenie biliniowe, określić transmitancję dyskretną korektora $G_k(z)$:

$$G_k(z) = G_k(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{T_i z+1}}$$

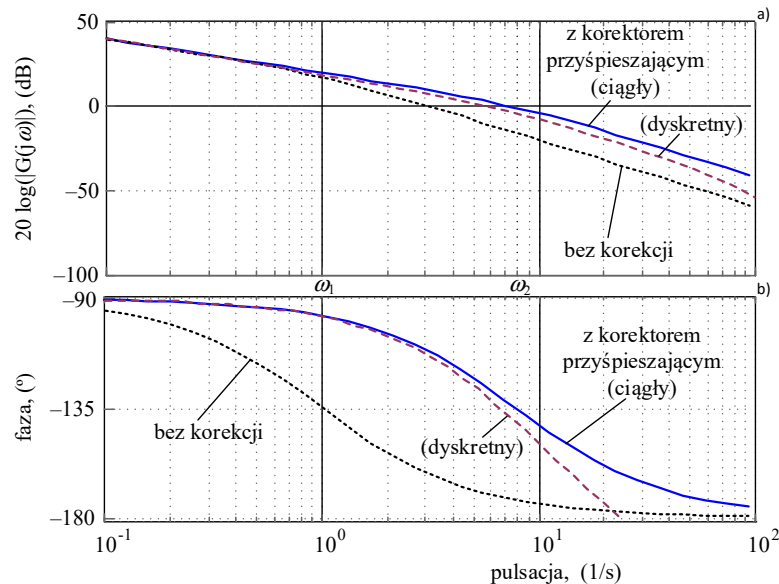
3. Zastosować uzyskany korektor dyskretny w schemacie jak na rys. 10.2b. Procedurę tę ilustruje kolejny przykład.

Przykład 10.1. Dobrać analogowy korektor szeregowy w układzie dyskretnego sterowania obiektem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Przyjąć okres próbkowania $T_i = 0,025$ s.

Charakterystyki częstotliwościowe układu ciągłego bez korekcji są pokazane na rys. 10.3 (krzywe punktowe). Widać, że zapas fazy wynosi poniżej 20° .



Rys. 10.3. Charakterystyki logarytmiczne amplitudy a) i fazy b) analizowanego układu

Transmitancja układu zamkniętego bez korekcji ma następującą postać:

$$G_{nk}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

Odpowiedź na skok jednostkowy tego układu jest pokazana na rys. 10.4 (linia kropkowana). Widać, że występuje znaczne przeregulowanie i duży czas ustalenia.

Projektujemy korektor przyspieszający (p. 9.3.1), który ma w tym przypadku następującą transmitancję (9.16):

$$G_k(s) = A \frac{sT_1 + 1}{s \frac{T_1}{\beta} + 1}, \text{ przy czym: } T_1 = \omega_1 = 1, \beta = \omega_2 T_1 = 8 \text{ oraz } A = 1, \text{ skąd:}$$

$$G_k(s) = \frac{s+1}{0,125s+1}.$$

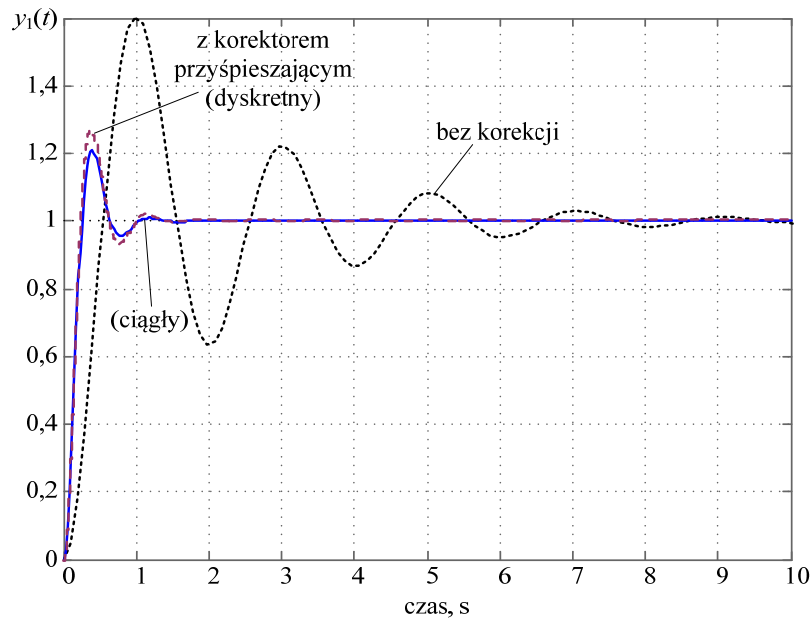
Transmitancja ciągłego układu otwartego z korektorem jest następująca:

$$G_o(s) = G_k(s)G_1(s) = \frac{s+1}{0,125s+1} \frac{10}{s(s+1)} = \frac{80}{s(s+8)}$$

Przebiegi charakterystyk Bodego dla tej transmitancji są pokazane na rys. 10.3 (krzywe ciągłe). Łatwo stąd określić transmitancję zamkniętego układu ciągłego po korekcji:

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{80}{s^2 + 8s + 80}$$

Odpowiedź na skok jednostkowy tego układu jest pokazana na rys. 10.4 (linia ciągła). Widać, że występuje niewielkie przeregulowanie, a przebieg ustala się po 1,5 s.



Rys. 10.4. Odpowiedź układu zamkniętego na skok jednostkowy

Transmitancję korektora dyskretnego otrzymujemy na podstawie przekształcenia bilingowego:

$$G_k(z) = \frac{s+1}{0,125s+1} \Big|_{s=\frac{2}{T_i} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z(1+2/T_i) + (1-2/T_i)}{z(1+0,25/T_i) + (1-0,25/T_i)}$$

W celu analizy utworzonego układu należy określić dyskretną transmitancję obiektu:

$$G_1(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{10}{s^2(s+1)}\right\} = 10 \frac{z(e^{-T_i} + T_i - 1) - (e^{-T_i}(T_i + 1) - 1)}{z^2 - z(1 + e^{-T_i}) + e^{-T_i}}.$$

Transmitancja układu otwartego przyjmuje następującą postać: $G_o(z) = G_1(z)G_k(z)$.

Częstotliwościowe charakterystyki amplitudy i fazy układu po korekcji są pokazane na rys. 10.3 (linie przerywane). Porównując częstotliwościowe charakterystyki skorygowanego układu ciągłego (linie ciągłe) i dyskretnego, widać, że są one podobne dla niskiego zakresu częstotliwości. Różnice objawiają się w miarę wzrostu pulsacji, co jest wynikiem ich okresowości dla układu dyskretnego.

Dyskretna transmitancja układu zamkniętego ma następującą postać:

$$G(z) = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)}.$$

Przebieg odpowiedzi uzyskanego układu zamkniętego na skok jednostkowy pokazany na rys. 10.4 (linia przerywana). Różni się ona nieznacznie od przebiegu odpowiadającemu skorygowanemu układowi ciągłemu.

10.3.2. Projektowanie korektora dyskretnego.

W przedstawionej powyżej procedurze korektor cyfrowy został otrzymany na drodze cyfrowego modelowania układu ciągłego. Podstawową wadą takiego podejścia jest pominięcie w procesie projektowania odkształcenia charakterystyk częstotliwościowych układu dyskretnego ze względu na ich okresowość – co nie ma miejsca w przypadku układów ciągłych. Niedogodność tę można w dużym stopniu ominąć przez zastosowanie następującej procedury.

1. Zakładając określony krok impulsowania T_i , wyznaczyć dyskretną transformatę obiektu $G_1(z)$ (rys. 10.2b):

$$G_1(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\}$$

2. Dokonać transformacji układu dyskretnego do pomocniczej przestrzeni w zgodnie z (7.6): $G(z) \rightarrow G(w)$:

$$G_1(w) = G_1(z)\Big|_{z=\frac{2/T_i+w}{2/T_i-w}}.$$

3. Stosując metodę częstotliwościową, wyznaczyć korektor ciągły w przestrzeni w :

$$G_k(w) = A \frac{wT_1 + 1}{w\frac{T_1}{\beta} + 1}.$$

4. Wyznaczyć transmitancję korektora dyskretnego za pomocą przekształcenia biliniowego (7.6):

$$G_k(z) = G_k(w)\Big|_{w=\frac{2}{T_i}\frac{z-1}{z+1}}.$$

Procedurę tę ilustruje kolejny przykład.

Przykład 10.2. Dobrać dyskretny korektor szeregowy w układzie z przykładu 10.1.

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Przyjąć okres próbkowania $T_i = 0,025s$.

Wyznaczamy transmitancję dyskretną $G_1(z)$:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= (1-z^{-1})Z\left\{\frac{10}{s^2(s+1)}\right\} = \frac{10(z-1)}{z} \left(\frac{T_i z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T_i}} \right) \\ &= 10 \frac{z(e^{-T_i} + T_i - 1) - (e^{-T_i}(T_i + 1) - 1)}{z^2 - z(1 + e^{-T_i}) + e^{-T_i}} \end{aligned}$$

W celu określenia częstotliwościowych charakterystyk na podstawie transmitancji $G_1(z)$ można zastosować przekształcenie biliniowe, jak w kroku 2 podanej procedury i następnie sporządzić charakterystyki amplitudy i fazy transmitancji $G_1(w)$. Jeśli posługujemy się programem MATLAB, to można zastosować następującą komendę programu:

`bode(G1z, {0.1, 100}) ;`

gdzie: `G1z` przedstawia transmitancję $G_1(z)$, natomiast `{0.1, 100}` określa przedział zmian pulsacji.

Uzyskane w ten sposób charakterystyki są pokazane na rys. 10.5 (linia przerywana). Są to w istocie charakterystyki transmitancji $G_1(w)$.

Transmitancję korektora wyznaczamy podobnie jak w przykładzie 10.1. Zakładamy, że projektujemy korektor przyspieszający, dla którego: $A = 1$, $\omega_1 = 1,0$, $\omega_2 = 10,0$. Na tej podstawie wyznaczamy pozostałe parametry:

$$T_1 = \omega_1 = 1,0, \quad \beta = \omega_2 T_1 = 10,0.$$

W ten sposób transmitancja $G_k(w)$ jest następująca:

$$G_k(w) = A \frac{wT_1 + 1}{w \frac{T_1}{\beta} + 1} = \frac{w+1}{0,1w+1}$$

Transmitancja korektora dyskretnego jest określana na podstawie przekształcenia bilingowego:

$$G_k(z) = \frac{wT_1 + 1}{w \frac{T_1}{\beta} + 1} \bigg|_{w = \frac{2z-1}{T_i z+1}} = \frac{z \left(\frac{2T_1}{T_i} + 1 \right) - \left(\frac{2T_1}{T_i} - 1 \right)}{z \left(\frac{2T_1}{\beta T_i} + 1 \right) - \left(\frac{2T_1}{\beta T_i} - 1 \right)} = \frac{a_1 - z^{-1}a_0}{b_1 - z^{-1}b_0} = \frac{R(z)}{E(z)},$$

$$\text{skąd: } b_1 R(z) = a_1 E(z) - a_0 z^{-1} E(z) + b_0 z^{-1} R(z).$$

Otrzymujemy stąd postać czasową odpowiedzi (rys. 10.2b):

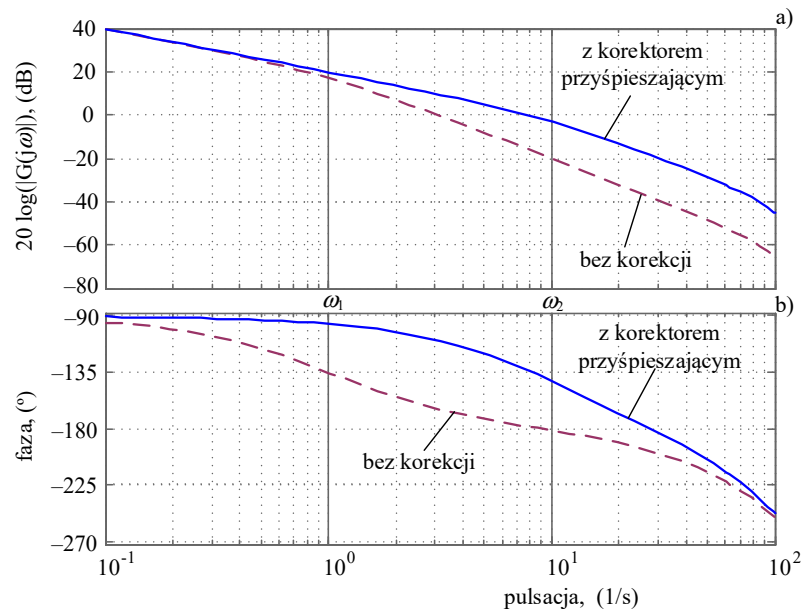
$$r(k) = \frac{a_1}{b_1} e(k) - \frac{a_0}{b_1} e(k-1) + \frac{b_0}{b_1} r(k-1),$$

która jest jednocześnie algorytmem przetwarzania realizowanego przez korektor.

Transmitancja toru głównego końcowego układu dyskretnego jest określona następująco:

$$G_o(z) = G_k(z)G_1(z)$$

Charakterystyki częstotliwościowe tej transmitancji są pokazane na rys. 10.5 (linie ciągłe). Widać, że po korekcji zapas fazy wynosi 45° .



Rys. 10.5. Charakterystyki logarytmiczne amplitudy a) i fazy b) analizowanego układu

Odpowiedź układu zamkniętego na skok jednostkowy można określić podobnie jak w przykładzie 10.1. Jej przebieg jest zbliżony do odpowiedzi z rys. 10.4 (linia ciągła): w tym przypadku właściwości dyskretnego korektora są zbliżone do właściwości korektora ciągłego.

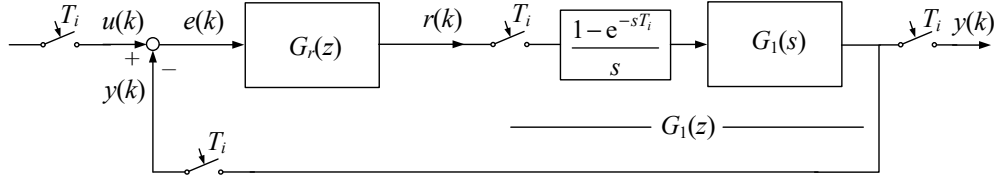
10.4. Cyfrowe regulatory PID

Cyfrowe regulatory PID pełnią podobne funkcje jak analogowe regulatory w systemach ciągłych. Dobór rodzaju regulatora cyfrowego oraz jego nastawień może być prowadzony według zasad obowiązujących dla regulatorów ciągłych, jeśli okres impulsowania T_i jest niewielki w porównaniu z najkrótszą stałą czasową obiektu τ_m . Zwykle przyjmuje się, że zasada ta jest spełniona, gdy zachodzi warunek: $T_i/\tau_m \leq 0,1$. W innym przypadku należy modyfikować nastawienia regulatora otrzymane według zasad stosowanych dla regulatorów ciągłych, gdyż opóźnienie wprowadzane przez ekstrapolator może istotnie wpływać na właściwości układu regulacji.

Ten sposób projektowania regulatorów jest zbieżny z omówioną powyżej procedurą projektowania korektorów cyfrowych na zasadzie modelowania cyfrowego korektorów analogowych.

10.4.1. Dyskretna postać regulatora PID

Struktura układu regulacji z regulatorem cyfrowym nie różni się od struktury podobnego układu z korektorem szeregowym (rys. 10.2). Schemat ten jest powtórzony na rys. 10.6 z zaznaczeniem poszczególnych wielkości w funkcji dyskretnego czasu.



Rys. 10.6. Struktura układu regulacji z regulatorem cyfrowym

Transmitancja regulatora ciągłego ma postać jak w (9.28). Jej transformacja do postaci dyskretniej polega na zastosowaniu jednej z metod omówionych w p. 7.3. Na przykład, zastąpienie całkowania przez niejawną formułę prostokątów (7.22) prowadzi do następującej transmitancji:

$$G_r(z) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) \bigg|_{s=\frac{z-1}{T_I z}} = k_p + \frac{zk_p T_I}{(z-1)T_I} + \frac{(z-1)k_p T_D}{zT_I} = \frac{R(z)}{E(z)} \quad (10.7)$$

Wynikają stąd funkcje przejścia poszczególnych cząstkowych regulatorów PID:

$$G_{rP}(z) = k_p$$

$$G_{rPI}(z) = k_p + \frac{zk_p T_I}{(z-1)T_I}$$

$$G_{rPD}(z) = k_p + \frac{(z-1)k_p T_D}{zT_I}$$

Transmitancję (10.7) można przedstawić w następującej formie:

$$G_r(z) = \frac{(1-z^{-1})k_p T_I T_I + k_p T_I^2 + (1-z^{-1})k_p T_I T_D}{(1-z^{-1})T_I T_I} = \frac{R(z)}{E(z)} \quad (10.8)$$

skąd:

$$R(z)(1-z^{-1}) = E(z) \left(\frac{k_p}{T_I} + \frac{k_p}{T_I} + \frac{k_p T_D}{T_I} \right) - z^{-1} E(z) \left(\frac{k_p}{T_I} + \frac{2k_p T_D}{T_I} \right) + z^{-2} E(z) \frac{k_p T_D}{T_I} \quad (10.9)$$

Teraz łatwo już otrzymać podstawową (pozycyjną) postać czasową regulatora PID:

$$r(k) = r(k-1) + \frac{k_p}{T_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_I} + T_D \right) e(k) - \frac{k_p}{T_i} (1 + 2T_D) e(k-1) + \frac{k_p T_D}{T_i} e(k-2) \quad (10.10)$$

Algorytm (10.10) jest często realizowany w postaci przyrostowej (prędkościowej) :

$$\Delta r(k) = r(k) - r(k-1) = \frac{k_p}{T_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_I} + T_D \right) e(k) - \frac{k_p}{T_i} (1 + 2T_D) e(k-1) + \frac{k_p T_D}{T_i} e(k-2) \quad (10.11)$$

Taka forma regulatora jest stosowana w tym przypadku, gdy obiekt regulacji ma wejście całkujące, które ‘pamięta’ poprzedni stan sygnału wejściowego.

Jak widać, można określić wiele praktycznych algorytmów na bazie transmitancji regulatora. Na przykład, jeśli w (10.7) zastosuje się transformację biliniową, wywodzącą się z metody trapezów (6.71), to otrzymamy następującą transmitancję regulatora PID:

$$G_r(z) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) \bigg|_{s=\frac{2}{T_i} \frac{z-1}{z+1}} = k_p + \frac{(z+1)k_p T_i}{2(z-1)T_I} + \frac{2(z-1)k_p T_D}{(z+1)T_i} = \frac{R(z)}{E(z)}, \quad (10.12)$$

która, po uproszczeniu, przyjmuje postać:

$$G_r(z) = \frac{z^2 a_2 + z a_1 - a_0}{z^2 - 1} = \frac{R(z)}{E(z)} \quad (10.13)$$

gdzie: $a_2 = k_p (1 + 0,5T_i/T_I + 2T_D/T_i)$,

$$a_1 = k_p (T_i/T_I - 4T_D/T_i),$$

$$a_0 = k_p (1 - 0,5T_i/T_I - 2T_D/T_i).$$

Postać czasowa regulatora PID z transformacją według metody biliniowej jest więc następująca:

$$r(k) = r(k-2) + a_2 e(k) + a_1 e(k-1) - a_0 e(k-2) \quad (10.14)$$

Jak widać, w tym przypadku prosty algorytm różnicowy nie można zdefiniować w odniesieniu do dwóch kolejnych próbek uchybu i sygnału sterującego.

Prosta modyfikacja algorytmu pozwala uniknąć tego problemu. Polega ona na tym, że transmitancja dyskretna w (10.12) jest tworzona na podstawie różnych sposobów transformacji układu ciągłego:

$$\text{całkowanie: } \frac{1}{s} \rightarrow \frac{T_i}{2} \frac{z+1}{z-1} \text{ (przekształcenie biliniowe),}$$

$$\text{różniczkowanie: } s \rightarrow \frac{z-1}{zT_i} \text{ (pochodna wg metody prostokątów).}$$

Wówczas zależność (10.12) przybiera następującą postać:

$$G_r(z) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} \left| \frac{1 - \frac{T_i}{2} \frac{z+1}{z-1}}{s} + sT_D \right|_{s=\frac{z-1}{zT_i}} \right) = k_p \left(1 + \frac{(z+1)T_i}{2(z-1)T_I} + \frac{(z-1)T_D}{zT_i} \right) = \frac{R(z)}{E(z)}, \quad (10.15)$$

co można uprościć do następującej postaci:

$$G_r(z) = \frac{a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{R(z)}{E(z)}, \quad (10.16)$$

gdzie: $a_2 = k_p(1 + 0,5T_i/T_I + T_D/T_i)$,

$a_1 = k_p(0,5T_i/T_I - 1 - 2T_D/T_i)$,

$a_0 = k_p T_D/T_i$.

Na podstawie (10.16) można napisać następujący różnicowy algorytm regulatora PID:

$$r(k) - r(k-1) = a_2 e(k) + a_1 e(k-1) + a_0 e(k-2) \quad (10.17)$$

Tym razem różnica sygnałów wyjściowych jest obliczana na podstawie dwóch kolejnych próbek.

Jeszcze inny algorytm numerycznej reprezentacji regulatora można uzyskać przez bezpośrednie zastosowanie numerycznych formuł całkowania i różniczkowania do ciągłej postaci regulatora (9.29):

$$r(t) = k_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right), \text{ skąd:}$$

$$r(k) = k_p \left(e(k) + \frac{T_i}{T_I} \sum_{m=0}^k e(m) + \frac{T_D}{T_i} (e(k) - e(k-1)) \right) \quad (10.18)$$

Zależność (10.18) można zapisać w postaci przyrostowej:

$$r(k) = r(k-1) + K_p(e(k) - e(k-1)) + K_I e(k) + K_D(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)), \quad (10.19)$$

gdzie: $K_p = k_p$, $K_I = \frac{T_i}{T_I}$, $K_D = \frac{T_D}{T_i}$, $e(k) = u(k) - y(k)$.

W celu zmniejszenia wrażliwości algorytmu (10.16) na duże zmiany uchybu wywołane zmianami wielkości zadanej, można postulować, aby zmiany te były małe: $u(k) - u(k-1) \approx 0$. W takim przypadku:

$$e(k) - e(k-1) = u(k) - y(k) - u(k-1) + y(k-1) \approx y(k-1) - y(k).$$

Wówczas zależność (10.16) przyjmie następującą formę [22, 62]:

$$r(k) = r(k-1) + K_p(y(k-1) - y(k)) + K_I e(k) + K_D(2y(k-1) - y(k) - y(k-2)) \quad (10.20)$$

Ta postać algorytmu regulatora PID pozwala uniknąć skoków przy dużych zmianach wielkości zadanej: różniczkowanie dotyczy sygnału wyjściowego, który jest zazwyczaj bardziej stabilny od wartości zadanej (jeśli obiekt ma właściwości tłumienia wysokich częstotliwości). Zauważmy, że w regulatorze o postaci (10.20) nie można usunąć działania całkującego, gdyż zniknie wówczas oddziaływanie uchybu regulacji na wielkość wyjściową.

Na podstawie (10.20) można określić transformatę sygnału wyjściowego regulatora:

$$R(z) = \frac{K_I}{1-z^{-1}}U(z) - \left(K_P + \frac{K_I}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1}) \right)Y(z) \quad (10.21)$$

Łatwo stąd określić transmitancję układu zamkniętego ($Y(z) = R(z)G_1(z)$):

$$G(z) = \frac{K_I G_1(z)}{1-z^{-1} + (K_P(1-z^{-1}) + K_D(1-z^{-1})^2 + K_I)G_1(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}, \quad (10.22)$$

$$\text{gdzie: } G_1(z) = (1-z^{-1})Z \left\{ \frac{G_1(s)}{s} \right\} = \frac{L_1(z)}{M_1(z)}.$$

Do praktycznych obliczeń, transmitancję (10.22) wygodnie jest zapisać w następującej formie:

$$G(z) = \frac{K_I z^2 L_1(z)}{(z^2 - z)M_1(z) + (z^2(K_P + K_I + K_D) - z(K_P + 2K_D) + K_D)L_1(z)} = \frac{L(z)}{M(z)} \quad (10.23)$$

10.4.2. Nastawianie cyfrowych regulatorów PID

Ważną cechą regulatorów PID jest stosunkowo proste ich projektowanie na podstawie przeprowadzonych testów odpowiedzi na skok jednostkowy lub oscylacji granicznej. Metody te mogą być stosowane do dużej klasy układów regulacji. Zaprojektowany w ten sposób regulator ciągły może być przekształcony do postaci dyskretniej, jak to pokazano powyżej.

W procesie projektowania regulatora cyfrowego trzeba zauważyć, że zwiększa się tu liczba wymaganych parametrów, gdyż należy także ustalić okres próbkowania T_i . Dla obiektów, które są modelowane za pomocą zależności (9.35), wskazówką może tu być następująca zależność:

$$T_i \leq \min(0,3\tau_1, 0,03T_1) \quad (10.24)$$

Projektowanie cyfrowego regulatora PID może się więc odbywać według następującego algorytmu.

1. Postępując zgodnie z zasadami projektowania regulatorów ciągłych PID, określić rodzaj regulatora i jego parametry na podstawie badania oscylacji granicznej układu zamkniętego lub odpowiedzi na skok jednostkowy układu otwartego.
2. Określić okres impulsowania układu dyskretnego na podstawie (10.24).
3. Wyznaczyć transmitancję regulatora dyskretnego na podstawie transformacji biliniowej (lub podobnej).
4. Określić czasowe równanie funkcjonowania regulatora.

Zauważmy, że próba oscylacji granicznej często nie może być wykonana na rzeczywistym obiekcie. Jednak znając transmitancję obiektu $G_1(z)$ (łącznie z odpowiednim ekstrapolatorem), można obliczyć wzmocnienie graniczne k_{pmax} w sposób analityczny z warunku stabilności układu zamkniętego. Podstawiając tę wartość wzmocnienia do transmitancji układu zamkniętego (wraz ze wzmacniaczem w torze głównym), można obliczyć częstotliwość oscylacji na granicy stabilności – a więc także poszukiwany ich okres T_{max} . Szczegóły tego algorytmu w odniesieniu do układów ciągłych są pokazane w przykładzie 9.5.

W miejsce reguł Zieglera-Nicholsa w odniesieniu do układów ciągłych, można stosować zasady doboru parametrów regulatora określonych przez Takahashi'ego [55, 62, 72] (Tabela 10.1), które bezpośrednio odnoszą się do algorytmu regulatora określonego przez (10.20). Otrzymano je przez modyfikację Tabeli 9.4 z uwzględnieniem okresu impulsowania T_i .

Tabela 10.1. Parametry regulatorów cyfrowych PID według reguł Takahashi'ego

regulator	odpowiedź skokowa		
	K_P	$K_I = T_i/T_l$	$K_D = T_D/T_i$
P	$\frac{1}{a(T_i + \tau_1)}$		
PI	$\frac{0,9}{a(\tau_1 + T_i)} - \frac{K_I}{2}$	$\frac{0,27T_i}{a(\tau_1 + T_i/2)^2}$	
PID	$\frac{1,2}{a(\tau_1 + T_i)} - \frac{K_I}{2}$	$\frac{0,6T_i}{a(\tau_1 + T_i/2)^2}$	$\frac{1}{2aT_i}$
odpowiedź częstotliwościowa			
P	$k_{Pmax}/2$		
PI	$k_{Pmax} \left(0,45 - 0,27 \frac{T_i}{T_{max}} \right)$	$0,54 \frac{k_{Pmax} T_i}{T_{max}}$	
PID	$0,6k_{Pmax} \left(1 - \frac{T_i}{T_{max}} \right)$	$1,2 \frac{k_{Pmax} T_i}{T_{max}}$	$\frac{3}{40} \frac{k_{Pmax} T_{max}}{T_i}$
τ_1 – opóźnienie, s; T_i – okres impulsowania, s; $a = \frac{k_1}{T_l} = \tan \alpha$ (rys. 9.45)			

Przykład 10.3. Dobrać cyfrowy regulator PID w układzie z przykładu 9.5:

$$G_1(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)}$$

Przyjąć, że regulator będzie realizowany według algorytmu (10.20) z nastawieniami określonymi według reguł Takahashi'ego (odpowiedź na skok jednostkowy).

Parametry odpowiedzi na skok jednostkowy badanego obiektu są określone w przykładzie 9.5:

$$\tau_1 = 0,68s, \quad T_1 = 2,72s, \quad a = 0,25.$$

Na podstawie (10.24) określamy okres impulsowania: $T_i \leq \min(0,2, 0,08)$. Przyjmujemy $T_i = 0,05$.

Nastawienia regulatora wyznaczamy zgodnie z Tabelą 10.1:

$$K_I = 0,2414; K_D = 40,0; K_P = 6,4546.$$

Do określenia odpowiedzi na skok jednostkowy układu zamkniętego z regulatorem można się posłużyć transmitancją (10.23), gdzie:

$$G_1(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G_1(s)}{s}\right\} = \frac{L_1(z)}{M_1(z)}, \text{ przy czym:}$$

$$L_1(z) = 3,964 \cdot 10^{-5} z^2 + 15,08 \cdot 10^{-5} z + 3,587;$$

$$M_1(z) = z^3 - 2,807 z^2 + 2,627 z - 0,8187.$$

Uwzględniając w (10.23) współczynniki regulatora, otrzymamy:

$$L(z) = K_I z^2 L_1(z) = 0,2414 z^2 (3,964 \cdot 10^{-5} z^2 + 15,08 \cdot 10^{-5} z + 3,587)$$

$$= 0,0957 \cdot 10^{-4} z^4 + 0,3642 \cdot 10^{-4} z^3 + 0,866 \cdot 10^{-4} z^2$$

$$M(z) = z^5 - 3,8054 z^4 + 5,4372 z^3 - 3,4548 z^2 + 0,8217 z + 0,0014$$

Obliczenia te można łatwo wykonać, posługując się programem MATLAB:

```
% Przyklad_3 : Regulator PID dla obiektu: 2/(s+1)^2(s+2)
close all;
clear all;

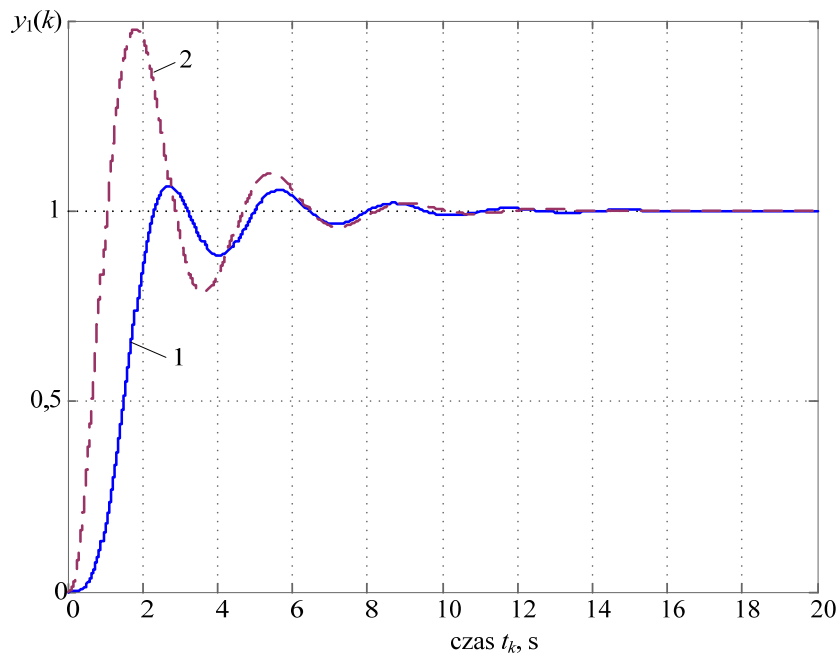
% obiekt ciagly
num=[2];
den=[1 4 5 2];
G1=tf(num,den); % transmitancja G1(s)
% transmitancja dyskretna obiektu
T=0.05;
G1z=c2d(G1,T,'zoh'); % transmitancja G1(z)
[num1z,den1z]=tfdata(G1z,'v'), % L1(z)=num1z; M1(z)=den1z

% regulator cyfrowy PID
a=0.25; % na podstawie Przykladu 9.5
tau=0.68;

Ki=0.6*T/(a*(tau+T/2)*(tau+T/2));
kp=1.2/(a*(tau+T))-Ki/2; % nastawienia regulatora
Kd=0.5/(T*a);
```

```
% okreslenie transmitancji układu zamkniętego
Lz1=Ki*tf([1 0 0],[1],T)*tf(num1z,[1],T),
[Lz,d]=tfdata(Lz1,'v'),
Mza=tf([1 -1 0],[1],T)*tf(den1z,[1],T),
[Mz1,d]=tfdata(Mza,'v'),
Mzb=tf([0 (kp+Ki+Kd) -(kp+2*Kd) Kd],[1],T)*tf(num1z,[1],T),
[Mz2,d]=tfdata(Mzb,'v'),
Mz=Mz1+[0 Mz2],
Gz=tf(Lz,Mz,T), % transmitancja układu zamkniętego
step(Gz,0:T:20);grid;
```

Odpowiedź na skok jednostkowy układu zamkniętego z otrzymanym regulatorem jest pokazana na rys. 10.7 (krzywa 1). Widać, że parametry odpowiedzi są zadowalające.

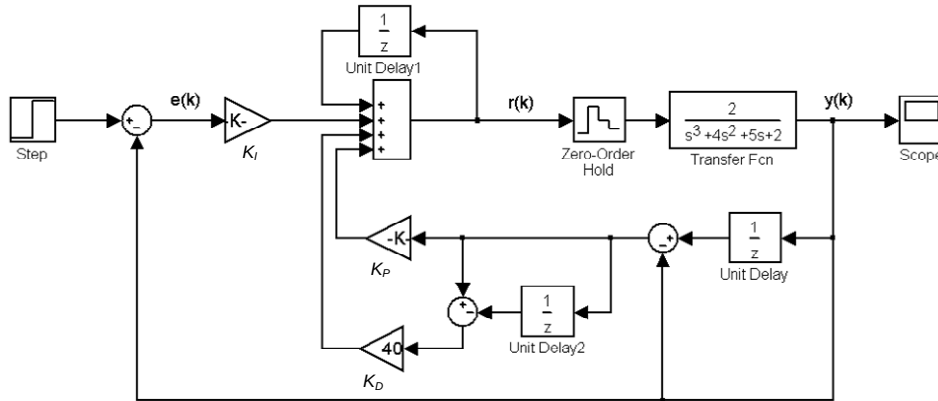


Rys. 10.7. Odpowiedź na skok jednostkowy: regulator (10.20) – krzywa 1; regulator (10.17) – krzywa 2

Symulację przedstawionego układu można także wykonać za pomocą modelu wykonanego w programie MATLAB/SIMULINK. Schemat modelu jest pokazany na rys. 10.8. Struktura modelu jest zgodna z algorytmem regulatora (10.20). Oznaczenia podstawowych sygnałów i parametrów regulatora ułatwiają śledzenie schematu.

Krzywa 2 na rys. 10.7 jest odpowiedzią na skok jednostkowy rozpatrywanego układu z regulatorem utworzonym zgodnie z (10.16). Nastawienia regulatora zostały określone na podstawie standardowej metody Zieglera-Nicholsa dla regulatora ciągłego – przykład 9.5:

$$k_P = 4,8; \quad T_I = 1,36; \quad T_D = 0,34.$$



Rys. 10.8. Schemat modelu analizowanego układu w programie SIMULINK

Można zauważyć, że w tym przypadku (rys. 10.7, krzywa 2) właściwości dynamiczne układu regulacji nie są zadowalające: zbyt duże przeregulowanie. Uzyskana odpowiedź jest zbliżona do odpowiedzi układu ciągłego (rys. 9.27).

Rozpatrywany w przykładzie 10.3 regulator ma istotne ograniczenie, gdyż nie może być pozbawiony członu całkującego. Kolejny przykład ilustruje możliwość stosowania cyfrowego regulatora PD w przypadku, gdy obiekt jest klasy I, a więc działanie całkujące nie jest potrzebne.

Przykład 10.4. Dobrać cyfrowy regulator PID w układzie z przykładu 10.1.

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Przyjąć okres próbkowania $T_i = 0,025$ s.

Zauważmy, że badany układ jest klasy 1 (zerowy biegun), a więc układ zamknięty będzie miał zerowy ustalony uchyb położenia. Nie ma zatem potrzeby stosowania członu całkującego (I) w projektowanym regulatorze. Można zastosować regulator PD, którego nastawienia można określić zgodnie z (9.39) – jeśli dostępny jest model (9.61):

$$k_P = \frac{2}{3k_1\tau_1}, \quad T_D = T_1,$$

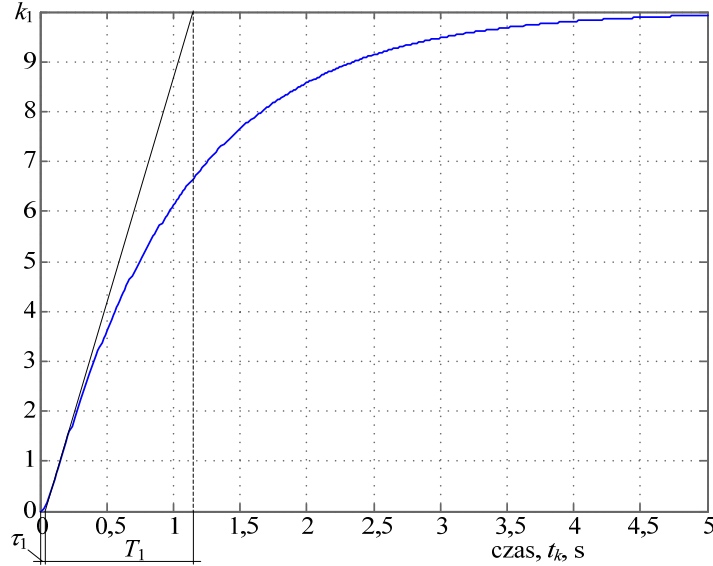
gdzie parametry k_1 , τ , T_1 można uzyskać na podstawie odpowiedzi obiektu na skok jednostkowy. Ponieważ obiekt jest układem astatycznym, więc bezpośrednio na podstawie odpowiedzi na skok jednostkowy nie uda się określić wzmocnienia k_1 . Można tu zastosować podejście, które było prezentowane w przykładzie 9.10: w szereg z obiektem umieszczamy element różniczkujący, który eliminuje całkowanie w transmitancji obiektu. Zredukowana transmitancja ma następującą postać:

$$G_{10}(s) = \frac{s}{\alpha s + 1} \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} e^{-s\tau_1} \approx \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-s\tau_1}, \quad \alpha = 0,04,$$

gdzie transmitancja $\frac{k_1}{s(T_1 s + 1)} e^{-s\tau_1}$ jest modelem rzeczywistej transmitancji $G_1(s)$.

Odpowiedź na skok jednostkowy układu zredukowanego jest pokazana na rys. 10.9. Można stąd odczytać wartości poszukiwanych parametrów:

$k_1 = 10$, $\tau_1 = 0,03$, $T_1 = 1,12$.



Rys. 10.9. Odpowiedź zredukowanego układu na skok jednostkowy

Projektowany regulator PD ma następującą transmitancję dyskretną:

$$G_k(z) = k_p \left(1 + sT_D \Big|_{s=\frac{z-1}{T_i z}} \right) = k_p \frac{z(T_D + T_i) - T_D}{zT_i}$$

Nastawienia tego regulatora są obliczane zgodnie z przytoczonymi powyżej zależnościami:

$$k_p = \frac{2}{3k_1\tau_1} = 2,22 \quad T_D = T_1 = 1,12$$

Cyfrowy regulator PD o transmitancji $G_k(z)$ jest połączony w torze głównym układu regulacji z obiektem, którego transmitancja dyskretna jest następująca (przy założeniu, że poprzedza go ekstrapolator zerowego rzędu) – przykład 10.2:

$$G_1(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{10}{s^2(s+1)} \right\} = 10 \frac{z(e^{-T_i} + T_i - 1) - (e^{-T_i}(T_i + 1) - 1)}{z^2 - z(1 + e^{-T_i}) + e^{-T_i}}$$

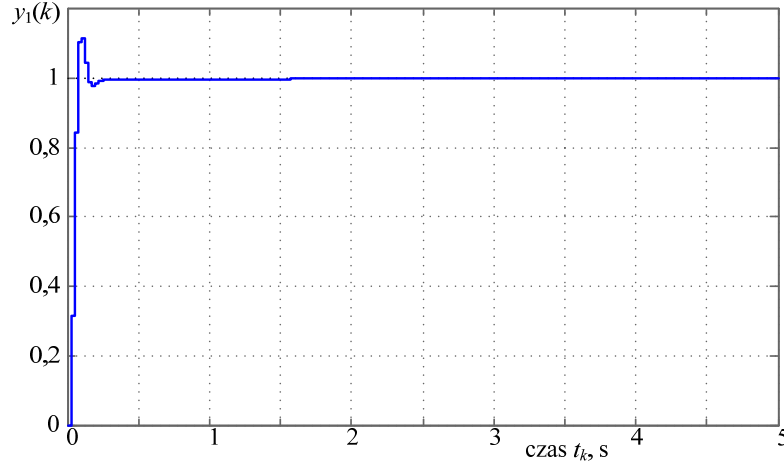
Transmitancja dyskretnego układu otwartego jest następująca:

$$G_o(z) = G_k(z)G_1(z)$$

Układ zamknięty jest zatem określony przez następującą transmitancję:

$$G(z) = \frac{G_k(z)G_1(z)}{1 + G_k(z)G_1(z)}$$

Odpowiedź na skok jednostkowy tego układu jest pokazana na rys. 10.10.



Rys. 10.10. Odpowiedź badanego układu z regulatorem PD na skok jednostkowy

Widać, że układ ma dobre właściwości dynamiczne: małe przeregulowanie, krótki czas ustalenia i zerowy uchyb statyczny położenia.

Projektowanie omawianych powyżej regulatorów cyfrowych polega na przekształceniu transmitancji znanych regulatorów ciągłych do postaci dyskretniej. Algorytm cyfrowy ma dużą elastyczność w zakresie modyfikacji, co pozwala niekiedy osiągnąć korzystne właściwości. Dalsze rozważania odnoszą się do korektorów cyfrowych, których postulowane charakterystyki są definiowane w odniesieniu do dyskretnych transmitancji.

10.5. Bezpośrednie projektowanie korektorów dyskretnych

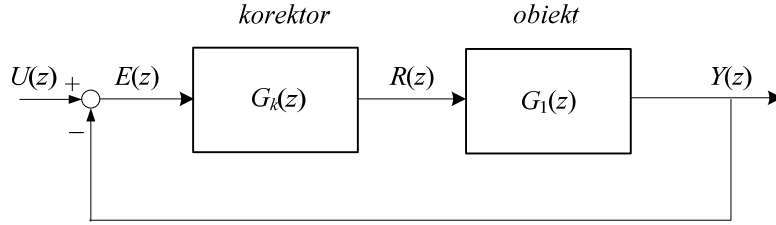
Synteza korektora dyskretnego metodą bezpośrednią polega na poszukiwaniu transmitancji korektora, która zapewni postulowaną transmitancję układu regulacji. W tym prostym podejściu zakłada się, że znana jest transmitancja procesu oraz struktura układu regulacji (rys. 10.11). Zauważmy, że jeśli obiekt ma charakter układu ciągłego, to jego pierwotna struktura ma postać jak na rys. 10.2b, przy czym próbkowany jest także sygnał $u(t)$.

Dla układu z rys. 10.11 można napisać zastępczą transmitancję postulowaną:

$$G_p(z) = \frac{G_k(z)G_1(z)}{1 + G_k(z)G_1(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}, \quad (10.25)$$

skąd otrzymuje się transmitancję wymaganego korektora:

$$G_k(z) = \frac{1}{G_1(z)} \frac{G_p(z)}{1 - G_p(z)} \quad (10.26)$$



Rys. 10.11. Struktura rozpatrywanego układu dyskretnego z korektorem

Analiza zależności (10.26) prowadzi do następujących warunków nałożonych na transmitancję korektora:

1. Uzyskany korektor powinien być realizowalny, co oznacza, że w transmitancji (10.26) stopień licznika nie może być większy od stopnia mianownika. Warunek ten może być spełniony, jeśli różnica między liczbą zer i biegunów transmitancji korektora $G_k(z)$ jest taka sama, jak w transmitancji obiektu $G_l(z)$ (zauważmy, że drugi czynnik prawej strony równania (10.26) ma równą liczbę zer i biegunów). Można także w tym celu dodać w szereg z korektorem filtr dolnoprzepustowy:

$$F(z) = Z\{F(s)\}, \quad F(s) = \frac{1}{(\tau_F s + 1)^r} \quad (10.27)$$

odpowiedniego rzędu r i stałej czasowej τ_F .

2. Ponadto warunek asymptotycznej stabilności skorygowanego układu wymaga, aby zera układu $G_p(z)$ zawierały wszystkie zera transmitancji $G_l(z)$ leżące poza okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie z . Z tego też powodu niestabilne bieguny transmitancji obiektu $G_l(z)$ (leżące poza okręgiem jednostkowym) powinny być kompensowane przez zera transmitancji $1 - G_p(z)$.
3. Rozsądnym warunkiem dodatkowym jest żądanie, aby w stanie ustalonym błąd regulacji był równy 0, co oznacza:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) U(z) G_p(z) = 1 \quad (10.28)$$

W przypadku, gdy wymuszeniem jest skok jednostkowy, otrzymamy: $G_p(1) = 1$.

Spełnienie powyższych wymagań nie zawsze jest proste i często wymaga powtarzania procedury projektowej (metoda kolejnych przybliżeń).

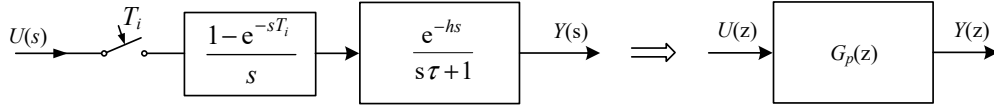
10.5.1. Algorytm Dahlina

Jednym z warunków upraszczających w procedurze projektowania korektorów jest założenie, że układ skorygowany można przedstawić za pomocą transmitancji pierwszego rzędu z opóźnieniem. Układ ciągły (z korektorem i obiektem w torze głównym) jest więc przybliżany za pomocą następującej postulowanej transmitancji:

$$G_p(s) = \frac{e^{-hs}}{s\tau + 1} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (10.29)$$

gdzie: h jest opóźnieniem wprowadzanym przez analizowany układ, τ - stała czasowa ekwiwalentnego układu.

Przechodząc do układu dyskretnego zakładamy, że w szereg z transmitancją (10.29) umieszczony jest ekstrapolator zerowego rzędu (rys. 10.12).



Rys. 10.12. Postulowany układ otwarty pierwszego rzędu

Transmitancja $G_p(z)$ przyjmuje następującą postać:

$$G_p(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{e^{-hs}}{s(s\tau + 1)}\right\} = (1 - z^{-1})z^{-N}Z\left\{\frac{1}{s(s\tau + 1)}\right\} = \frac{(1 - p)z^{-N-1}}{1 - pz^{-1}} \quad (10.30)$$

przy czym: $p = e^{-T_i/\tau}$, $h = NT_i$, skąd: $N = h/T_i$ - liczba próbek równoważna opóźnieniu h ($N \geq 1$).

Podstawiając (10.30) do (10.20), otrzymujemy transmitancję korektora, który znany jest jako korektor Dahlina [11, 51]:

$$G_k(z) = \frac{1}{G_1(z)} \frac{(1 - p)z^{-N-1}}{1 - pz^{-1} - (1 - p)z^{-N-1}} \quad (10.31)$$

Szczegółowa postać tej transmitancji może być określona po podaniu transmitancji obiektu $G_1(z)$. Na przykład dla obiektu pierwszego rzędu o transmitancji jak (10.30) otrzymamy:

$$G_k(z) = \frac{1 - p_1z^{-1}}{K(1 - p_1)} \frac{1 - p}{1 - pz^{-1} - (1 - p)z^{-N-1}}, \quad (10.32)$$

gdzie $p_1 = e^{-T/\tau_1}$, τ_1 - stała czasowa obiektu, K - współczynnik wzmocnienia.

Nastawianie korektora (10.31) odbywa się za pomocą parametru p : jego mała wartość (mała stała czasowa τ) powoduje przyspieszenie odpowiedzi, natomiast zwiększenie p prowadzi do spowolnienia regulacji.

Przykład 10.5. Dany jest dyskretny układ regulacji ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym, jak na rys. 10.13, w którym transmitancja członu w torze głównym jest następująca:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}$$

Okres próbkowania $T_i = 0,05$ s. Opóźnienie w układzie jest równe jednemu okresowi próbkowania: $h = NT_i = 0,05$, $N = 1$.

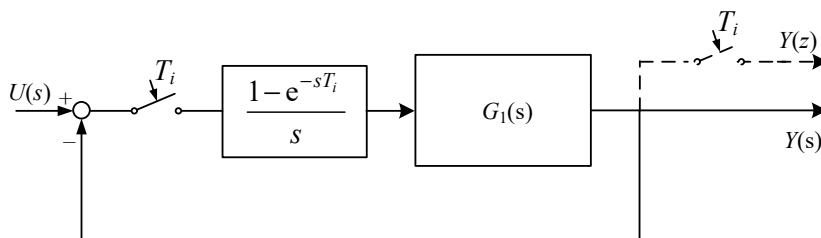
Do regulacji w układzie zamkniętym zastosować korektor Dahlina. Zbadać właściwości korektora przy różnych wartościach parametru

$$p = e^{-T_i/\tau}.$$

Transmitancja dyskretna w torze głównym układu jest równa:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= (1-z^{-1})Z\left\{\frac{e^{-hs}}{s(s+2)}\right\} = (1-z^{-1})z^{-1}Z\left\{\frac{1}{s(s+1/\tau_1)}\right\} \\ &= (1-z^{-1})z^{-1}\left(\frac{1}{(s+1/\tau_1)}\frac{z}{z-e^{sT_i}}\Bigg|_{s=0} + \frac{1}{s}\frac{z}{z-e^{sT_i}}\Bigg|_{s=-1/\tau_1}\right) = \frac{(1-z^{-1})\tau_1}{z-1} - \frac{(1-z^{-1})\tau_1}{z-e^{-T_i/\tau_1}} = \frac{\tau_1(1-p_1)z^{-1}}{1-p_1z^{-1}} \end{aligned}$$

gdzie: $\tau_1 = 0,5$, $p_1 = e^{-T_i/\tau_1} = e^{-0,05/0,5} = 0,9048$.



Rys. 10.13. Struktura rozpatrywanego układu

Na podstawie (10.31) transmitancja korektora jest następująca:

$$G_k(z) = \frac{1-p_1z^{-1}}{\tau_1(1-p_1)} \frac{1-p}{1-pz^{-1}-(1-p)z^{-2}} = \frac{R(z)}{E(z)} = \frac{b_0 - b_1z^{-1}}{a_0 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}},$$

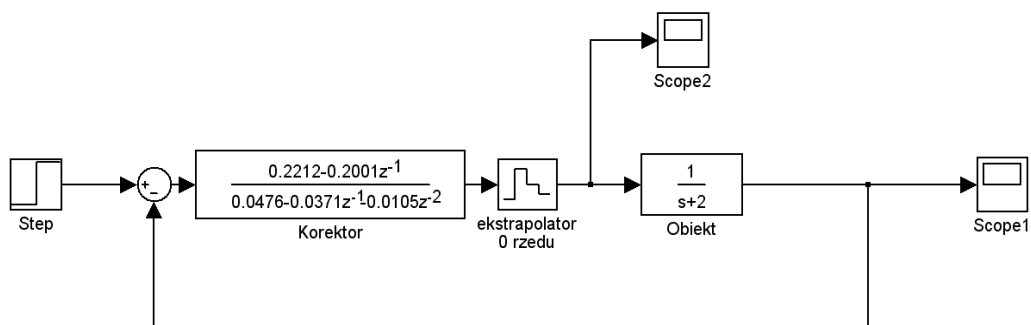
gdzie: $b_0 = 1-p$, $b_1 = (1-p)p_1$, $a_0 = (1-p_1)\tau_1$, $a_1 = (1-p_1)\tau_1 p$, $a_2 = (1-p_1)(1-p)\tau_1$.

Schemat modelu układu regulacji opracowanego w programie SIMULINK jest pokazany na rys. 10.14. Wykonane zostały badania tego układu dla trzech wartości parametru p , odpowiadających różnym stałym czasowym τ . Związane są z tym następujące wartości współczynników korektora:

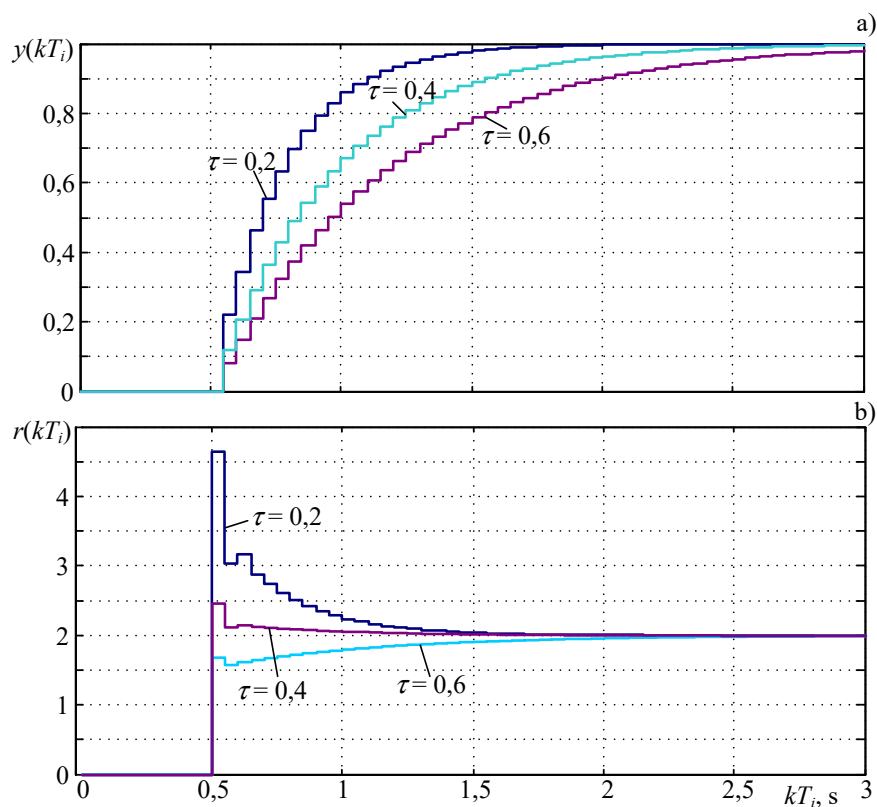
- a) $\tau = 0,6$, $p = 0,9200$, $b_0 = 0,08$, $b_1 = 0,0723$, $a_0 = 0,0476$, $a_1 = 0,0438$, $a_2 = 0,0038$;
- b) $\tau = 0,4$, $p = 0,8825$, $b_0 = 0,1175$, $b_1 = 0,1063$, $a_0 = 0,0476$, $a_1 = 0,0420$, $a_2 = 0,0056$;
- c) $\tau = 0,2$, $p = 0,7788$, $b_0 = 0,2212$, $b_1 = 0,2001$, $a_0 = 0,0476$, $a_1 = 0,0371$, $a_2 = 0,0105$.

Przebiegi sygnałów w układzie dla podanych wartości $\tau(p)$ są pokazane na rys. 10.15a, b.

Widać, że przy mniejszych wartościach parametru p zmniejsza się czas ustalania się odpowiedzi. Potwierdzają to również przebiegi sygnałów sterujących na wyjściu ekstrapolatora zerowego rzędu (rys. 10.15b).



Rys. 10.14. Model opracowanego układu w programie SIMULINK



Rys. 10.15. Przebiegi odpowiedzi układu na skok jednostkowy (a) i sygnały sterujące (b)

W przypadku korektora Dahlina utworzonego na podstawie modelu obiektu pierwszego rzędu, parametr p pełni funkcję wygodnego nastawienia. Małe wartości tego współczynnika powodują przyspieszenie ustalania się procesu, jednak będą wzmacniać niedokładności odwzorowania modelu, zwłaszcza w odniesieniu do jego opóźnień.

nienia. Zwiększenie nastawienia p spowalnia proces, jednak korekcja staje się mniej czuła na niedokładności odwzorowania obiektu.

Algorytm Dahlina może jednak prowadzić do powstania w układzie regulacji nieprzewidywalnych oscylacji („dzwonienie” w korektorze, ang. *ringing*), które pogarszają jego właściwości. Dzieje się tak zwłaszcza w przypadku, gdy obiekt regulacji jest reprezentowany modelem wyższego rzędu. Kolejny przykład ilustruje ten problem.

Przykład 10.6. Dany jest dyskretny układ regulacji ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym jak na rys. 10.13, w którym transmitancja członu w torze głównym jest następująca:

$$G_1(s) = \frac{0,06}{(s+0,2)(s+0,3)}$$

Okres próbkowania $T_i = 1$ s. W układzie brak jest systemowego opóźnienia: $h = NT_i = 0$, $N = 0$.

Do regulacji w układzie zamkniętym zastosować korektor Dahlina. Zbadać właściwości korektora.

Transmitancja układu dyskretnego w torze głównym jest następująca:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= (1-z^{-1}) Z \left\{ \frac{0,06}{s(s+0,2)(s+0,3)} \right\} = (1-z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s} - \frac{3}{s+0,2} + \frac{2}{s+0,3} \right\} \\ &= (1-z^{-1}) \left(\frac{z}{(z-1)} - \frac{3z}{(z-e^{-0,2T_i})} + \frac{2z}{(z-e^{-0,3T_i})} \right) = (z-1) \left(\frac{1}{(z-1)} - \frac{3}{(z-e^{-0,2})} + \frac{2}{(z-e^{-0,3})} \right) \\ &= \frac{0,0254z + 0,0215}{z^2 - 1,5595z + 0,6065} = \frac{(0,0254 + 0,0215z^{-1})z^{-1}}{1 - 1,5595z^{-1} + 0,6065z^{-2}} \end{aligned}$$

Zgodnie z (10.31) transmitancja korektora Dahlina jest równa:

$$G_k(z) = \frac{1}{G_1(z)} \frac{(1-p)z^{-N-1}}{1-pz^{-1}-(1-p)z^{-N-1}} = \frac{1}{G_1(z)} \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}-(1-p)z^{-1}}, \quad N = 0 \quad (\text{występuje jednak}$$

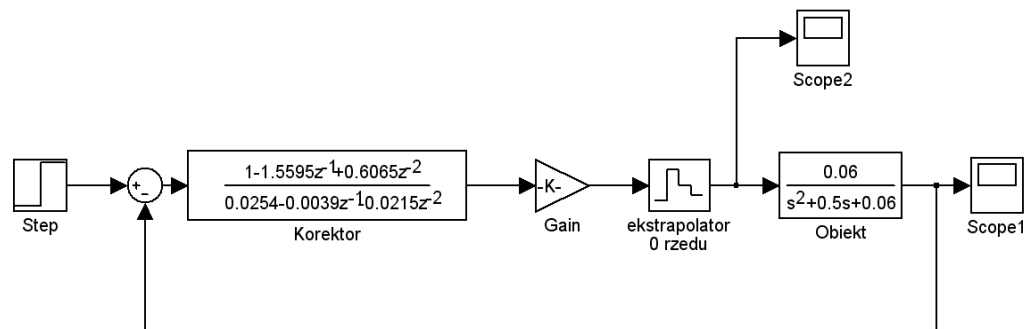
opóźnienie o jedną próbkę ze względu na sposób działania układu dyskretnego: $\tau = 1$).

Po podstawieniu transmitancji obiektu otrzymamy:

$$G_k(z) = \frac{1 - 1,5595z^{-1} + 0,6065z^{-2}}{0,0254 + 0,0215z^{-1}} \frac{(1-p)}{1-z^{-1}} = \frac{(1-p)(1 - 1,5595z^{-1} + 0,6065z^{-2})}{0,0254 - 0,0039z^{-1} + 0,0215z^{-2}}$$

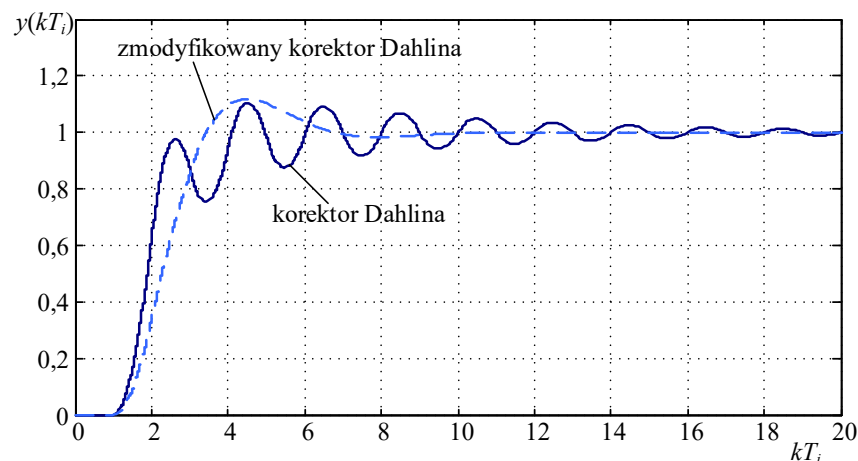
gdzie p jest parametrem korektora (nastawienie), który dla przypadku zgodności z obiektem wynosi: $p = p = e^{-T_i/\tau} = e^{-1} = 0,3679$.

Schemat modelu rozpatrywanego układu w programie SIMULINK jest pokazany na rys. 10.16. Odpowiedź tego układu na skok jednostkowy jest pokazany na rys. 10.17 (linia ciągła). Widać charakterystyczne oscylacje w odpowiedzi, które nie mają uzasadnienia w transmitancji obiektu. Ich przyczyną jest transmitancja korektora, co szczególnie dobrze widać w przebiegu sygnału sterującego na wyjściu ekstrapolatora (rys. 10.18 – linia ciągła).



Rys. 10.16. Model układu sterowania w programie SIMULINK z obiektem 2-go rzędu

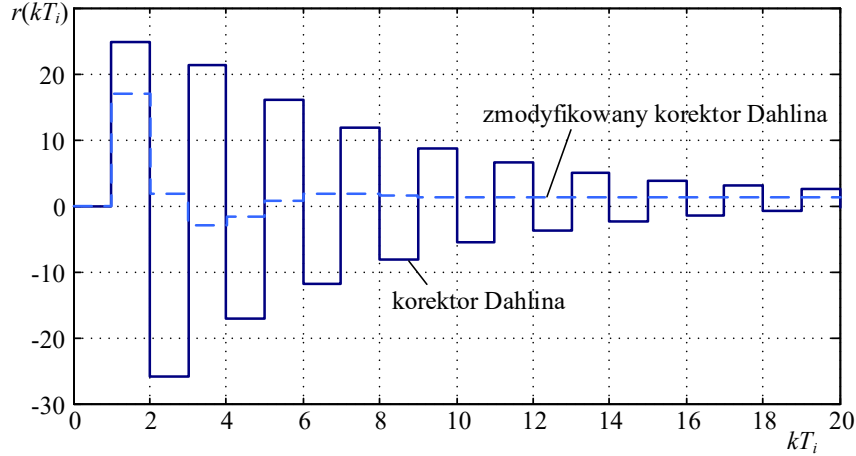
Oscylacje te są generowane przez zmiany kierunku wymuszenia na wejściu obiektu w kolejnych próbkach. Są to tzw. ‘drżania między próbkami’ za co są odpowiedzialne bieguny transmitancji korektora o ujemnej wartości rzeczywistej, leżących blisko okręgu jednostkowego. Analiza transmitancji $G_1(z)$ pokazuje, że jest za to odpowiedzialny czynnik $0,0254 + 0,0215z^{-1}$ w mianowniku transmitancji korektora. Związany z nim biegun transmitancji korektora wynosi: $z_0 = -0,8465$, a więc jest położony zbyt blisko okręgu jednostkowego.



Rys. 10.17. Odpowiedź układu na skok jednostkowy

Prostym sposobem modyfikacji tego korektora jest przyjęcie $z = 1$ we wskazanym czynniku $0,0254 + 0,0215z^{-1}$, co prowadzi do następującej zmiany jego wartości: $0,0254 + 0,0215 = 0,0469$ (odpowiedź w stanie ustalonym nie ulega zmianie). W ten sposób transmitancja zmodyfikowanego korektora Dahlina jest następująca:

$$G_k(z) = \frac{1 - 1,5595z^{-1} + 0,6065z^{-2}}{0,0469} \frac{(1-p)}{1-z^{-1}} = \frac{21,3220(1-p)(1 - 1,5595z^{-1} + 0,6065z^{-2})}{1-z^{-1}}$$



Rys. 10.18. Sygnały sterujące na wyjściu korektora

Przebiegi uzyskane na podstawie zmodyfikowanego korektora Dahlina są pokazane na rys. 10.17 oraz rys. 10.18 – linie przerywane. Można zauważyć, że modyfikacja algorytmu prowadzi do wyeliminowania uciążliwych oscylacji w przebiegach występujących w układzie regulacji.

Zmodyfikowany korektor Dahlina eliminuje niekontrolowane oscylacje w układzie, jednak w odpowiedzi układu obserwuje się przeregulowanie (rys. 10.17), którego wartość jest trudna do uwzględnienia w procesie projektowania korektora.

10.5.2. Algorytm Vogela-Edgara

Założmy, że obiekt ciągły w układzie jak na rys. 10.13 ma następującą transmitancję:

$$G_1(s) = \frac{e^{-hs}}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} \quad (10.33)$$

Transmitancja dyskretna tego obiektu, z uwzględnieniem ekstrapolatora zerowego rzędu, może być zapisana następująco (patrz przykład 10.6):

$$G_1(z) = \frac{b_1 + b_2 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-N-1}, \quad (10.34)$$

gdzie N – liczba próbek opóźnienia, odpowiadająca opóźnieniu h w (10.33).

W propozycji sformułowanej przez Vogela i Edgara (algorytm V-E) [60] dla układów, w których obiekt opisany jest transmitancją 2-go rzędu (10.33), postulowana transmitancja zamkniętego układu regulacji (10.30) jest określona następująco:

$$G_p(z) = \frac{(1-p)z^{-N-1}}{1-pz^{-1}} \frac{b_1 + b_2 z^{-1}}{b_1 + b_2} \quad (10.35)$$

przy czym: $p = e^{-T_i/\tau}$; $N = h/T_i$ – liczba próbek równoważna opóźnieniu; b_1, b_2 – współczynniki odwzorowujące licznik transmitancji obiektu.

Suma: $b_1 + b_2$ ma na celu zachowanie jedynkowego wzmocnienia statycznego.

Po podstawieniu (10.35) do (10.26), otrzymujemy transmitancję korektora V-E:

$$G_k(z) = \frac{1}{G_1(z)} \frac{(1-p)(b_1 + b_2 z^{-1})z^{-N-1}}{(b_1 + b_2)(1 - pz^{-1}) - (1-p)(b_1 + b_2 z^{-1})z^{-N-1}} \quad (10.36)$$

W szczególności, jeśli $G_1(z)$ jest jak w (10.34), transmitancja korektora ma postać:

$$G_k(z) = \frac{(1-p)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}{(b_1 + b_2)(1 - pz^{-1}) - (1-p)(b_1 + b_2 z^{-1})z^{-N-1}} \quad (10.37)$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy obiekt jest pierwszego rzędu, otrzymamy: $a_2 = b_2 = 0$, a transmitancja (10.37) zredukuje się do postaci jak w (10.32).

Przykład 10.7. Przeprowadzić syntezę korektora według algorytmu Vogela-Edgara dla układu z przykładu 10.6 i zbadać jego właściwości.

Transmitancja dyskretna obiektu z przykładu 10.6 jest następująca ($N = 0$):

$$G_1(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{0,06}{s(s+0,2)(s+0,3)}\right\} = \frac{(0,0254 + 0,0215z^{-1})z^{-1}}{1 - 1,5595z^{-1} + 0,6065z^{-2}},$$

skąd wartości współczynników w (10.34) są następujące:

$$b_1 = 0,0254, \quad b_2 = 0,0215, \quad a_1 = -1,5595, \quad a_2 = 0,6065.$$

Po podstawieniu do (10.37) transmitancja korektora przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \frac{(1-p)(1 - 1,5595z^{-1} + 0,6065z^{-2})}{0,0469(1 - pz^{-1}) - (1-p)(0,0254 + 0,0215z^{-1})z^{-1}} \\ &= \frac{(1-p)(1 - 1,5595z^{-1} + 0,6065z^{-2})}{0,0469 - (0,0215p + 0,0254)z^{-1} - 0,0215(1-p)z^{-2}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \end{aligned}$$

Parametr p może się zmieniać w granicach: $0 \leq p < 1$.

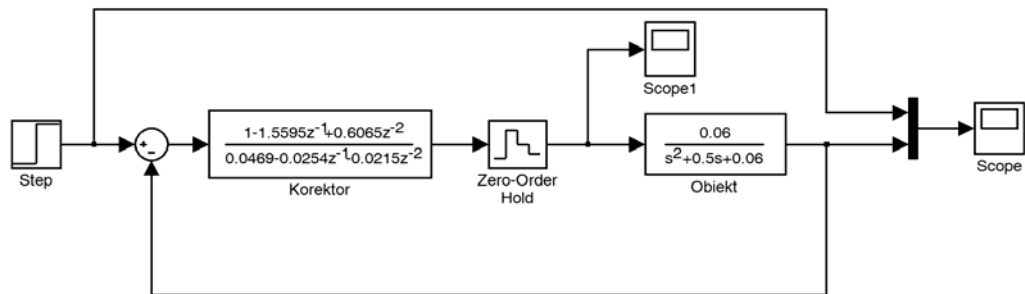
Model układu wraz z omawianym korektorem był analizowany za pomocą programu SIMULINK (rys. 10.19). Wyniki badań układu regulacji dla dwóch wartości tego parametru: $p = 0$ oraz $p = 0,5$ są pokazane na rys. 10.20 i na rys. 10.21. Współczynniki transmitancji korektora są następujące:

$$\text{a) } p = 0, \quad b_0 = 1,0, \quad b_1 = -1,5595, \quad b_2 = 0,6065, \quad a_0 = 0,0469, \quad a_1 = -0,0254, \quad a_2 = -0,0215;$$

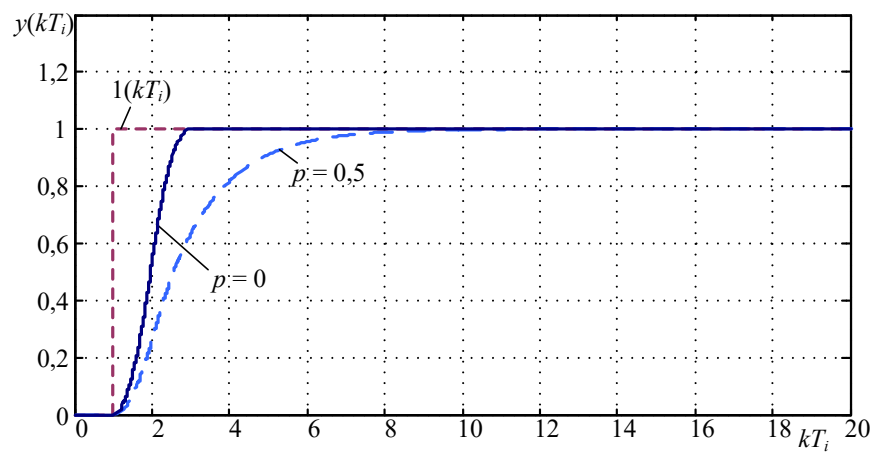
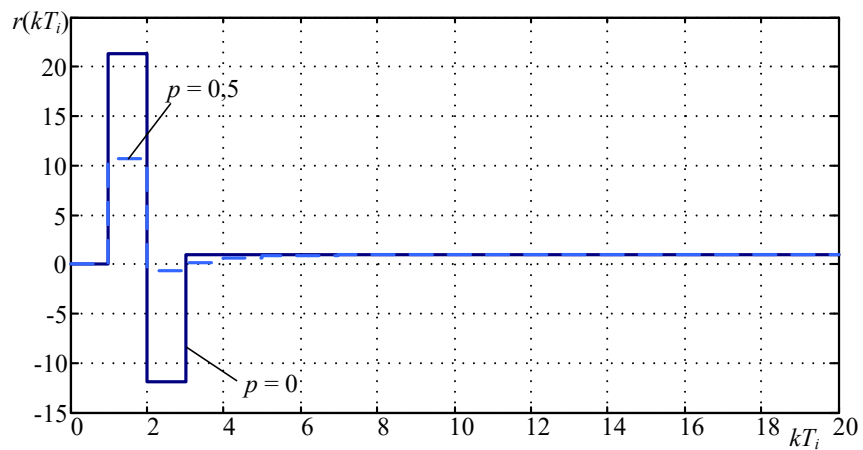
$$\text{b) } p = 0,5, \quad b_0 = 0,5, \quad b_1 = -0,7798, \quad b_2 = 0,3033, \quad a_0 = 0,0469, \quad a_1 = -0,0362, \quad a_2 = -0,0107.$$

Na podstawie przebiegów z rys. 10.20 widać, że zachowana jest tu podobna relacja w odniesieniu do nastawienia p korektora, jak w korektorze Dahlina: zmniejszenie wartości tego nastawienia powoduje ostrzejsze sterowanie. Wówczas także korektor jest bardziej czuły na niedokładności w reprezentacji modelu obiektu (zwłaszcza założenia odnośnie do czasu opóźnienia).

W przypadku skrajnej wartości $p = 0$ odpowiedź układu na skok jednostkowy ustala się już w trzeciej próbce, co można także zauważyć w przebiegu sygnału sterującego (rys. 10.21).



Rys. 10.19. Model układu w programie SIMULINK

Rys. 10.20. Przebiegi sygnałów wyjściowych na tle skoku jednostkowego dla dwóch wartości nastawień p korektora

Rys. 10.21. Przebiegi sygnału sterującego na wyjściu ekstrapolatora

Porównując uzyskane przebiegi z podobnymi, otrzymanymi dla korektora Dahlina (patrz przykład 10.6), widać, że odpowiedź układu z korektorem Vogela-Edgara nie wykazuje żadnych oscylacji, których źródłem są wymuszenia w kolejnych próbkach sygnału sterującego na wyjściu ekstrapolatora.

Korektor Vogela-Edgara można z powodzeniem stosować w odniesieniu do obiektów 1-go, jak i 2-go rzędu, których dyskretna transmitancja ma dodatnie (odwrócona odpowiedź), jak i ujemne zera, a także w przypadku obiektów wyższego rzędu [51]. Odpowiedni dobór nastawienia p pozwala także na tłumienie zakłóceń pomiarowych. Rozważany korektor jest bardziej odporny na takie zakłócenia niż korektor Dahlina.

10.5.3. Korekcja ze skończonym czasem odpowiedzi

W p. 6.4 pokazana jest transmitancja $G(z)$ układu dyskretnego, której wszystkie bieguny leżą w początku układu współrzędnych płaszczyzny z (6.50). W takim przypadku odpowiedź impulsowa jest ograniczona do skończonego czasu, co także zapewnia skończony czas trwania odpowiedzi na skok jednostkowy (długość trwania stanu przejściowego jest ograniczona). Liczba kroków stanu przejściowego jest równa $M + 1$, M – krotność zerowego bieguna transmitancji (6.50).

Zastosowanie tej zasady w odniesieniu do zastępczej transmitancji układu regulacji prowadzi do układów ze skończonym czasem trwania odpowiedzi przejściowej (ang. *deadbeat*). Powyższy warunek może być spełniony przez odpowiedni dobór korektora.

Rozpatrzmy układ dyskretny (rys. 10.13), w którym transmitancja obiektu ma następującą formę:

$$G_1(z) = \frac{L(z^{-1})}{M(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}, \quad N \geq M \quad (10.38)$$

W celu uzyskania skończonej w czasie odpowiedzi układu zamkniętego na skok jednostkowy można założyć, że transmitancja postulowanego układu jest równa (6.50):

$$G_p(z) = K \cdot L(z^{-1}) = \frac{Y(z)}{U(z)}, \quad (10.39)$$

gdzie współczynnik K powinien zapewnić ustaloną odpowiedź na skok jednostkowy równą 1.

Postulowana transformata (10.39) jest rezultatem zastosowania w analizowanym układzie szeregowego korektora o poszukiwanej transmitancji $G_k(z)$, co prowadzi do następującej zastępczej transmitancji układu zamkniętego:

$$G(z) = \frac{G_k(z) \frac{L(z^{-1})}{M(z^{-1})}}{1 + G_k(z) \frac{L(z^{-1})}{M(z^{-1})}} = \frac{G_k(z) L(z^{-1})}{M(z^{-1}) + G_k(z) L(z^{-1})} = K \cdot L(z^{-1}) = G_p(z), \quad (10.40)$$

skąd otrzymujemy transmitancję korektora:

$$G_k(z) = \frac{M(z^{-1})}{\frac{1}{K} - L(z^{-1})} \quad (10.41)$$

Wartość współczynnika K można określić na podstawie odpowiedzi układu (10.39) na skok jednostkowy:

$$Y_1(z) = K \frac{z}{z-1} L(z^{-1}), \quad (10.42)$$

która powinna być równa 1. Prowadzi to do następującej zależności:

$$y_1(kT)_{k \rightarrow \infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) K \frac{z}{z-1} L(z^{-1}) = K \cdot L(1) = 1, \quad (10.43)$$

Wynika stąd: $K = \frac{1}{L(1)}$, gdzie $L(1) = L(z^{-1})|_{z=1}$.

Wywód ten prowadzi do następującej transmitancji korektora układu o skończonym czasie odpowiedzi (ang. *deadbeat*) [42]:

$$G_k(z) = \frac{M(z^{-1})}{L(1) - L(z^{-1})} \quad (10.44)$$

Stosowanie powyższego algorytmu ilustruje kolejny przykład.

Przykład 10.8. Dany jest dyskretny układ regulacji ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym jak na rys. 10.13, w którym transmitancja członu w torze głównym jest następująca:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+5)}$$

Okres próbkowania $T_i = 0,01$ s.

Do regulacji w układzie zamkniętym zastosować korektor typu *deadbeat*.

Zbadać odpowiedź na skok jednostkowy układu z korektorem.

Transmitancja układu dyskretnego w torze głównym jest następująca:

$$G_1(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{10}{s^2(s+5)} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{2}{s^2} - \frac{0,4}{s} + \frac{0,4}{s+5} \right\}, \text{ co prowadzi do:}$$

$$\begin{aligned} G_1(z) &= (1 - z^{-1}) \left(\frac{2Tz}{(z-1)^2} - \frac{0,4z}{(z-1)} + \frac{0,4z}{(z - e^{-5T})} \right) = \frac{0,02}{(z-1)} - 0,4 + \frac{0,4(z-1)}{(z - e^{-0,05})} \\ &= \frac{0,001(0,4918z + 0,4836)}{z^2 - 1,9512z + 0,9512} = \frac{0,001(0,4918 + 0,4836z^{-1})z^{-1}}{1 - 1,9512z^{-1} + 0,9512z^{-2}} = \frac{L(z^{-1})}{M(z^{-1})} \end{aligned}$$

Obliczamy: $L(1) = 0,001 \cdot 0,9754$.

Zgodnie z (10.44) transmitancja korektora jest równa:

$$G_k(z) = \frac{1 - 1,9512z^{-1} + 0,9512z^{-2}}{L(1) - 0,001(0,4918z^{-1} + 0,4836z^{-2})} = 1000 \frac{1 - 1,9512z^{-1} + 0,9512z^{-2}}{0,9754 - 0,4918z^{-1} - 0,4836z^{-2}}$$

Można sprawdzić, że transmitancja toru głównego (układu otwartego) jest równa:

$$G_0(z) = G_k(z)G_1(z) = \frac{0,4918z^{-1} + 0,4836z^{-2}}{1 - 0,4918z^{-1} - 0,4836z^{-2}}$$

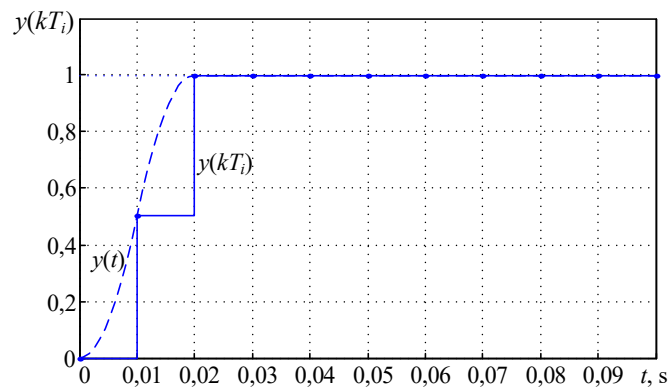
oraz zastępcza transmitancja całego układu:

$$G(z) = \frac{0,4918z^{-1} + 0,4836z^{-2}}{0,9754} = \frac{Y(z)}{U(z)} = G_p(z)$$

Wynika stąd następujący algorytm obliczania sygnału wyjściowego:

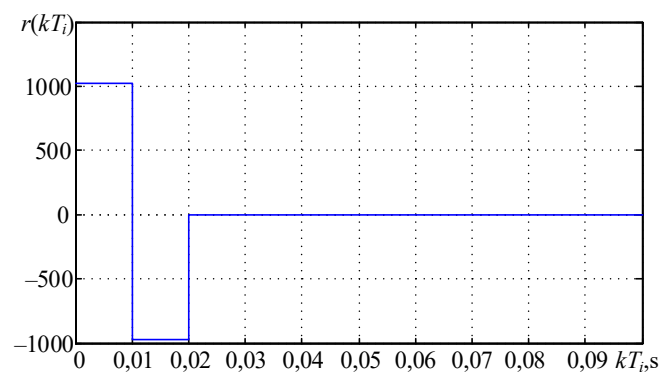
$$y(k) = 0,5042u(k-1) + 0,4958u(k-2).$$

Potwierdza to odpowiedź uzyskana z modelu pełnego układu z korektorem (rys. 10.22).



Rys. 10.22. Odpowiedź układu na skok jednostkowy

Można zauważyć, że ustalona odpowiedź następuje po dwóch próbkach sygnału sterującego (rys. 10.23).

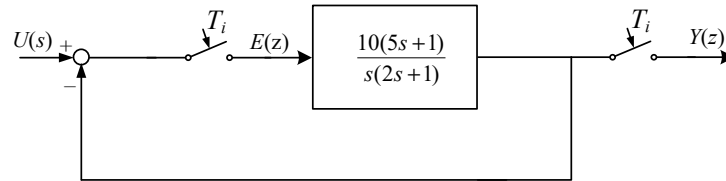


Rys. 10.23. Przebieg sygnału sterującego na wyjściu ekstrapolatora

Korektor prowadzący do skończonej odpowiedzi na skok jednostkowy daje rzeczywiście szybką odpowiedź układu. Należy jednak pamiętać, że – podobnie jak w poprzednio rozważanych korektorach – skrócenie czasu odpowiedzi jest okupione wysoką czułością na błędy pomiarowe i niedokładności odtworzenia modelu obiektu [52].

Zadania

- 10.1 W podanym układzie $T_i = 0,1$ s. Określić przebieg sygnału błędu $e(k)$ dla $u(t) = 1(t)$.

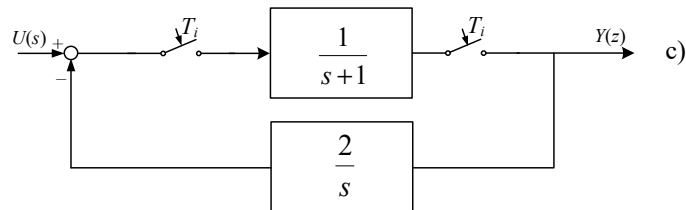
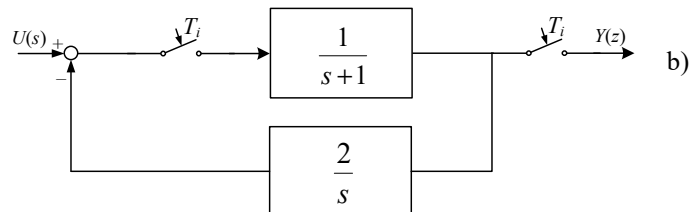
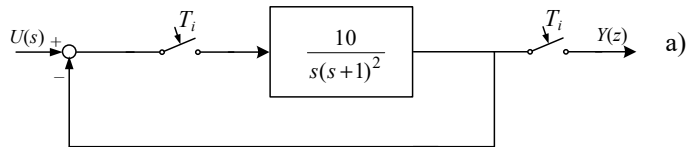


- 10.2 Transmittancja cyfrowego regulatora PID może być wyznaczona przez zastosowanie przekształcenia biliniowego w odniesieniu do transmittancji regulatora ciągłego. W ten sposób otrzymamy:

$$G_k(z) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_i}{2} \frac{z+1}{z-1} + T_D \frac{2}{T_i} \frac{z-1}{z+1} \right)$$

Wyznaczyć odpowiedź na skok jednostkowy tego korektora przy następujących parametrach: $K_P = 2,25$, $T_I = 3,2$, $T_D = 0,8$, $T_i = 0,01$ s.

- 10.3 Określić uchyb ustalony położenia w podanych układach. Okres impulsowania $T_i = 0,1$ s.



- 10.4 Dany jest dyskretny układ regulacji ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym jak na rys. 10.13, w którym transmitancja członu w torze głównym jest następująca:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+5)}$$

Okres próbkowania $T_i = 0,04$ s. Do regulacji w układzie zamkniętym zastosowano dyskretny regulator proporcjonalny o wzmacnieniu K . Zbadać odpowiedź na skok jednostkowy układu z korektorem. Przeanalizować wartości przeregulowania oraz uchybu statycznego dla różnych wartości K .

- 10.5 Dany jest układ regulacji ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym, w którym obiekt jest określony przez następującą transmitancję (przykład 9.2):

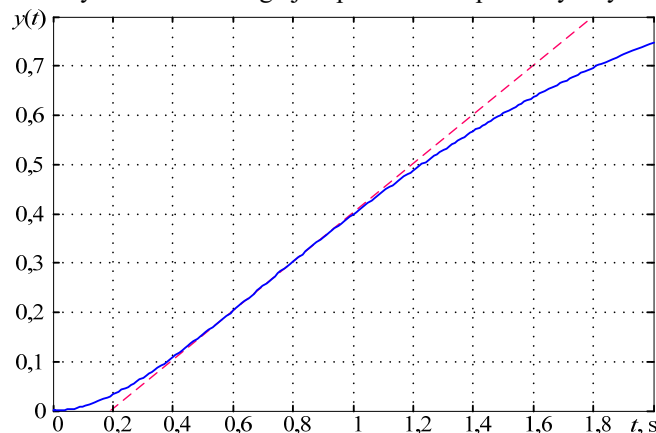
$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)(10s+1)}$$

Korzystając z wyników przykładu 9.2, zaproponować dyskretny układ regulacji z korektorem cyfrowym. Określić algorytm działania korektora w postaci funkcji dyskretnego czasu. Przyjąć okres impulsowania $T_i = 0,1$ s.

- 10.6 Dyskretny układ regulacji z obiektem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

zawiera impulsator zerowego rzędu z okresem impulsowania $T_i = 0,05$ s. Odpowiedź na skok jednostkowy układu otwartego jest pokazana na poniższym rysunku.



Dobrać cyfrowe regulatory PID oraz PI według procedury Takahasi'ego. Porównać właściwości obu utworzonych układów regulacji.

- 10.7 Do regulacji procesu z obiektem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+4)^2} e^{-0,2s}$$

zastosowano układ dyskretny z impulsatorem zerowego rzędu o okresie impulsowania $T_i = 0,1$ s oraz regulatorem PID. Dobrać nastawienia regulatora według procedury Takahasi'ego i zbadać dynamiczne właściwości uzyskanego układu.

- 10.8 Zaprojektować dyskretny sterownik Dahlina do układu z obiektem o transmitancji:

$$\text{a) } G_1(s) = \frac{e^{-2s}}{5s+1}, \text{ b) } G_1(s) = \frac{3,2}{s(0,8s+1)} e^{-0,5s}$$

Przyjąć okres impulsowania, odpowiednio: a) $T_i = 1$ s, b) $T_i = 0,1$ s.

- 10.9 Zaprojektować dyskretny sterownik Dahlina do układu z obiektem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{e^{-s}}{(5s+1)(2s+1)}$$

Przyjąć, że na wejściu obiektu znajduje się ekstrapolator zerowego rzędu o okresie impulsowania $T_i = 1$ s. Zbadać efekt 'dzwonienia' w korektorze, analizując sygnały na wyjściu korektora oraz na wyjściu obiektu. Zmodyfikować algorytm w celu usunięcia 'dzwonienia' i przeanalizować uzyskane wyniki.

- 10.10 Dla obiektu z zadania 10.9 zaprojektować sterownik Vogela-Edgara. Porównać uzyskane wyniki z rezultatami otrzymanymi przy zmodyfikowanym algorytmie Dahlina.

- 10.11 Dla procesu z zadania 10.9 zaprojektować sterownik Vogela-Edgara. Porównać uzyskane wyniki z rezultatami otrzymanymi w zadaniu 10.9 z regulatorem PID. Ocenić właściwości zastosowanych korektorów.

- 10.12 Dany jest dyskretny układ regulacji ze sztywnym sprzężeniem zwrotnym jak na rys. 10.13, w którym transmitancja członu w torze głównym jest następująca:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Okres próbkowania $T_i = 0,1$ s. Do regulacji w układzie zamkniętym zastosować korektor typu *deadbeat*. Zbadać odpowiedź na skok jednostkowy układu z korektorem.

- 10.13 Zaprojektować sterownik z minimalnym czasem odpowiedzi do układu z obiektem o transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{1}{(5s+1)(10s+1)}$$

Przyjąć, że na wejściu obiektu znajduje się ekstrapolator zerowego rzędu o okresie impulsowania $T_i = 1$ s. Zbadać efekt 'dzwonienia' w korektorze, analizując sygnały na wyjściu korektora oraz na wyjściu obiektu. Zmodyfikować algorytm w celu usunięcia 'dzwonienia' i przeanalizować uzyskane wyniki.

11. NIELINIOWE UKŁADY REGULACJI

11.1. Wprowadzenie

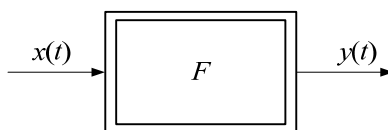
Określenie: system (układ) nieliniowy odnosi się do takich procesów (obiektów), które są modelowane (opisywane) za pomocą nieliniowych równań matematycznych. Charakterystyczną cechą takiego opisu, która odróżnia je od systemów liniowych, jest to, że nie stosuje się do nich zasada superpozycji (p. 2.1). Wartość i charakter odpowiedzi układu nieliniowego zależy od bieżącej wartości sygnału wymuszającego. Przy wymuszeniu sinusoidalnym o określonej częstotliwości w odpowiedzi pojawiają się także inne częstotliwości. Konsekwencją tego jest utrata jednoznacznego związku pomiędzy dziedzinami czasu i częstotliwości w opisie systemów nieliniowych. Zatem przekształcenia całkowite (Fouriera, Laplace'a) stają się nieużyteczne w odniesieniu do tych systemów. Inną cechą, o której należy pamiętać przy analizie systemów nieliniowych, jest brak komutatywności, co oznacza, że nie można zmieniać kolejności występowania poszczególnych elementów w systemie. Wynika to bezpośrednio stąd, że odpowiedź układu jest nieliniową funkcją wymuszenia.

Konieczność stosowania nieliniowego modelu układu regulacji może wynikać z powodu występowania wyraźnej nieliniowości rzeczywistego obiektu. W takim przypadku przyjęcie liniowego opisu systemu prowadzi do istotnych błędów, które uniemożliwiają realizację regulacji. Innym powodem może być celowe wprowadzenie nieliniowości, aby uzyskać pożądane cechy układu, prostszą zasadę regulacji, obniżenie ceny itp.

Kluczowym zagadnieniem związanym z teorią systemów nieliniowych (podobnie jak w odniesieniu do systemów liniowych) jest stabilność. Całościowe ujęcie tego problemu zostało podane w pracy doktorskiej A.M. Lapunowa⁴³ na temat: *‘Ogólne zagadnienie stabilności ruchu’*. Praca ta stała się źródłem wielu metod oceny stabilności rozmaitych systemów dynamicznych, jak: stacjonarnych i niestacjonarnych (gdy parametry systemu zależą od czasu), ciągłych i dyskretnych, deterministycznych i stochastycznych oraz systemów klasyfikowanych według jeszcze innych kryteriów. W tym rozdziale ograniczymy się do przeglądu podstawowych metod badania stabilności nieliniowych systemów ciągłych, stacjonarnych.

⁴³ Aleksandr Michajłowicz Lapunow (1857 – 1918). Twórca współczesnej teorii stabilności. Główne tezy tej teorii zostały zaprezentowane w pracy doktorskiej: *Общая задача об устойчивости движения*, obronionej w 1892 roku.

Ze względu na dużą różnorodność cech układów nieliniowych i ich specyficznych charakterystyk, powstało wiele praktycznych metod syntezy takich systemów i badania ich stabilności, które wywodzą się z ogólnych zasad teorii stabilności podanej przez Lapunowa. W dalszej części rozdziału będziemy rozpatrywać przede wszystkim układy jednowymiarowe (*SISO*). Schemat takiego układu jest pokazany na rys. 11.1. Podwójna ramka oznacza blok nieliniowy. Funkcja F określa sposób przetwarzania realizowany przez oznaczony układ.



Rys. 11.1. Schemat układu nieliniowego

Ogólna zasada przetwarzania w bloku z rys. 11.1 jest podobna jak w przypadku układu liniowego (rys. 2.3), przy czym F jest wyrażone zależnością nieliniową. Funkcję tę można określić następująco:

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^m y}{dt^m}\right) = 0 \quad (11.1)$$

Gdy argumentem funkcji F jest także czas t , to mamy do czynienia z układem niestacjonarnym. Jeśli w takim opisie wydzielić relacje, które nie są związane z dynamiką procesu (nie występują w nich pochodne), to otrzymamy funkcję układu statycznego:

$$f(x, y) = 0 \quad (11.2)$$

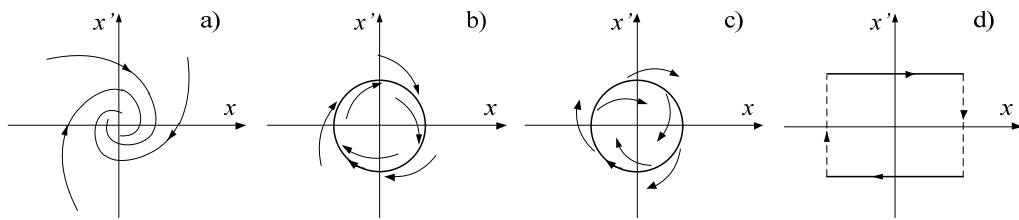
Niekiedy udaje się bezpośrednio określić statyczne zależności pomiędzy wejściem i wyjściem:

$$y = f_1(x, y) \quad (11.3)$$

Należy zauważyć, że rozpatrywany system jest nieliniowy, jeśli nieliniowy jest model (11.1). Nieliniowość statyczna występuje wtedy, gdy równanie (11.2) jest nieliniowe, natomiast nieliniowość dynamiczna charakteryzuje się nieliniową zależnością wyjścia od bieżących i poprzednich wartości wejść, co w (11.1) odzwierciedlają zależności różniczkowe.

Rozwiązanie równania (11.1) dla $t \rightarrow \infty$ wyznacza *punkty równowagi* rozpatrywanego systemu nieliniowego. Charakterystyczną cechą takich systemów jest możliwość istnienia kilku punktów równowagi (system liniowy ma tylko jedno rozwiązanie, odpowiadające wartości ustalonej procesu). W nieliniowym systemie swobodnym (bez wymuszenia), osiągnięcie konkretnego punktu równowagi zależy od warunków początkowych.

Analizę układu nieliniowego wygodnie jest prowadzić w oparciu o płaszczyznę fazową, która jest wyznaczona przez prostokątny układ współrzędnych (x, x') . Trajektorie wyznaczone przez punkty rozwiązania funkcji (11.1) w czasie dla wybranych warunków początkowych pokazują sposób zachowania się układu w otoczeniu punktów równowagi. Krzywe wyznaczone przez trajektorie na płaszczyźnie fazowej tworzą portret fazowy systemu. Niektóre przykłady przebiegu trajektorii fazowych są pokazane na rys. 11.2.



Rys. 11.2. Trajektorie na płaszczyźnie fazowej: układ II-go rzędu z punktem równowagi w początku układu współrzędnych (a); cykl graniczny generatora przebiegu harmonicznego (b); cykl graniczny niestabilny (c); cykl graniczny generatora przebiegu trójkątnego (d)

Trajektoria na rys. 11.2a odpowiada układowi II-go rzędu z wyraźnym tłumieniem. Dla dowolnych warunków początkowych trajektoria zmierza do punktu równowagi w początku układu współrzędnych. Jest to statyczny punkt przyciągania (statyczny atraktor), do którego dąży układ z upływem czasu.

Na rys. 11.2b jest pokazana charakterystyczna trajektoria w formie pętli, do której zmierzają wszystkie przejściowe trajektorie niezależnie od warunków początkowych. Zamknięta trajektoria wyznacza cykl graniczny układu, który jest rezultatem okresowego rozwiązania równania systemu nieliniowego. W tym przypadku jest to okrąg o środku w początku układu współrzędnych. Związany z nim przebieg ustalony przedstawia sinusoidę. Podobny cykl graniczny jest pokazany na rys. 11.2c. Jest to jednak cykl niestabilny: każde naruszenie równowagi prowadzi do początku układu (lub innego, wewnętrznego cyklu granicznego), czy też do obszaru zewnętrznego. W układach nieliniowych cykle graniczne mają najczęściej bardziej zróżnicowane kształty, którym w dziedzinie czasu odpowiadają odkształcone przebiegi okresowe.

Cykl graniczny także tworzy trajektoria pokazana na rys. 11.2d. Linia przerywaną zaznaczono zmianę znaku pochodnej x' , natomiast linie poziome odpowiadają narastaniu lub opadaniu wartości x , co jest charakterystyczne dla przebiegu o kształcie trójkątnym.

Trajektorie na płaszczyźnie fazowej (w przypadku układów wielowymiarowych jest to przestrzeń fazowa) odwzorowują swego rodzaju pola (przestrzenie) przyciągania lub odpychania poszczególnych punktów (cykli) równowagi. Jest to wygodne narzędzie do analizy układów nieliniowych, a także do określenia sposobów ich korek-

cji. W przypadku kilku punktów równowagi, lepiej jest analizować ich otoczenie po sprowadzeniu tych punktów (lub geometrycznych środków odpowiednich cykli) do początku układu współrzędnych (oddzielnie dla każdego z nich).

W przypadku układów, których dynamika jest określona przez równanie różniczkowe rzędu wyższego niż pierwszy, można metodą podstawiania przedstawić funkcję (11.1) w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu, które są równaniami stanu o następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (11.4)$$

gdzie: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ - wektor zmiennych stanu, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ - wektor wymuszeń (zauważmy, że te zmienne mają inną interpretację niż na rys. 11.1), $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ - wektor kolejnych funkcji.

Podobnie można zapisać funkcję określającą wektor wyjść:

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = [y_1, y_2, \dots, y_p]^T \quad (11.5)$$

Równania (11.4), (11.5) opisują ogólny układ o m wejściach i p wyjściach (*MI-MO*), jednak dalej będziemy się zajmować głównie układami *SISO*: $m = p = 1$.

Współrzędnymi płaszczyzny (przestrzeni) fazowej w systemach opisanych równaniami stanu są kolejne zmienne stanu.

Przykład 11.1. Dany jest układ nieliniowy jak na rys. 11.1, który jest opisany następującym równaniem:

$$f_1(x, y) = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + f_2(x, y), \text{ gdzie: } f_2(x, y) = x + x^2 = y.$$

Wyznaczyć punkty równowagi układu i narysować jego portret fazowy.

Zapisać równanie przetwarzania w postaci zmiennych stanu.

Punkty równowagi określamy z równania:

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) = x + x^2 = 0 \text{ (wszystkie pochodne są równe zero).}$$

Stąd otrzymujemy: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

Równania zmiennych stanu można otrzymać przez podstawienie:

$$w_1 = x$$

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = w_2,$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -w_1 - w_1^2 - 2w_2 \text{ - na podstawie: } f_1(x, y) = 0.$$

W postaci macierzowej przyjmuje to następującą formę:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ -w_1 - w_1^2 - 2w_2 \end{bmatrix}, \text{ z warunkami początkowymi: } \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1(0)} \\ w_{2(0)} \end{bmatrix}.$$

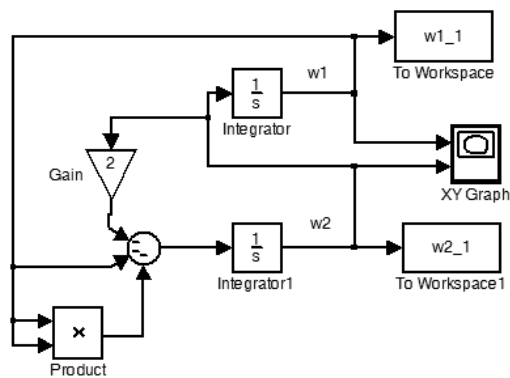
Przyrównując funkcje prawej strony równań stanu do zera otrzymamy punkty równowagi:

$$w_2 = 0,$$

$$-w_1 - w_1^2 - 2w_2 = 0, \text{ skąd: } w_{11} = 0, w_{12} = -1.$$

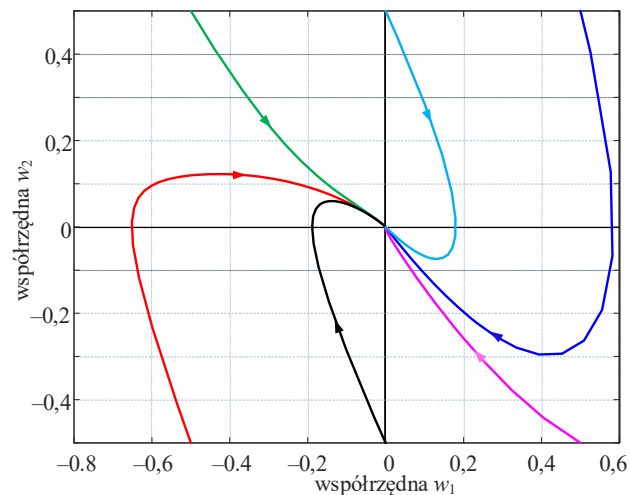
Otrzymaliśmy więc dwa punkty równowagi $(w_1, w_2) = (0, 0)$ oraz $(w_1, w_2) = (-1, 0)$. Pierwszy z tych punktów znajduje się w początku układu współrzędnych, więc można bezpośrednio narysować portret fazowy, rozwiązując podane równanie stanu dla warunków początkowych w pobliżu punktu równowagi.

Do rozwiązania równania stanu można posłużyć się programem SIMULINK. Schemat odpowiedniego modelu jest pokazany na rys. 11.3.



Rys. 11.3. Model do rozwiązywania równań stanu

Zmieniając warunki początkowe w integratorach dla w_1 oraz w_2 , otrzymamy trajektorie rozwiązań, które są zapisywane w pamięci (*workspace*). Ich prezentacja na jednym rysunku daje obraz fazowy analizowanego układu (rys. 11.4).



Rys. 11.4. Obraz fazowy w otoczeniu punktu $(0, 0)$

Widać, że punkt $(0, 0)$ jest punktem przyciągającym (atraktorem) rozpatrywanego układu. Drugi punkt równowagi: $(w_1, w_2) = (-1, 0)$ jest przesunięty wzdłuż osi w_1 . W celu otrzymania porównywalnych wyników, należy przesunąć o tę wartość układ współrzędnych, aby jego początek pokrywał się z tym punktem. W tym celu dokonujemy podstawienia:

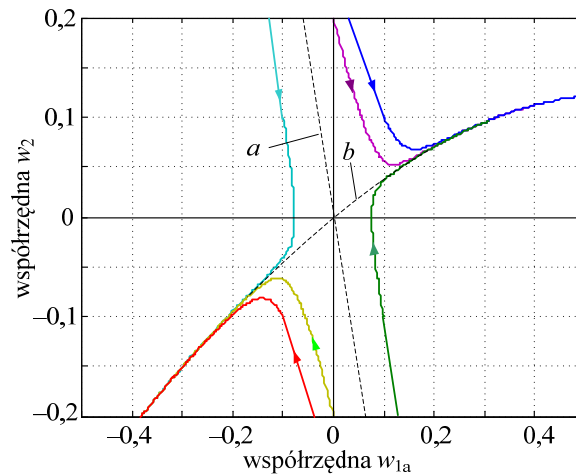
$$w_1 = w_{1a} - 1$$

Równania stanu z nową zmienną w_{1a} przyjmują następującą postać:

$$\frac{dw_{1a}}{dt} = w_2$$

$$\frac{dw_2}{dt} = w_{1a} - w_{1a}^2 - 2w_2$$

Można zauważyć, że w tym przesuniętym układzie współrzędnych zmienił się znak składnika w_{1a} w drugim równaniu. Prowadzi to do całkowicie odmiennego portretu fazowego układu w punkcie $(-1, 0)$ (rys. 11.5).



Rys. 11.5. Obraz fazowy w otoczeniu punktu $(-1, 0)$, do którego sprowadzony został początek układu współrzędnych

Można zauważyć, że asymptota a oddziela obszar przyciągania punktu $(w_1, w_2) = (0, 0)$ – na rys. 11.5 jest to punkt $(w_{1a}, w_2) = (1, 0)$ – leżącego po prawej stronie tej asymptoty, od obszaru wiodącego do nieskończoności wzdłuż krzywej b (na lewo od początku układu współrzędnych).

Z tej analizy widać, że punkt $(w_1, w_2) = (0, 0)$ jest lokalnie stabilny, natomiast punkt $(w_1, w_2) = (-1, 0)$ jest niestabilny.

Układ opisany zgodnie z (11.4) jest układem autonomicznym, jeśli nie jest poddany zewnętrznym wymuszeniom: $\mathbf{u} = 0$. Wówczas:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (11.6)$$

Zakłada się, że funkcja $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ jest różniczkowalna względem wektora $\mathbf{x}$. Wektor $\mathbf{x}_r$, który jest rozwiązaniem równania (jeśli takie rozwiązanie istnieje):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_r) = [f_1(x_r) \ f_2(x_r) \ \dots \ f_n(x_r)]^T = 0, \quad (11.7)$$

określa punkty równowagi układu (lub cykle graniczne). Jest to ten sam zbiór punktów, który wynika z rozwiązania (11.1).

Metoda płaszczyzny fazowej jest bardzo ważnym narzędziem badania układów nieliniowych – zwłaszcza oceny ich stabilności oraz projektowania. Łączy się ona z *pierwszą metodą Lapunowa*, która pozwala badać stabilność lokalną w bezpośrednim sąsiedztwie punktów równowagi. Stosuje się w tym celu linearyzację statycznej funkcji składającej się na opis układu nieliniowego w pobliżu punktów równowagi. Aproxymujący układ liniowy można badać za pomocą znanych metod odnoszących się do systemów liniowych. Rozszerzenie tego podejścia, z pominięciem linearyzacji, prowadzi do *bezpośredniej metody Lapunowa*, która jest dalej omówiona.

Innym sposobem linearyzacji układów nieliniowych jest *metoda linearyzacji harmonicznej*, którą można stosować do systemów, w których podstawowa energia związana z odpowiedzią na zadane wymuszenie jest zlokalizowana w podstawowej harmonicznej (częstotliwości własnej układu). Wynikający stąd sposób analizy jest także znany, jako *metoda funkcji opisującej*.

Na zakończenie rozdziału podane są zadania z przykładami zastosowania niektórych metod do badania stabilności i realizacji nieliniowych układów regulacji.

11.2. Stabilność układów nieliniowych

11.2.1. Definicje stabilności

Założmy, że w rezultacie rozwiązania równania (11.7) zostały określone punkty równowagi $\mathbf{x}_r = [x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rm}]^T$. W tych punktach pochodna wektora stanu względem czasu jest równa zero: $\dot{\mathbf{x}} = 0$, co oznacza, że stan układu jest ustalony.

Zachowanie się układu w pobliżu punktu równowagi można zbadać przez niewielką zmianę wektora $\mathbf{x}$ względem punktu równowagi $\mathbf{x}_r$: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \Delta\mathbf{x}$, co spowoduje odpowiednią zmianę funkcji: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_r) + \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Przy tych założeniach funkcję $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ można przedstawić w postaci szeregu Taylora w otoczeniu punktu $\mathbf{x}_r$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_r) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^2 + \dots = \mathbf{f}(\mathbf{x}_r) + \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (11.8)$$

Jeśli przyjąć liniową aproksymację rozwinięcia funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ w pobliżu punktu równowagi, to w szeregu (11.8) należy zachować tylko dwa pierwsze składniki:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_r) + \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_r) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \quad (11.9)$$

Wygodnie jest rozpatrywać system (11.6) po jego sprowadzeniu do takiego układu, w którym punkt równowagi znajduje się w początku układu współrzędnych. Jeśli $\mathbf{f}(\mathbf{x}_r) = 0$, to (11.9) sprowadza się do następującej postaci:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) = \mathbf{A}_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r), \quad (11.10)$$

$$\text{gdzie } \mathbf{A}_r = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r}.$$

Taka transformacja wymaga podstawienia: $\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{x}_r$, gdzie: $\mathbf{z}$ – wektor zmiennych systemu sprowadzonego do oryginalnego równania (11.6):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_r) = \dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{x}}_r = \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}) \quad (11.11)$$

Szczegóły takiej transformacji są pokazane w przykładzie 11.2. Pozostając przy poprzednich oznaczeniach, możemy napisać, że autonomiczny system nieliniowy (11.6), którego punkt równowagi jest położony w początku układu współrzędnych: $\mathbf{x}_r = 0$, przy dostatecznie małych wartościach $\mathbf{x}$ może być przybliżony za pomocą następującej zależności:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (11.12)$$

gdzie $\mathbf{A} = \mathbf{A}_r|_{\mathbf{x}_r=0}$.

W odniesieniu do takiego punktu równowagi ($\mathbf{x}_r = 0$) definiowana jest tzw. *stabilność lokalna*, co odpowiada następującemu opisowi.

Początek układu współrzędnych systemu (11.6) jest punktem stabilnym, jeśli dla każdej rzeczywistej liczby $\varepsilon > 0$ i początkowego czasu $t_0 > 0$, występuje taka rzeczywista liczba $\delta > 0$, że dla dowolnych warunków początkowych spełniających zależność:

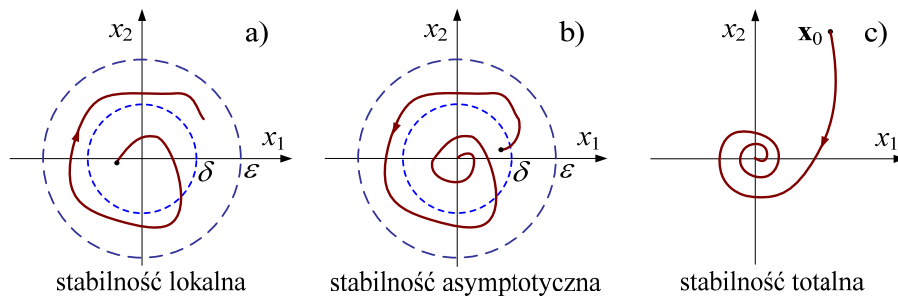
$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta,$$

ruch systemu jest ograniczony do następującej przestrzeni:

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \text{ dla każdego } t > t_0.$$

Inaczej mówiąc, układ jest stabilny, jeśli dla danego obszaru wokół początku układu współrzędnych o promieniu ε , znajdziemy obszar warunków początkowych o promie-

niu δ , startując z których, trajektoria ruchu nie przekroczy obszaru wyznaczonego przez promień ε . Ilustracja tej definicji stabilności jest pokazana na rys. 11.6a.



Rys. 11.6. Obraz fazowy

Bardziej praktyczne znaczenie ma następująca definicja stabilności asymptotycznej. Początek układu współrzędnych jest stabilny asymptotycznie, gdy jest on stabilny, a ponadto jego trajektoria ruchu, w miarę upływu czasu, zmierza do punktu równowagi, co można zapisać następująco:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$$

Ilustracja tej definicji jest pokazana na rys. 11.6b.

Powyższe definicje odnoszą się do stabilności lokalnej, która jest związana z bezpośrednim sąsiedztwem punktu równowagi. Wówczas pole warunków początkowych jest ograniczone do dowolnie małego obszaru o promieniu δ . Gdy obszar stabilności systemu jest związany z pewnym ograniczonym rejonem przestrzeni fazowej, to mówimy o *stabilności globalnej*. Najbardziej pożądaną cechą systemu nieliniowego, z punktu widzenia stabilności, jest *stabilność totalna*, tzn. aby był stabilny dla dowolnych warunków początkowych (rys. 11.6c).

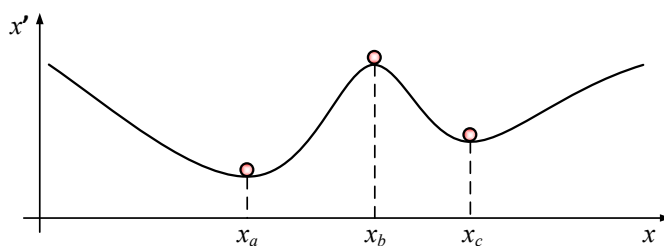
11.2.2. Stabilność lokalna

Ogólna ocena stabilności układu nieliniowego jest zadaniem złożonym. Sformułowane w tym zakresie zasady Lapunowa dzieli się na dwie kategorie: - pierwsza metoda Lapunowa, pozwalająca określić stabilność lokalną oraz druga (bezpośrednia), właściwa do oceny stabilności globalnej lub totalnej.

Pierwsza metoda Lapunowa (metoda pośrednia, lokalna) pozwala określić stabilność układu w sąsiedztwie punktów jego równowagi. Podstawowym założeniem leżącym u podstaw tej metody jest dopuszczenie możliwości przybliżenia analizowanego systemu nieliniowego w otoczeniu punktów równowagi za pomocą uproszczonych zależności liniowych. Przy tym założeniu, znajdujący się w punkcie równowagi sys-

tem nieliniowy, przy małych wymuszeniach może być analizowany jak system liniowy. Analiza prowadzona w tych warunkach ma na celu zbadanie, czy zlinearyzowany system jest stabilny. Do oceny tej właściwości można stosować kryteria odnoszące się do systemów liniowych.

Zagadnienie to jest często ilustrowane za pomocą kulki, której ruchy są ograniczone przez powierzchnię ukształtowaną jak na rys. 11.7.



Rys. 11.7. Ilustracja I-szej metody Lapunowa

Kulka może przyjąć jedną z trzech pozycji równowagi, które są związane z położeniem x , gdy $x' = 0$. W tych punktach zmienna x osiąga ustaloną pozycję (punkt równowagi). Jeśli warunki początkowe $x(t_0)$ zostaną wybrane stosownie do zaznaczonych na rysunku punktów równowagi, to układ w nich pozostanie. Sposób zachowania się układu przy niewielkiej zmianie tych pozycji zależy od tego, czy dany punkt równowagi jest stabilny, czy też nie. Zauważmy, że w przypadku układu liniowego zawsze wystąpi tylko jeden punkt równowagi, z którym można związać początek układu współrzędnych fazowych.

Badanie stabilności lokalnej przez linearyzację (według pierwszej metody Lapunowa) sprowadza się do następujących kroków.

1. Zapisać równanie dynamiki rozpatrywanego systemu w postaci równań stanu (11.6) (patrz przykład 11.1). Rozwiązując równanie (11.7), wyznaczyć punkty x_r równowagi układu. Przekształcić równania układu zgodnie z (11.11), aby punkty równowagi znalazły się w początku układu współrzędnych fazowych.
2. Przeprowadzić linearyzację równań opisujących układ. Standardowa metoda polega na rozkładzie równań nieliniowych w szereg Taylora w otoczeniu punktu równowagi, pozostawiając do dalszej analizy liniową część, utworzoną z dwóch pierwszych wyrazów tego rozkładu (11.12). W przypadku układu jednowymiarowego mamy do czynienia z jednym równaniem (równanie różniczkowe pierwszego rzędu):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad (11.13)$$

gdzie $\lambda = \alpha + j\beta = f'(x)|_{x=0}$.

Równanie (11.13) jest liniową aproksymacją nieliniowego modelu systemu (11.6) (dla przypadku jednowymiarowego).

3. Zbadać warunki stabilności uzyskanego liniowego równania, aproksymującego oryginalne równanie nieliniowe. Rozwiązanie równania różniczkowego (11.13) ma następującą postać (p. 2.3.1):

$$x(t) = Ce^{\lambda t} = Ce^{\alpha t} e^{j\beta t}, \quad (11.14)$$

gdzie $C = x(0)$.

Jak widać, warunek stabilności tego rozwiązania jest określony przez następującą relację:

$$\operatorname{Re}\{\lambda\} = \alpha < 0 \quad (11.15)$$

Jeśli $\alpha = 0$, to układ nie jest stabilny. Zazwyczaj oznacza to, że stosowana metoda nie pozwala ocenić stabilności układu.

W przypadku układu wielowymiarowego postępowanie jest podobne, przy czym należy stosować zapis macierzowy (11.12). Macierz $\mathbf{A}$ (jakobian) jest macierzą kwadratową utworzoną ze współczynników, które są obliczane, jako pochodne kolejnych funkcji w równaniu stanu, w odpowiadających im punktach równowagi. Zauważmy, że równanie układu zlinearyzowanego (11.12) jest identyczne, jak jednorodne równanie stanu systemu liniowego (8.10). Warunek jego stabilności jest określony przez wartości własne macierzy $\mathbf{A}$, które są pierwiastkami równania charakterystycznego (8.22).

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} = \alpha_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.16)$$

gdzie $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ – wartości własne macierzy $\mathbf{A}$.

Przykład 11.2. Dany jest układ nieliniowy jak na rys. 11.1, który jest opisany następującym równaniem:

$$f_1(x) = 2 \frac{dx}{dt} + f_2(x), \quad \text{gdzie: } f_2(x) = 1 + x + x^2.$$

Zapisać równanie przetwarzania w postaci zmiennych stanu.

Wyznaczyć punkty równowagi układu i narysować jego portret fazowy.

Zbadać stabilność układu w punktach równowagi.

Punkty równowagi określamy z równania części statycznej układu:

$1 + x + x^2 = 0$, skąd otrzymujemy dwa punkty równowagi:

$$x_1 = -0,5 + j\sqrt{3}/2,$$

$$x_2 = -0,5 - j\sqrt{3}/2.$$

Jest to układ *SISO* I-go rzędu, więc równanie stanu bezpośrednio wynika z podanego równania przetwarzania:

$$f_1(x) = 2 \frac{dx}{dt} + 1 + x + x^2 = 0, \text{ więc: } \frac{dx}{dt} = \frac{-1}{2}(1 + x + x^2) = f(x).$$

Transformujemy funkcję $f(x)$ tak, aby punkty równowagi znalazły się w początku układu współrzędnych (11.11). Dla kolejnych punktów otrzymamy:

$$\text{dla } x_r = x_{r1} = -0,5 + j\sqrt{3}/2:$$

$$f(x) = \frac{-1}{2}(1 + (x - x_{r1}) + (x - x_{r1})^2) = \frac{-1}{2}(1 - j\sqrt{3} + x(2 - j\sqrt{3}) + x^2)$$

$$\text{dla } x_r = x_{r2} = -0,5 - j\sqrt{3}/2:$$

$$f(x) = \frac{-1}{2}(1 + (x - x_{r2}) + (x - x_{r2})^2) = \frac{-1}{2}(1 + j\sqrt{3} + x(2 + j\sqrt{3}) + x^2)$$

Sprawdzamy stabilność układu zgodnie z (11.15).

$$\text{- dla pierwszego punktu: } \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_{r1}} = -\frac{1}{2}(2 - j\sqrt{3} + 2x) \Big|_{x=x_{r1}} = -\frac{1}{2} < 0;$$

$$\text{- dla drugiego punktu: } \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_{r2}} = -\frac{1}{2}(2 + j\sqrt{3} + 2x) \Big|_{x=x_{r2}} = -\frac{1}{2} < 0.$$

W obu punktach równowagi układ jest stabilny.

W celu zbadania portretu fazowego należy utworzyć model symulacyjny odtwarzający równania układu. Zauważmy, że ze względu na podane punkty równowagi, równania ruchu mają postać zespoloną. Model powinien więc zawierać dwa integratory rzeczywiste: oddzielnie dla części rzeczywistej i urojonej równania układu.

Po rozdzieleniu na część rzeczywistą i urojoną równanie układu dla pierwszego punktu równowagi ($x_r = x_{r1} = -0,5 + j\sqrt{3}/2$) przyjmuje następującą postać ($x = x_\alpha + jx_\beta$):

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{-1}{2}((x_\alpha + 1)^2 - x_\beta(x_\beta - \sqrt{3})) \quad \text{- dla części rzeczywistej,}$$

$$\frac{dx_\beta}{dt} = \frac{-1}{2}(x_\alpha + 1)(2x_\beta - \sqrt{3}) \quad \text{- dla części urojonej.}$$

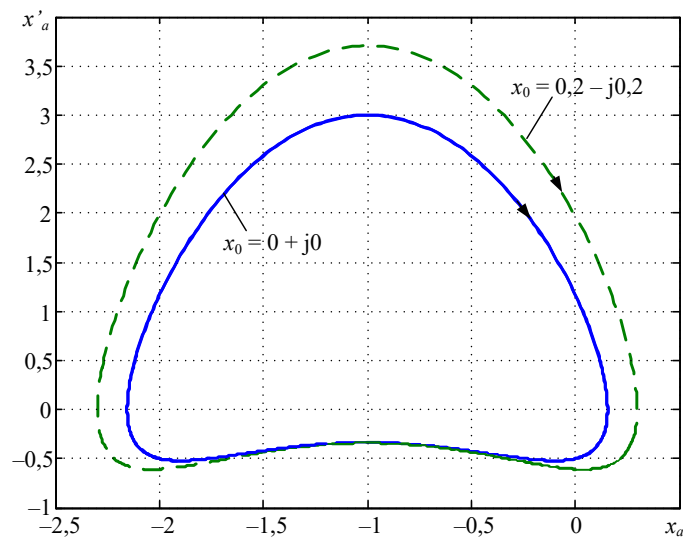
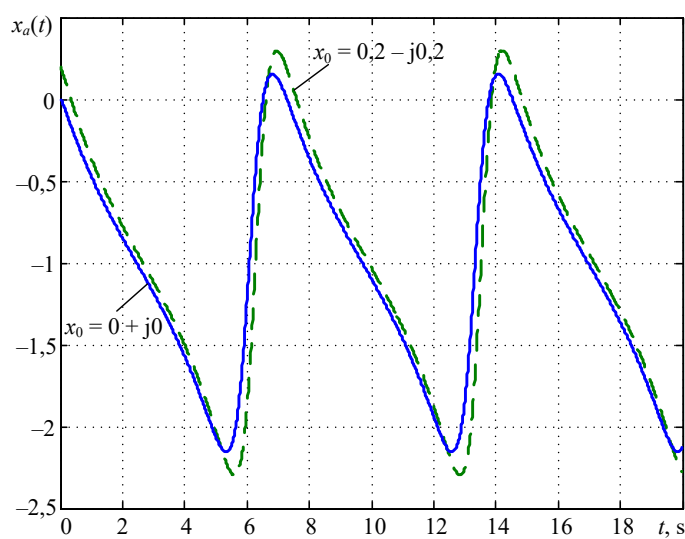
Model według powyższych równań można łatwo utworzyć w programie SIMULINK. Przebieg trajektorii odpowiadającej zmiennej rzeczywistej x_α dla dwóch różnych warunków początkowych jest pokazany na rys. 11.8.

Trajektorie przedstawiają cykle graniczne, których rozmiar zależy od warunków początkowych. W funkcji czasu zmienna x_α jest przebiegiem okresowym (rys. 11.9). Amplituda oraz kształt tego przebiegu zależą od zadanych warunków początkowych.

Układ zbudowany w odniesieniu do drugiego punktu równowagi jest opisany następującymi równaniami:

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{-1}{2}((x_\alpha + 1)^2 - x_\beta(x_\beta + \sqrt{3})) \quad \text{- dla części rzeczywistej,}$$

$$\frac{dx_\beta}{dt} = \frac{-1}{2}(x_\alpha + 1)(2x_\beta + \sqrt{3}) \quad \text{- dla części urojonej.}$$

Rys. 11.8. Trajektorie związane z rzeczywistą zmienną x_α 

Rys. 11.9. Przebieg generowany przez rozważany układ

Zarówno trajektoria, jak i generowany przebieg są takie same jak dla powyższego przypadku, gdy wprowadzimy sprzężoną wartość warunku początkowego: $x = x_\alpha - jx_\beta$.

Powyższy przykład potwierdza prawidłowość, że zespolone wartości punktów równowagi są oznaką występowania pętli granicznej. Kolejny przykład ilustruje sposób postępowania w przypadku układu wielowymiarowego *SISO*.

Przykład 11.3. Dany jest układ nieliniowy jak na rys. 11.1, który jest opisany następującym równaniem:

$$f_a(x) = 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + f_b(x), \text{ gdzie: } f_b(x) = 1 - x^2.$$

Zapisać równanie przetwarzania w postaci zmiennych stanu.

Wyznaczyć punkty równowagi układu i narysować jego portret fazowy.

Zbadać stabilność układu w punktach równowagi.

Punkty równowagi określamy z równania części statycznej układu:

$$1 - x^2 = 0, \text{ skąd otrzymujemy dwa punkty równowagi: } x_{1r} = 1, \quad x_{2r} = -1.$$

Stosując proste podstawienie, równanie układu można zapisać w postaci dwóch równań stanu:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-1}{2}(x_2 + 1 - x_1^2)$$

lub w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-1}{2}(x_2 + 1 - x_1^2) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Obliczamy jacobian funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1 & -0,5 \end{bmatrix}$$

Punkty równowagi mają dwie współrzędne (x_1, x_2) , które są rozwiązaniem równania $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$. W postaci wektorowej mają one następującą postać (nie sprowadzamy tu punktów równowagi do początku układu współrzędnych):

$$\mathbf{x}_{1r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{2r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\mathbf{A}$ (jacobian) przyjmuje w tych punktach następujące wartości:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{1r}}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{2r}}$$

Równanie charakterystyczne dla pierwszego punktu:

$$\det(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -0,5 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 0,5\lambda - 1 = 0$$

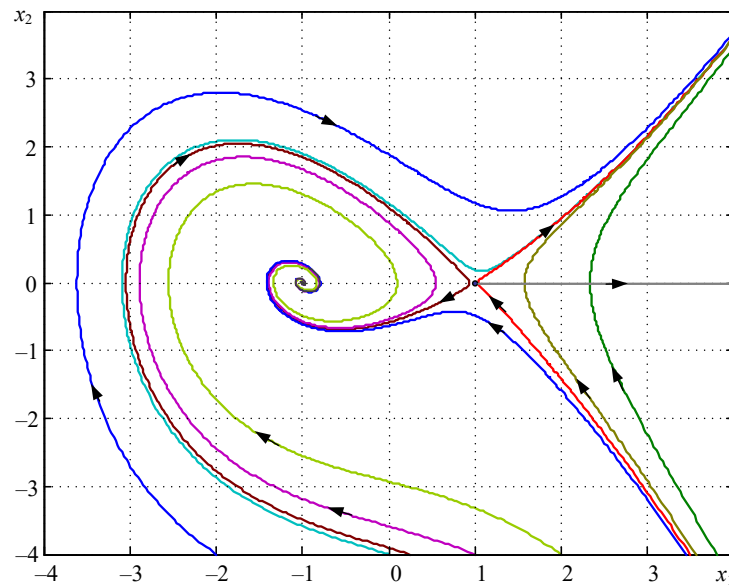
Wartości własne są pierwiastkami tego równania: $\lambda_{1,2} = -0,25(1 \pm \sqrt{17})$. Jeden z tych pierwiastków jest dodatni, więc pierwszy punkt równowagi ($x_{1r} = 1$) jest niestabilny.

Dla drugiego punktu otrzymamy:

$$\det(\mathbf{A}_2 - \mathbf{I}\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -0,5 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 0,5\lambda + 1 = 0$$

Wartości własne są następujące: $\lambda_{1,2} = -0,25(1 \pm j\sqrt{15})$. Część rzeczywista obu tych pierwiastków jest ujemna, więc drugi punkt równowagi: $x_{2r} = (-1, 0)$ jest stabilny.

Potwierdzenie tych obliczeń znajdziemy na portrecie fazowym otrzymanym na podstawie modelu równań stanu (rys. 11.10).



Rys. 11.10. Portret fazowy rozpatrywanego układu

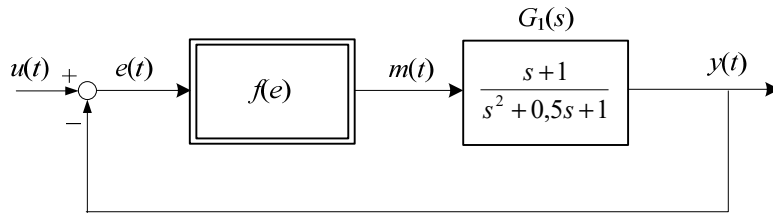
Widać, że punkt $(-1, 0)$ jest atraktorem, do którego zbiegają trajektorie z pewnego obszaru wokół punktu, natomiast inaczej zachowują się trajektorie w pobliżu punktu $(1, 0)$, który jest niestabilnym punktem równowagi.

Metoda linearyzacji może być także stosowana w odniesieniu do układów, w których można oddzielić część nieliniową od części liniowej. W takim przypadku, w otoczeniu punktu równowagi, obie części mogą być rozpatrywane jak elementy układu liniowego. Technikę postępowania wyjaśnia kolejny przykład.

Przykład 11.4. W układzie jak na rys. 11.11 blok nieliniowy jest określony następującą funkcją:

$$f(e) = 3e - e^3$$

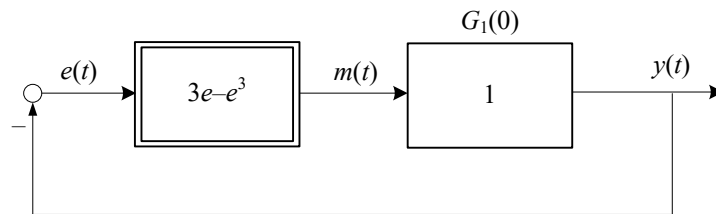
Zakładając, że układ jest autonomiczny, określić jego punkty równowagi oraz zbadać stabilność układu w tych punktach.



Rys. 11.11. Schemat układu nieliniowego

W układzie autonomicznym brak jest wymuszenia ($u = 0$), a stan przejściowy układu jest reakcją na warunki początkowe. Punkty równowagi odpowiadają możliwym położeniom układu w stanie ustalonym. Wówczas pochodne względem czasu przyjmują zerową wartość, co w zapisie transmitancji oznacza: $s = 0$. Zatem, transmitancja części liniowej redukuje się do postaci: $G_1(0) = 1$.

W takim stanie schemat układu ma postać jak na rys. 11.12.



Rys. 11.12. Schemat układu w punkcie równowagi

Można zauważyć, że: $e = -m$, co oznacza, że funkcja przetwarzania części nieliniowej jest następująca:

$$m = 3e - e^3 = -e, \text{ skąd:}$$

$$4e - e^3 = 0$$

Równanie to spełniają trzy punkty, które wyznaczają stany równowagi układu:

$$e_1 = 0, e_2 = 2, e_3 = -2.$$

Kolejnym krokiem jest linearyzacja układu (jego części nieliniowej) w tych właśnie punktach równowagi:

$$f(e) = 3e - e^3$$

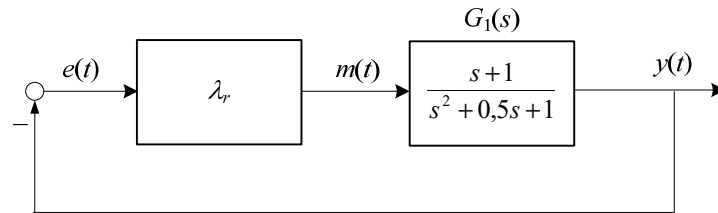
Linearyzacja tej funkcji odbywa się przez jej przybliżenie za pomocą dwóch pierwszych składników rozkładu w szereg Taylora w pobliżu punktu równowagi (11.8):

$$f(e) = f(e_r) + f'(e) \Big|_{e=e_r} (e - e_r), \text{ gdzie } e_r \text{ jest punktem równowagi.}$$

Widać stąd, że przyrost funkcji na wyjściu bloku nieliniowego jest proporcjonalny do przyrostu argumentu na wejściu, ze współczynnikiem proporcjonalności $\lambda_r = f'(e)_{e=e_r}$, jak w (11.10):

$$f(e) - f(e_r) = \lambda_r (e - e_r)$$

Relacja wyjście – wejście bloku nieliniowego w pobliżu punktu równowagi jest więc określona przez współczynnik λ_r . W tych warunkach zastępczy schemat analizowanego układu jest liniowy, jak na rys. 11.13.



Rys. 11.13. Schemat zastępczy układu zlinearyzowanego

Badanie stabilności układu z rys. 11.13 odbywa się zgodnie z zasadami odpowiednimi dla układów liniowych. Najpierw należy określić wartości współczynników λ_r dla kolejnych punktów równowagi i następnie, określić stabilność skojarzonych z nimi układów zamkniętych.

A zatem: $\lambda_r = f'(e)|_{e=e_r} = 3 - 3e^2|_{e=e_r} = 3 - 3e_r^2$, co dla kolejnych punktów równowagi daje:

1) $e_1 = 0$, $\lambda_1 = 3 - 3 \cdot 0 = 3$

Transmitancja układu otwartego jest równa: $G_o(s) = \frac{\lambda_1(s+1)}{s^2 + 0,5s + 1} = \frac{3(s+1)}{s^2 + 0,5s + 1}$, co prowadzi do następującej transmitancji układu zamkniętego:

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{3(s+1)}{s^2 + 3,5s + 4}$$

Znajdujemy bieguny transmitancji z równania charakterystycznego:

$$s^2 + 3,5s + 4 = 0, \text{ skąd: } s_{1,2} = -1,75 \pm j0,968.$$

Widać, że oba bieguny mają ujemne części rzeczywiste, więc układ jest stabilny w pierwszym punkcie równowagi.

2) $e_2 = 2$, $\lambda_2 = 3 - 3 \cdot 4 = -9$

Transmitancja układu otwartego jest równa: $G_o(s) = \frac{\lambda_2(s+1)}{s^2 + 0,5s + 1} = \frac{-9(s+1)}{s^2 + 0,5s + 1}$, co prowadzi do następującej transmitancji układu zamkniętego:

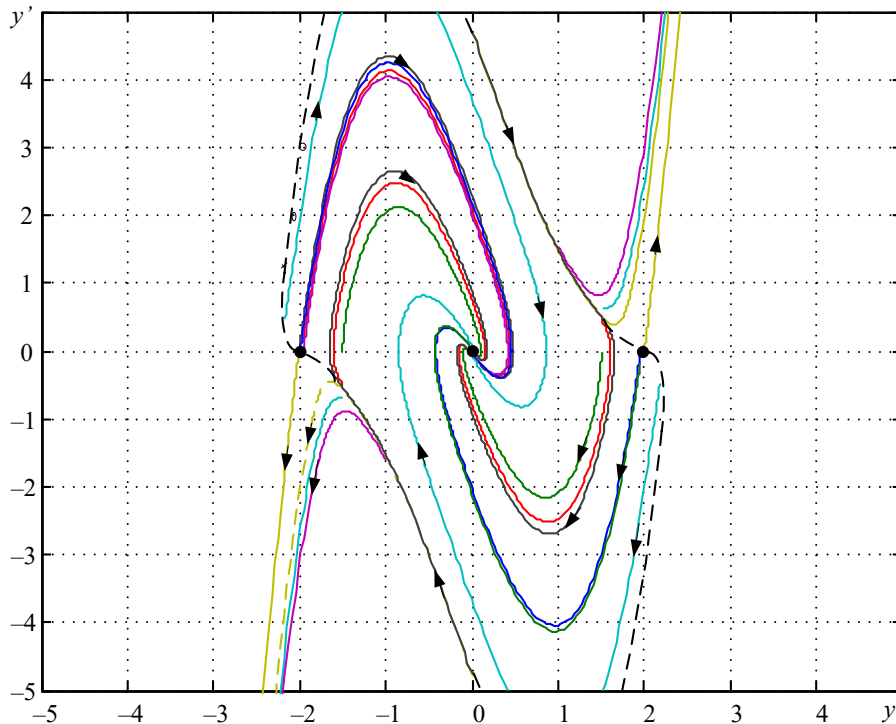
$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{-9(s+1)}{s^2 - 8,5s - 8}$$

Znajdujemy bieguny transmitancji:

$$s^2 - 8,5s - 8 = 0, \text{ skąd: } s_1 = 9,355, s_2 = -0,855.$$

Jeden biegun jest dodatni, więc układ jest niestabilny w drugim punkcie równowagi.

3) $e_3 = -2$, $\lambda_3 = 3 - 3 \cdot 4 = -9$



Rys. 11.15. Trajektorie rozważanego układu nieliniowego w pobliżu trzech punktów równowagi

Transmitancja liniowej części układu rozpatrywanego w przykładzie 11.4 jest klasy zerowej, co pozwala założyć wartość zmiennej $s = 0$ w punkcie równowagi. Takie założenie nie jest możliwe w układach wyższej klasy (wystąpi dzielenie przez zero w wyrażeniu określającym transmitancję). Kolejny przykład pokazuje sposób postępowania w takim przypadku.

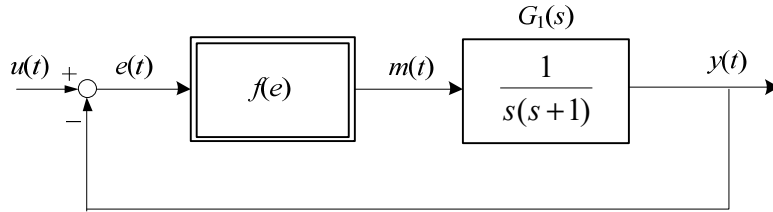
Przykład 11.5. W układzie z rys. 11.16 blok nieliniowy jest określony następującą funkcją: $f(e) = e - e^3$.

Zakładając, że układ jest autonomiczny, określić jego punkty równowagi oraz zbadać stabilność układu w tych punktach.

W tym przypadku układ liniowy jest klasy pierwszej (pojedynczy zerowy biegun), więc jedynym sposobem zapewniającym ustaloną odpowiedź układu, jest założenie, że: $m(t) = 0$. Jest to więc warunek równowagi układu, skąd:

$$f(e) = e - e^3 = 0.$$

Jest on spełniony dla trzech punktów: $e_1 = 0$, $e_2 = 1$, $e_3 = -1$.



Rys. 11.16. Schemat układu nieliniowego

Podobnie jak w przykładzie 11.4, z warunku autonomiczności układu wynika, że brak jest wymuszenia ($u = 0$), a stan przejściowy jest wywołany przez warunki początkowe.

Linearyzacja bloku nieliniowego w punktach równowagi pozwala zastąpić go przez stały współczynnik wyznaczony przez wartość pochodnej w tym punkcie:

$$\lambda_r = f'(e)_{e=e_r} = (1 - 3e^2)_{e=e_r}, \quad r = 1, 2, 3,$$

co daje następujące wartości:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -2.$$

Te współczynniki reprezentują blok nieliniowy w poszczególnych punktach równowagi. Stabilność układu w tych punktach sprawdzamy, zakładając, że transmitancja układu otwartego w ich bezpośrednim sąsiedztwie jest określona przez transmitancję części liniowej pomnożonej przez odpowiedni współczynnik λ .

Pozostaje zatem sprawdzenie stabilności układu zastępczego w punktach równowagi.

$$1) \quad G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{1}{s(s+1)}} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

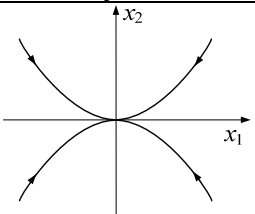
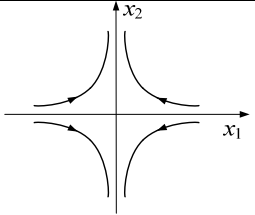
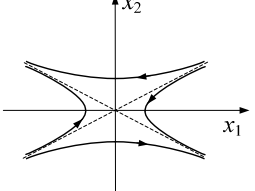
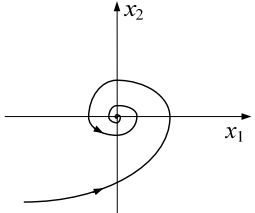
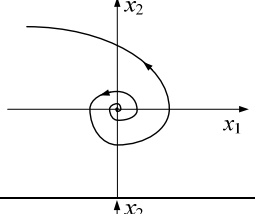
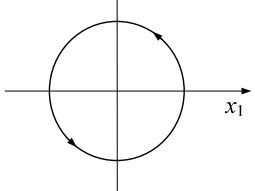
Bieguny transmitancji są następujące: $s_{1,2} = -0,5 \pm j\sqrt{3}/2$. Mają one ujemną część rzeczywistą, więc układ jest stabilny.

$$2) \quad G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{\frac{-2}{s(s+1)}}{1 - \frac{2}{s(s+1)}} = \frac{-2}{s^2 + s - 2}$$

Tym razem bieguny transmitancji są następujące: $s_{1,2} = -0,5 \pm 1,5$. Jeden z tych biegunów jest dodatni, więc układ jest niestabilny. Taka sama sytuacja wystąpi dla trzeciego punktu: $e_3 = -1$. Podobnie jak w przykładzie 11.4, układ ma jeden stabilny punkt równowagi dla $e = e_1 = 0$.

W przypadku zlinearyzowanego układu drugiego rzędu para pierwiastków (s_1, s_2) wyznaczających punkt równowagi układu nieliniowego określa charakter tego punktu. Dotyczy to także pary wartości własnych (λ_1, λ_2) macierzy w reprezentacji modelu układu w postaci równań stanu. Różne przypadki odnoszące się do układów liniowych są zestawione w Tabeli 11.1.

Tabela 11.1. Trajektorie fazowe w pobliżu punktów równowagi układów drugiego rzędu

Nr	Położenie pierwiastków	Płaszczyzna fazowa	Rodzaj
1.	oba pierwiastki rzeczywiste, ujemne		węzeł stabilny
2	oba pierwiastki rzeczywiste, dodatnie		węzeł niestabilny
3.	oba pierwiastki rzeczywiste, o różnych znakach		siodło
4.	pierwiastki zespolone o ujemnych częściach rzeczywistych		ognisko stabilne
5.	pierwiastki zespolone o dodatnich częściach rzeczywistych		ognisko niestabilne
6.	pierwiastki zespolone o zerowych częściach rzeczywistych (urojone)		centrum (środek)

W układach nieliniowych może wystąpić kilka punktów równowagi, które mogą być rozmieszczone w różnych punktach płaszczyzny fazowej, niekoniecznie w początku układu współrzędnych. Ponadto mają one na ogół bardziej nieregularne kształty w stosunku to tych pokazanych w Tabeli 11.1, co ilustrują także zamieszczone przykłady.

Przykład 11.6. Układ dynamiczny jest opisany następującym równaniem różniczkowym:
 $\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0$, gdzie $\mu = 1$. Sporządzić portret fazowy tego układu oraz zbadać jego stabilność.

Badany układ jest określony przez tzw. równanie Van der Pola, które było pierwotnie wyprowadzone dla generatora lampowego [33]. W celu sporządzenia portretu fazowego oraz do dalszej jego analizy wygodnie jest go przedstawić w postaci równania stanu. Przyjmując: $\dot{x}_1 = x_2$ otrzymamy:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = (1-x_1^2)x_2 - x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ (1-x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Przyrównując powyższe równanie do zera, otrzymamy punkt równowagi (w punkcie równowagi zerują się pochodne zmiennych stanu): $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Do sprawdzenia, czy w tym punkcie układ jest stabilny, można zastosować procedurę linearyzacji równania stanu w otoczeniu tego punktu i sprawdzić wartości pierwiastków równania charakterystycznego (wartości własnych) macierzy $\mathbf{A}$ (11.12):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1x_2 - 1 & 1 - x_1^2 \end{bmatrix}$$

Macierz $\mathbf{A}$ w punkcie równowagi przyjmuje następującą wartość:

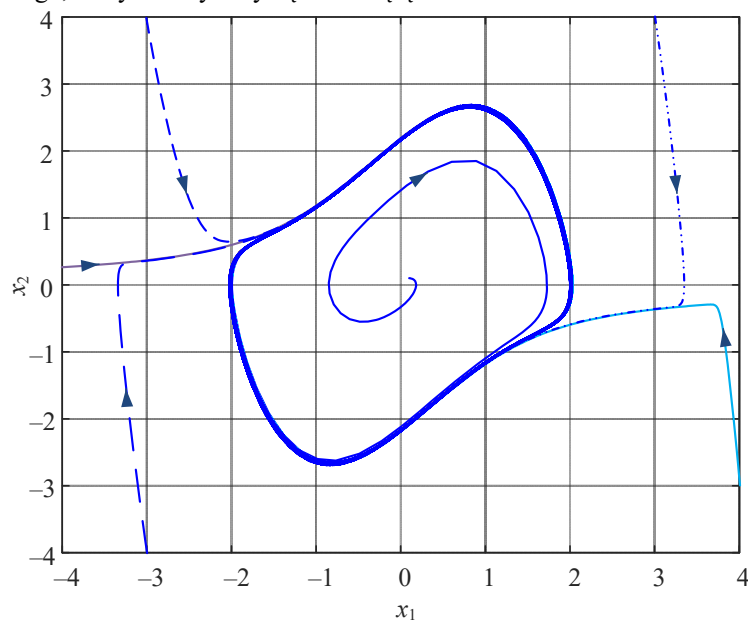
$$\mathbf{A}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1x_2 - 1 & 1 - x_1^2 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne jest wielomianem utworzonym według zależności (8.22):

$$|\mathbf{A}_{(0,0)} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

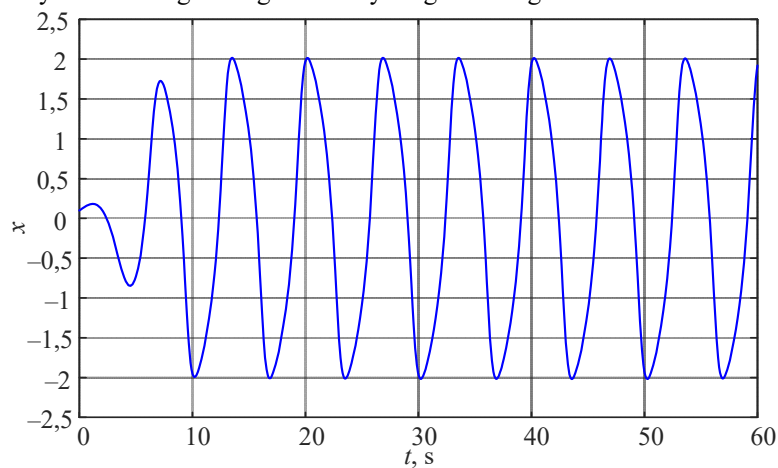
Pierwiastki tego równania są wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$: $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2}$. Części rzeczywiste obu biegunów (pierwiastków równania charakterystycznego) są dodatnie, a więc rozważany punkt równowagi jest niestabilny. Potwierdzają to przebiegi trajektorii na płasz-

czyźnie fazowej (rys. 11.17) uzyskane na drodze symulacji rozwiązania równania stanu dla kilku wybranych warunków początkowych. Z przebiegu tych trajektorii widać, że dążą one do cyklu granicznego, który tworzy krzywą zamkniętą.



Rys. 11.17. Portret fazowy układu Van der Pola

W dziedzinie czasu, temu cyklowi odpowiada przebieg okresowy jak na rys. 11.18. Można zauważyć, że jest to stabilny cykl graniczny z widocznymi odstępstwami od przebiegu harmonicznego, co wynika z nieregularnego obrotu cyklu granicznego.



Rys. 11.18. Przebieg okresowy dla warunków początkowych (0,1 0,1)

Zauważmy, że w rozważanym przykładzie nie ma możliwości rozdzielenia części statycznej i dynamicznej w równaniu układu, co wymaga określenia punktów równowagi bezpośrednio na podstawie równań stanu.

11.2.3. Bezpośrednia metoda Lapunowa

Przedstawiona powyżej pierwsza (pośrednia, lokalna) metoda Lapunowa ma istotne ograniczenia, które polegają na tym, że pozwala ona określić stabilność tylko w okolicy punktów równowagi (choć może zawodzić w przypadku, gdy wartości własne macierzy A mają zerowe części rzeczywiste). Bardziej uniwersalne zastosowanie ma druga (bezpośrednia) metoda Lapunowa. Ma ona zwłaszcza bardzo duże znaczenie teoretyczne, natomiast jej praktyczne zastosowanie jest niekiedy kłopotliwe. Wynika to stąd, że definicje stabilności według bezpośredniej metody Lapunowa odnoszą się do pomocniczej funkcji skalarnej $V(\mathbf{x})$, definiowanej dla danego systemu w taki sposób, że jest to funkcja pozytywnie określona w pewnym regionie wokół początku układu współrzędnych: $V(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \neq 0$, za wyjątkiem punktu zerowego, w którym funkcja przyjmuje wartość zerową: $V(\mathbf{0}) = 0$. Dobór tej funkcji nie wynika bezpośrednio z modelu rozważanego układu i wymaga pewnych dodatkowych uzgodnień. Zakłada się tu, że punkt równowagi został sprowadzony do początku układu współrzędnych.

W układach stacjonarnych funkcja $V(\mathbf{x})$ nie zależy od czasu (jak również równania stanu układu). W takim przypadku pochodna funkcji $V(\mathbf{x})$ względem czasu jest określana następująco:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.17)$$

gdzie n – rozmiar równania stanu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (11.6).

Układ nieliniowy przedstawiony równaniem (11.6) jest stabilny asymptotycznie w obszarze D zawierającym początek układu współrzędnych, jeśli można wyznaczyć funkcję Lapunowa $V(\mathbf{x})$, która spełnia następujące warunki:

$$V(\mathbf{x}) > 0 \text{ dla } \mathbf{x} \neq 0 \text{ oraz } V(\mathbf{0}) = 0 \quad (11.18)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} < 0 \text{ dla } \mathbf{x} \neq 0 \quad (11.19)$$

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \text{ dla } |\mathbf{x}|^2 \rightarrow \infty \quad (11.20)$$

Jeśli w (11.19) ostry warunek ($<$) zostanie zamieniony na relację ($\leq$): ($< \rightarrow \leq$) w odniesieniu do całego obszaru D , to mówimy, że układ w obszarze D jest stabilny, ale niekoniecznie asymptotycznie.

Kolejny przykład wyjaśnia podstawowe kroki postępowania związane z zastosowaniem II-giej metody Lapunowa.

Przykład 11.7. Dany jest układ nieliniowy opisany następującym równaniem:

$$f(x) = 4 \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 + 4x = 0$$

Zapisać równanie przetwarzania w postaci zmiennych stanu.

Wyznaczyć punkty równowagi układu i narysować jego portret fazowy.

Zbadać stabilność układu w punktach równowagi według pośredniej metody Lapunowa.

Zbadać stabilność układu wg drugiej metody Lapunowa.

Przez podstawienie nowej zmiennej x_2 w miejsce pierwszej pochodnej otrzymamy:

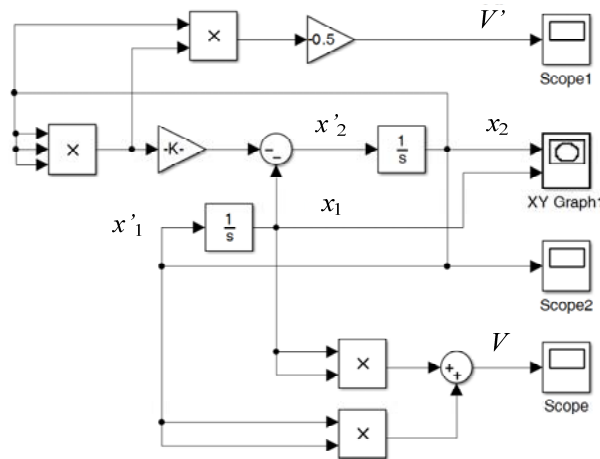
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - \frac{1}{4}(x_2)^3$$

lub w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - 0,25x_2^3 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

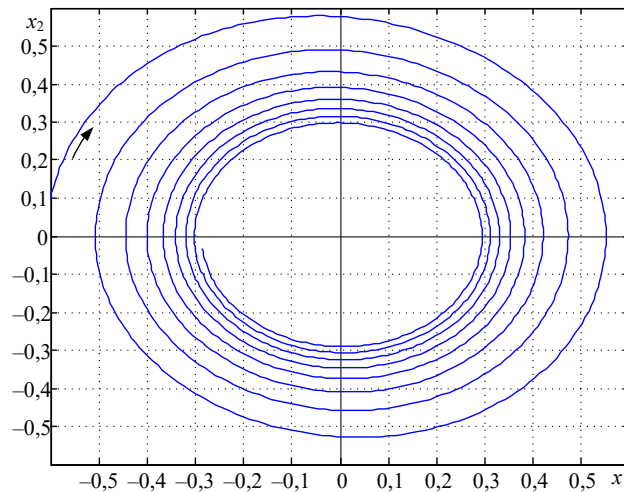
Układ do symulacji tego układu jest pokazany na rys. 11.19. Przyrównując prawą stronę równania do zera, otrzymujemy współrzędne jedyne punktu równowagi: $\mathbf{x}_r = (0, 0)$.



Rys. 11.19. Schemat modelu SIMULINK

Do oceny stabilności układu w tym punkcie stosujemy pośrednią metodę Lapunowa. Portret fazowy układu jest pokazany na rys. 11.20. Równanie charakterystyczne macierzy Jakobiego jest następujące:

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)_{x_2=0} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0,25x_2^2 \end{vmatrix}_{x_2=0} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -0,25x_2^2 - \lambda \end{bmatrix}_{x_2=0} = \lambda^2 + 1 = 0$$



Rys. 11.20. Trajektoria układu w pobliżu punktu równowagi (0, 0)

Wartości własne są pierwiastkami równania charakterystycznego: $\lambda_{1,2} = \pm j$. Część rzeczywista wartości własnych jest równa zero, więc nie można na tej podstawie sądzić o stabilności układu. Zastosujemy więc bezpośrednią metodę Lapunowa.

Przy tworzeniu funkcji Lapunowa często nawiązuje się do definicji energii na podstawie współrzędnych równania zmiennych stanu, sprawdzając, czy uzyskana w ten sposób funkcja spełnia kryteria funkcji Lapunowa.

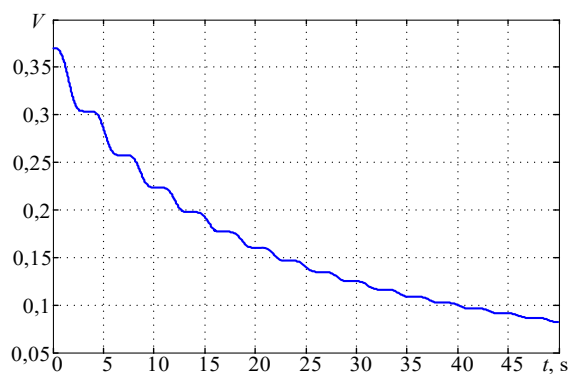
Pomijając stałe współczynniki, propozycja jest następująca (rys. 11.21):

$$V(\mathbf{x}) = V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

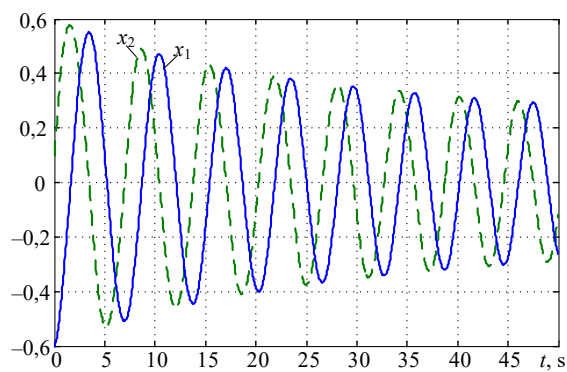
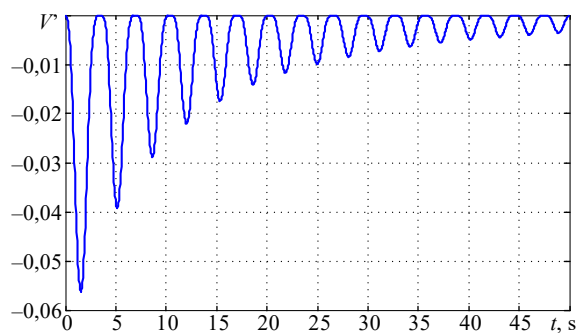
Widać, że funkcja z upływem czasu zmierza do zera, gdy jednocześnie trajektoria dąży do początku układu współrzędnych, który jest punktem równowagi (rys. 11.20). Funkcja Lapunowa V jest różniczkowalna w otoczeniu początku układu współrzędnych, przyjmuje dodatnie wartości za wyjątkiem punktu równowagi: $V(0, 0) = 0$.

Określamy pierwszą pochodną funkcji Lapunowa względem czasu (z uwzględnieniem zapisu funkcji w postaci zmiennych stanu):

$$\frac{d}{dt} V(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2) \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2) \frac{dx_2}{dt} = 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - 0,25x_2^3) = -0,5x_2^4$$

Rys. 11.21. Przebieg funkcji Lapunowa $V(x_1(t), x_2(t))$

Widać, że pochodna jest ujemna, za wyjątkiem punktów, gdy $x_2 = 0$, w których pochodna jest zerowa. Przebiegi zmiennych stanu x_1 , x_2 są pokazane na rys. 11.22. Można zauważyć, że przebiegi te są zgodne z kształtem trajektorii na rys. 11.20. Przy każdym przejściu przez zero zmiennej x_2 pochodna funkcji Lapunowa także przyjmuje wartość zerową (rys. 11.22).

Rys. 11.22. Przebiegi zmiennych stanu $x_1(t)$, $x_2(t)$ Rys. 11.23. Przebieg pochodnej funkcji Lapunowa V'

Widać więc, że proponowana funkcja spełnia wszystkie kryteria funkcji Lapunowa i układ jest stabilny w punkcie równowagi i jego otoczeniu, choć nie jest to stabilność asymptotyczna, gdyż pochodna V' ma wartości zerowe poza początkiem układu współrzędnych.

Przy stosowaniu bezpośredniej metody Lapunowa istotnym problemem jest określenie funkcji, które spełnia warunki funkcji Lapunowa. W tym zakresie brak jest ogólnych zasad, które można stosować w odniesieniu do dowolnego układu. W przypadku układów fizycznych można poszukiwać takiej funkcji, posilkując się zależnością na energię analizowanego układu [30, 61]. Uzyskane się w ten sposób funkcje mogą mieć jedną z następujących form:

- w przypadku, gdy punkt równowagi leży w początku układu współrzędnych:

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (11.21)$$

- jeśli punkt równowagi jest określony przez współrzędne $x_{1r}, x_{2r}, \dots$:

$$V(\mathbf{x}) = (x_1 - x_{1r})^2 + (x_2 - x_{2r})^2 + \dots + (x_n - x_{nr})^2 \quad (11.22)$$

- w przypadku niespełnienia warunków funkcji Lapunowa można poszukiwać innych rozwiązań, na przykład:

$$V(\mathbf{x}) = a_1(x_1 - x_{1r})^2 + a_2(x_2 - x_{2r})^2 + \dots + a_n(x_n - x_{nr})^2 \quad (11.23)$$

- lub w postaci ogólnej formy kwadratowej:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_{ir}) (x_j - x_{jr}) \quad (11.24)$$

Na bazie bezpośredniej metody Lapunowa powstało wiele szczegółowych algorytmów badania stabilności układów nieliniowych.

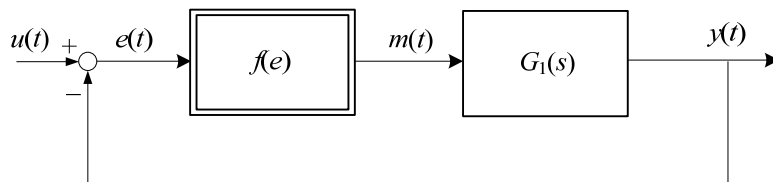
11.2.4. Metoda Popova

Metoda Popova⁴⁴ określa warunki, jakie powinna spełnić charakterystyka amplitudowo-fazowa części liniowej układu nieliniowego, aby rozważany układ nieliniowy był absolutnie stabilny. Odnosi się ona do układów nieliniowych z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, w których można wydzielić część liniową (rys. 11.24). Zakłada się, że statyczna charakterystyka członu nieliniowego $m = f(e)$ spełnia następujące warunki:

$$k_1 \leq \frac{f(e)}{e} \leq k_2, \quad f(0) = 0, \quad e \neq 0, \quad (11.25)$$

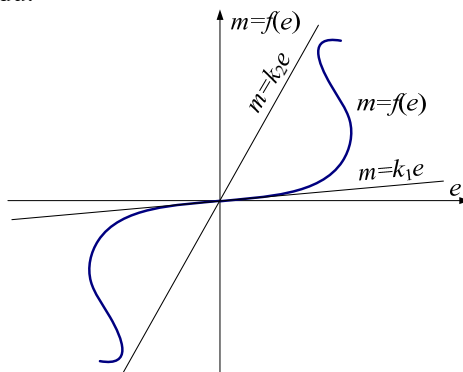
gdzie: k_1 i k_2 są dowolnymi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi.

⁴⁴ Vasile M. Popov (1928 -) – rumuński inżynier i matematyk, zajmujący się teorią regulacji i stabilności systemów dynamicznych. Od 1968 roku przebywa w Stanach Zjednoczonych.



Rys. 11.24. Schemat układu nieliniowego z wydzieloną częścią liniową

Warunek (11.25) oznacza, że trajektoria wyznaczona przez funkcję $m(t) = f(e)$ jest ograniczona przez dwie proste, wyznaczone przez współczynniki k_1 i k_2 (rys. 11.25). Punkty leżące na tej trajektorii wyznaczają statyczne współczynniki wzmocnienia części nieliniowej układu.

Rys. 11.25. Ilustracja przebiegu trajektorii $f(e)$ przy spełnieniu warunków (11.25)

Zgodnie z twierdzeniem Popova [23, 29, 61] układ nieliniowy spełniający warunek (11.25), w którym transmitancja $G_1(s)$ części liniowej ma wszystkie bieguny w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s (część liniowa jest stabilna asymptotycznie), jest stabilny globalnie w stanie bez wymuszenia ($u(t) = 0$), jeśli istnieje taka skończona liczba q , dla której spełniona jest nierówność:

$$\operatorname{Re}\{(1 + jq\omega)G_1(j\omega)\} + \frac{1}{k_2} > 0, \quad (11.26)$$

przy czym: $0 < k_2 < \infty$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_1(j\omega) = 0$. Oznacza to, że funkcja nieliniowa $f(e)$ jest klasy $[0 \ k_2]$, przy praktycznym założeniu, że $k_1 = 0$.

Zależność (11.26) można rozszerzyć na specjalne przypadki nieasymptotycznej stabilności części liniowej układu:

- gdy $G_1(s)$ ma pojedynczy biegun w początku układu:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} \operatorname{Im}\{G_1(j\omega)\} \rightarrow -\infty, \quad (11.27)$$

- gdy $G_1(s)$ ma podwójny biegun w początku układu:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0+} \operatorname{Re}\{G_1(j\omega)\} &\rightarrow -\infty \\ \operatorname{Im}\{G_1(j\omega)\} &< 0 \text{ dla małych wartości } \omega \end{aligned} \quad (11.28)$$

Kryterium Popova określa wystarczające warunki stabilności układu nieliniowego o strukturze jak na rys. 11.24, gdy część liniowa o transmitancji $G_1(s)$ jest stabilna asymptotycznie lub gdy spełnione są także warunki (11.27), (11.28), odpowiednio przy pojedynczym lub podwójnym zerowym biegunie tej transmitancji. Formułowane są także dodatkowe warunki w odniesieniu do części nieliniowej, które omówimy poniżej.

Zapiszmy widmową transmitancję części liniowej analizowanego układu nieliniowego w następującej formie:

$$G_1(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \quad (11.29)$$

W nawiązaniu do (11.26), definiowana jest transmitancja Popova:

$$G_P(j\omega) = \operatorname{Re}\{G_1(j\omega)\} + j\omega \operatorname{Im}\{G_1(j\omega)\} = U(\omega) + jV_P(\omega), \quad (11.30)$$

gdzie $V_P(\omega) = \omega V(\omega)$.

Uwzględniając (11.30) w (11.26), otrzymamy nową formę kryterium Popova:

$$\operatorname{Re}\{G_P(j\omega)\} - q \operatorname{Im}\{G_P(j\omega)\} + \frac{1}{k_2} > 0, \quad (11.31)$$

co można zapisać w postaci następującego warunku, odnoszącego się do płaszczyzny zespolonej $G_P(j\omega) = U(\omega) + jV_P(\omega)$:

$$U(\omega) - q\omega V(\omega) + \frac{1}{k_2} > 0 \quad (11.32)$$

Graniczną linią warunku (11.32) na płaszczyźnie $G_P(j\omega)$ jest następująca prosta

$$U(\omega) = q\omega V(\omega) - \frac{1}{k_2} \quad (11.33)$$

lub:

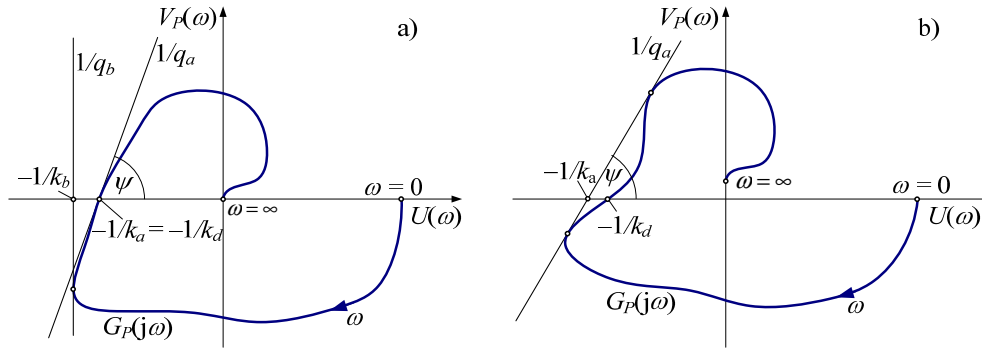
$$\omega V(\omega) = V_P(\omega) = \left(U(\omega) + \frac{1}{k_2} \right) \frac{1}{q}, \quad (11.34)$$

nazywana prostą Popova. Przecina ona oś rzeczywistą w punkcie $-1/k_2$ (po ujemnej stronie osi) i ma nachylenie $1/q = \operatorname{tg} \psi$ (rys. 11.26). Prosta Popova powinna być tak poprowadzona, aby cała trajektoria transmitancji części liniowej $G_P(j\omega)$ dla pulsacji $0 \leq \omega \leq \infty$ znalazła się na prawo od niej. Rozpatrzmy bliżej przypadki pokazane na rys. 11.26 [23].

- Prosta Popova o nachyleniu $1/q_a$ z rys. 11.26a przecina oś rzeczywistą w punkcie $-1/k_a$, który jest wspólny z trajektorią części liniowej: $-1/k_a = -1/k_d$, gdzie k_d jest zapasem wzmocnienia części liniowej układu. Jest to ilustracja najbardziej typowo-

wego przypadku, w którym $k_a (= k_d)$ jest statycznym współczynnikiem wzmocnienia części nieliniowej opisanej funkcją stacjonarną bez histerezy: $m = f(e)$.

- Jeśli, ze względu na ukształtowanie trajektorii transmitancji części liniowej, punkt $-1/k_a$ nie pokrywa się z punktem $-1/k_d$ (rys. 11.26b), a charakterystyka części nieliniowej jest jednoznaczna i stacjonarna, to wzmocnienie statyczne części nieliniowej o wartości nie większej od k_a zapewnia stabilność globalną całego układu.
- W ogólnym przypadku, gdy część nieliniowa jest określona za pomocą zależności niestacjonarnej $m(t) = f(e(t), t)$ oraz występują elementy z histerezą, to w (11.26) należy przyjąć $q = 0$. Oznacza to, że prosta Popova jest prostopadła do osi rzeczywistej układu współrzędnych, a współczynnik wzmocnienia części nieliniowej jest definiowany przez punkt $-1/k_b$, (rys. 11.26a).



Rys. 11.26. Charakterystyki amplitudowo-fazowe na płaszczyźnie $G_P(j\omega)$

Jedną z głównych zalet metody Popova jest geometryczna interpretacja warunków stabilności układu [5].

Przykład 11.8. Dany jest układ nieliniowy, którego część liniowa jest określona za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{7,5(0,02s + 1)}{(s + 1)(0,015s + 1)(0,01s^2 + 0,04s + 1)}$$

Stosując metodę Popova określić graniczną wartość współczynnika $k_2 = k_{gr}$, dla której układ nieliniowy jest globalnie stabilny.

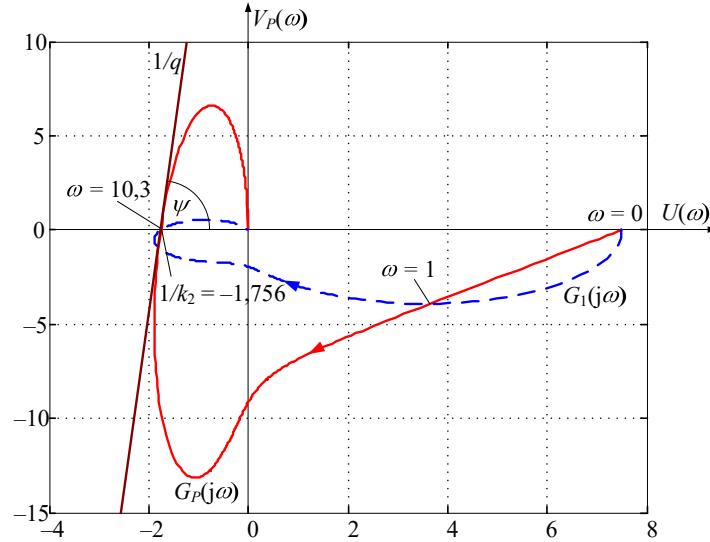
Biegunki transmitancji są następujące: $s_1 = -1$, $s_2 = -66,67$, $s_{3,4} = -2 \pm j9,78$. Spełnione są więc warunki stosowania kryterium Popova. Charakterystyki amplitudowo-fazowe $G_1(j\omega)$ oraz $G_P(j\omega)$ części liniowej rozpatrywanego układu są pokazane na rys. 11.27. Obie charakterystyki przecinają oś rzeczywistą $U(\omega)$ w tym samym punkcie. Na podstawie (11.33) widać, że w tym punkcie $V(\omega) = 0$ oraz $U(\omega) = -1/k_2$.

Wartość pulsacji w tym punkcie można obliczyć z zależności:

$$V(\omega) = \text{Im}\{G_1(j\omega)\} = 0, \text{ skąd otrzymujemy: } \omega = \omega_k = 10,3 \text{ s}^{-1}.$$

Z kolei punkt na osi rzeczywistej można określić z zależności:

$$U(\omega_k) = \operatorname{Re}\{G_1(j\omega_k)\} = -1,756 = -1/k_2, \text{ skąd: } k_2 = 1/1,756 = 0,569 = k_{gr}.$$



Rys. 11.27. Charakterystyki amplitudowo-fazowe na płaszczyźnie $U(\omega) + jV_P(\omega)$

Z relacji (11.32) wynika, że rozpatrywany układ nieliniowy będzie stabilny globalnie, jeśli spełniony będzie warunek: $k_2 < k_{gr}$, a więc $k_2 < 0,5695$.

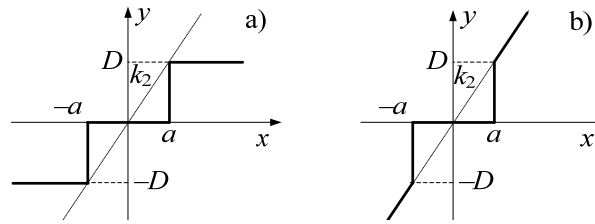
Przez punkt przecięcia trajektorii $G_P(j\omega)$ z osią rzeczywistą można przeprowadzić prostą Popowa, która w tym przypadku ustala wartość współczynnika q (nachylenie prostej wynosi $1/q$). Przez punkt $-1/k_2$ należy więc przeprowadzić prostą, która w tym przypadku jest styczną do trajektorii $G_P(j\omega)$ dla $\omega = \omega_k$ (prosta Popowa nie może przecinać tej trajektorii). Jest ona nachylona do osi rzeczywistej pod kątem ψ (rys. 11.27), który można określić analitycznie na podstawie stosunku pochodnych obu składowych:

$$1/q = \operatorname{tg} \psi = \frac{D(\operatorname{Im})}{D(\operatorname{Re})}, \text{ gdzie } D(\operatorname{Im}) = \frac{d \operatorname{Im}\{G_P(j\omega)\}}{d\omega}, \quad D(\operatorname{Re}) = \frac{d \operatorname{Re}\{G_P(j\omega)\}}{d\omega}, \text{ przy czym po-}$$

chodne należy obliczyć dla $\omega = \omega_k$, skąd: $\operatorname{tg} \psi = 7,15$, skąd: $\psi = 82^\circ$ oraz $q = 1/\operatorname{tg} \psi = 0,14$.

Wyznaczenie współczynnika k_2 w istocie sprowadza się do określenia maksymalnej wartości wzmocnienia otwartego układu nieliniowego z częścią liniową, który po zamknięciu pozostaje stabilny globalnie. Współczynnik k_2 można więc podzielić na dwie części: $k_2 = k_l k_n$, gdzie współczynnik k_l zostaje dołączony do transmitancji części liniowej, tworząc razem układ o transmitancji: $k_l G_1(j\omega)$, natomiast k_n odwzorowuje wzmocnienie części nieliniowej. W odniesieniu do części nieliniowej, k_2 (lub k_n) jest statycznym współczynnikiem wzmocnienia, który definiuje nachylenie prostej ograniczającej rozmieszczenie charakterystyki nieliniowej (rys. 11.28).

Kryterium Popova dostarcza informacji o wystarczającym (a nie koniecznym) warunku stabilności globalnej układu nieliniowego: na jego podstawie nie można sądzić o zachowaniu się układu po przekroczeniu przez k_2 wartości granicznej. Sprawę tę ilustrują przykłady z rys. 11.28: dla $k_2 > k_{gr}$, układ z elementem z rys. 11.28a może przejść do stanu stabilnego z oscylacjami nietłumionymi (stabilny punkt równowagi), natomiast w przypadku elementu z rys. 11.28b, oscylacje nie będą tłumione, co oznacza stan niestabilny (dodatkowe warunki są nałożone przez wartości parametrów a oraz D).



Rys. 11.28. Charakterystyki elementów nieliniowych o tym samym współczynniku wzmocnienia

Ważną zaletą metody Popova jest jej uniwersalność: brak jest istotnych warunków, które ograniczają jej stosowanie. Można więc ją stosować do układów wysokiego rzędu, z opóźnieniem, a także do układów o parametrach rozłożonych.

Przykład 11.9. Dany jest układ nieliniowy, którego część liniowa jest określona za pomocą następującej transmitancji [5]:

$$G_1(s) = \frac{k_a}{(T_1^2 s^2 + 2\zeta_1 T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\zeta_2 T_2 s + 1)}$$

z następującymi parametrami: $k_a = 1$; $T_1 = 5$; $\zeta_1 = 0,5$; $T_2 = 1,5$; $\zeta_2 = 0,04$. Stosując metodę Popova, określić graniczną wartość współczynnika wzmocnienia statycznego części nieliniowej k_2 , dla której układ nieliniowy jest globalnie stabilny.

Dla podanych wartości parametrów bieguny transmitancji są następujące: $s_{1,2} = 0,1(-1 \pm j\sqrt{3})$; $s_{3,4} = -0,0267 \pm j0,9992$. Spełnione są więc warunki stosowania kryterium Popova.

W celu sporządzenia trajektorii widmowej transmitancji $G_P(j\omega) = U(\omega) + jV_P(\omega)$ na płaszczyźnie Nyquista, obliczamy (dla $k_a = 1$):

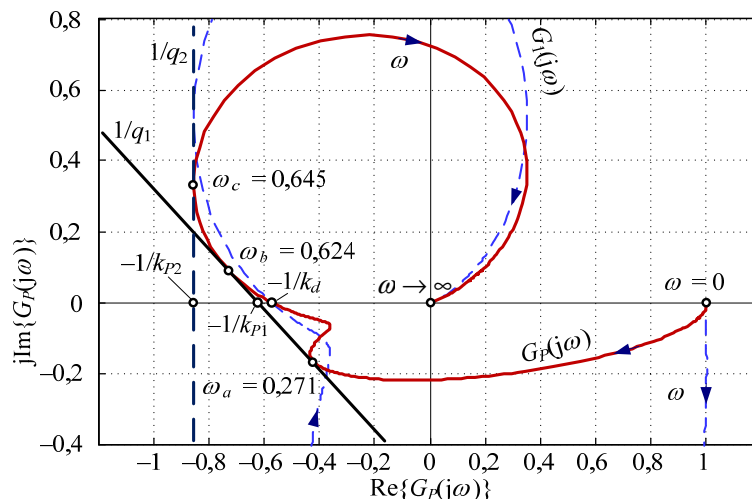
$$U(\omega) = \operatorname{Re}\{G_1(j\omega)\} = \frac{(1 - T_1^2 \omega^2)(1 - T_2^2 \omega^2) - 4\zeta_1 T_1 \zeta_2 T_2 \omega^2}{(2\zeta_1 T_1 \omega)^2 + (1 - T_1^2 \omega^2)^2} \cdot \frac{(2\zeta_2 T_2 \omega)^2 + (1 - T_2^2 \omega^2)^2}{(2\zeta_1 T_1 \omega)^2 + (1 - T_1^2 \omega^2)^2},$$

$$V_P(\omega) = \omega \operatorname{Im}\{G_1(j\omega)\} = \frac{-2\omega^2 \left[(1 - T_1^2 \omega^2) \zeta_2 T_2 + (1 - T_2^2 \omega^2) \zeta_1 T_1 \right]}{(2\zeta_1 T_1 \omega)^2 + (1 - T_1^2 \omega^2)^2} \cdot \frac{(2\zeta_2 T_2 \omega)^2 + (1 - T_2^2 \omega^2)^2}{(2\zeta_1 T_1 \omega)^2 + (1 - T_1^2 \omega^2)^2}.$$

Przebiegi trajektorii $G_P(j\omega)$ oraz $G_1(j\omega)$ (tylko fragmenty) są pokazane na rys. 11.29.

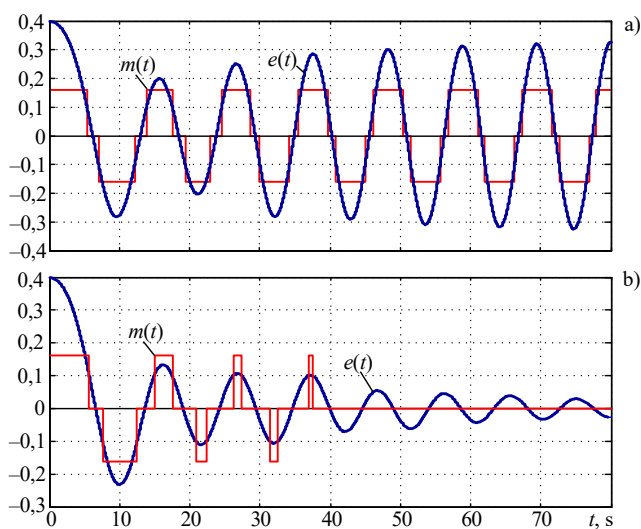
Na rysunku wykreślone są również dwie proste Popova: prosta graniczna, która wyznacza największą wartość współczynnika wzmocnienia $k_{gr} = k_{p1} = 1,61$ ($-1/k_{p1} = -0,62$) oraz prosta prostopadła do osi rzeczywistej ($q_2 = 0$, $-1/k_{p2} = -0,855$ ($k_{p2} = 1,17$)). Punkt $-1/k_d = -0,573$ określa

przecięcie trajektorii ($G_P(j\omega)$ oraz $G_1(j\omega)$) z osią rzeczywistą. Współczynnik $k_d = 1,745$ jest więc zapasem wzmocnienia części liniowej układu. Przez analogię, współczynnik $k_{gr} = k_{p1}$ można traktować jako graniczny zapas wzmocnienia układu nieliniowego, przy czym ogólnie: $k_{gr} \leq k_d$.



Rys. 11.29. Charakterystyki amplitudowo-fazowe na płaszczyźnie $U(\omega) + jV_P(\omega)$

Na rysunku zaznaczono wartości pulsacji w charakterystycznych punktach: ω_a , ω_b - na prostej granicznej ($1/q_1 = -0,843$) oraz ω_c - na dodatkowej prostej Popova. Dla ilustracji stanu dynamicznego rozważanego układu na rys. 11.30 pokazane zostały wyniki symulacji układu w dwóch jego stanach: po przekroczeniu wzmocnienia krytycznego oraz w stanie stabilnym.



Rys. 11.30. Przebiegi w układzie nieliniowym: po przekroczeniu wzmocnienia krytycznego a) oraz w stanie stabilnym b)

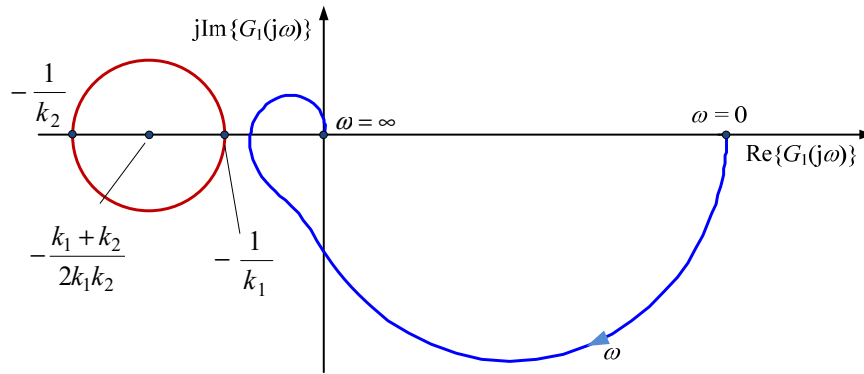
W charakterze elementu nieliniowego wybrany został układ z rys. 11.28a z następującymi parametrami: $a = 0,1$, $D = 0,161$, co daje wzmocnienie statyczne $k_2 = 1,61 = k_{gr}$. Ponadto w części liniowej wprowadzono dodatkowe wzmocnienie: $k_l = 3,0$ (rys. 11.28a) oraz $k_l = 2,406$ (rys. 11.28b - stabilny). Ze względu na charakter elementu nieliniowego przebieg z rys. 11.30a przedstawia stan odpowiadający stabilnemu punktowi równowagi po przekroczeniu krytycznej wartości wzmocnienia.

11.2.5. Rozszerzona metoda Nyquista

Metoda ta jest znana w literaturze także, jako kryterium okręgu (kołowe) lub kryterium Kudrewicza, który je pierwszy zastosował. Twierdzenie Kudrewicza, które definiuje to kryterium, odnosi się do układu nieliniowego określonego przez (11.25). Współczynniki k_1 i k_2 wyznaczają proste, pomiędzy którymi mieści się charakterystyka statyczna części nieliniowej układu (rys. 11.25). Twierdzenie to można sformułować następująco [29, 33]. Układ nieliniowy o charakterystyce statycznej określonej przez (11.25) i stabilnej asymptotycznie części liniowej jest stabilny, jeśli charakterystyka amplitudowo-fazowa $G_1(j\omega)$ przy zmianie pulsacji w granicach $0 \leq \omega \leq \infty$ nie przecina się z okręgiem $D(k_1, k_2)$, którego środek leży na ujemnej części osi rzeczywistej, natomiast jego średnica jest wyznaczona przez dwa graniczne punkty okręgu: $-1/k_2, -1/k_1$ na tej osi (rys. 11.31).

Środek okręgu oraz jego promień są wyznaczone przez współczynniki k_1, k_2 :

$\left(-\frac{k_1 + k_2}{2k_1k_2}, j0\right)$ - środek okręgu oraz: $\frac{k_2 - k_1}{2k_1k_2}$ - jego promień.



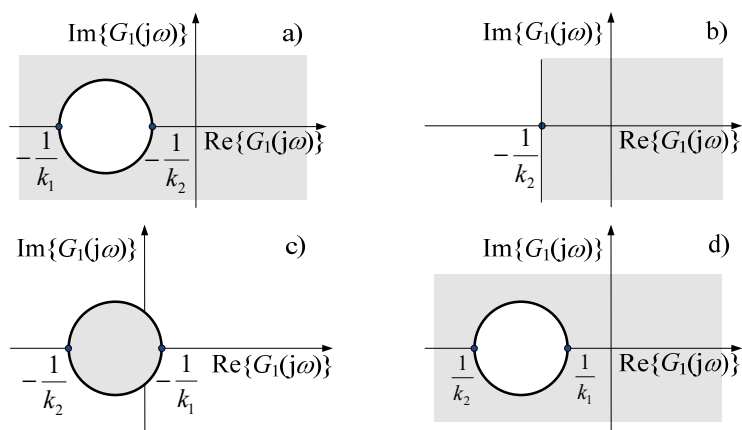
Rys. 11.31. Charakterystyka amplitudowo-fazowa z trajektorią $G_1(j\omega)$ oraz okręgiem określającym stabilność układu nieliniowego

Zauważmy, że w przypadku gdy: $k_1 \rightarrow k_2$, promień okręgu D przyjmuje zerową średnicę, natomiast powstały punkt ma położenie $-1/k_2 = -1/k$. Stabilność układu jest wówczas zapewniona przez warunek:

$$\operatorname{Re}\{G_1(j\omega)\} > -\frac{1}{k} \quad \text{lub:} \quad k \operatorname{Re}\{G_1(j\omega)\} > -1,$$

co jest równoważne kryterium Nyquista, jeśli $G_1(s)$ ma wszystkie bieguny w ujemnej półpłaszczyźnie s . Parametr k pełni rolę współczynnika wzmocnienia.

Przedstawione kryterium wywodzi się z kryterium Popova i jest w literaturze nazywane rozszerzonym kryterium Nyquista, kryterium Kudrewicza lub kryterium okręgu (ang. *circle criterion*), co wiąże się z warunkami wzajemnego położenia trajektorii transmitancji widmowej $G_1(j\omega)$ oraz właśnie okręgu D . Pokazane na rys. 11.32 przypadki składają się na formalną definicję tego kryterium [4]:



Rys. 11.32. Stabilne rejony położenia charakterystyki wykresu Nyquista (zaciemnione obszary)

nieliniowy system, spełniający założenie (11.25), na podstawie którego wyznacza się okrąg $D(k_1, k_2)$ (rys. 11.31), którego środek leży na ujemnej osi rzeczywistej płaszczyzny Nyquista, z częścią liniową określoną przez transmitancję $G_1(s)$, jest stabilny asymptotycznie, jeśli spełniony jest jeden z następujących warunków:

1. dla $0 < k_1 < k_2$, trajektoria transmitancji widmowej $G_1(j\omega)$ obejmuje wskazany okrąg P razy w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara przy zmianie pulsacji w zakresie $(-\infty < \omega < +\infty)$, gdzie P – liczba niestabilnych biegunów transmitancji $G_1(s)$ - rys. 11.32a;
2. dla $0 = k_1 < k_2$, trajektoria transmitancji widmowej $G_1(j\omega)$ spełnia warunek: $\text{Re}\{G_1(j\omega)\} > -1/k_2$ dla $P = 0$ - rys. 11.32b;
3. dla $k_1 < 0 < k_2$, trajektoria $G_1(j\omega)$ leży wewnątrz okręgu D , $P = 0$ - rys. 11.32c.

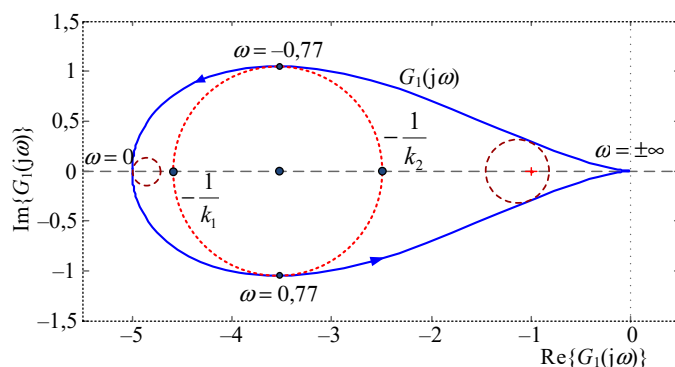
Przypadek pokazany na rys. 11.32d odpowiada trajektorii ujemnej transmitancji $(-G_1(j\omega))$. Wówczas: $k_1 < k_2 < 0$, a pozostałe warunki są jak w p. 1.

Przykład 11.10. Dany jest układ nieliniowy, którego część liniowa jest określona za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+2)(s-1)}$$

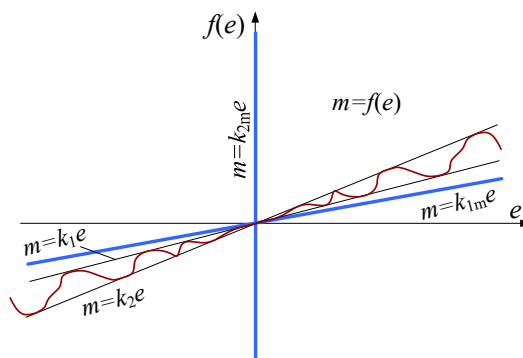
Zbadać warunki stabilności tego układu.

Bieguny transmitancji $G_1(s)$ są następujące: $s_1 = 1$, $s_2 = -2$. Układ otwarty jest więc niestabilny z jednym biegunem o dodatniej wartości ($P = 1$). Przebieg trajektorii transmitancji widmowej na płaszczyźnie Nyquista jest pokazany na rys. 11.33.



Rys. 11.33. Charakterystyka Nyquista obejmująca dowolny okrąg D wewnątrz zamkniętej trajektorii wyznaczonej przez transmitancję widmową $G_1(j\omega)$

W utworzoną zamkniętą trajektorię można wpisać okręgi, które spełniają warunki kryterium: każdy z nich jest objęty jeden raz przez charakterystykę Nyquista w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (środki okręgów leżą na osi rzeczywistej). Największy z nich wyznacza następujące granice: $-1/k_1 = -4,6$ ($k_1 = 0,22$) oraz $-1/k_2 = -2,5$ ($k_2 = 0,40$). Współczynniki te wyznaczają obszar dopuszczalnych zmian statycznej charakterystyki układu nieliniowego (rys. 11.34 – obszar z zaznaczoną charakterystyką nieliniową). Biorąc pod uwagę skrajne warunki utworzenia takich okręgów, otrzymamy warunek stabilności: $-1/k_{1m} > -5$ oraz $-1/k_{2m} < 0$, skąd: $0,2 < k_{1m} \leq k_{2m} < \infty$, który w całości odnosi się do układu liniowego - rys. 11.34. Mogą to być także mniejsze przedziały, wyznaczone przez mniejsze okręgi na rys. 11.33.



Rys. 11.34. Statyczna charakterystyka stabilnego układu nieliniowego leży w obszarze wyznaczonym przez graniczne wartości współczynników $0,2 < k_1 \leq k_2 < \infty$

Jeśli w rozważanym układzie nieliniową charakterystykę zamienić na zależność liniową, reprezentującą prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych ze współczynnikiem

nachylenia k , to powyższe zadanie zamieni się na problem określenia wartości tego współczynnika w transmitancji liniowego układu otwartego:

$$G_1(s) = \frac{10k}{(s+2)(s-1)},$$

przy którym układ zamknięty będzie stabilny. Łatwo sprawdzić, że zachodzi to dla: $0,2 < k$, a więc podobnie jak powyżej dla $k_1 = k_2 = k$ (okrąg przekształca się w punkt).

Przykład 11.11. Dany jest autonomiczny układ nieliniowy, którego część liniowa jest określona za pomocą następującej transmitancji:

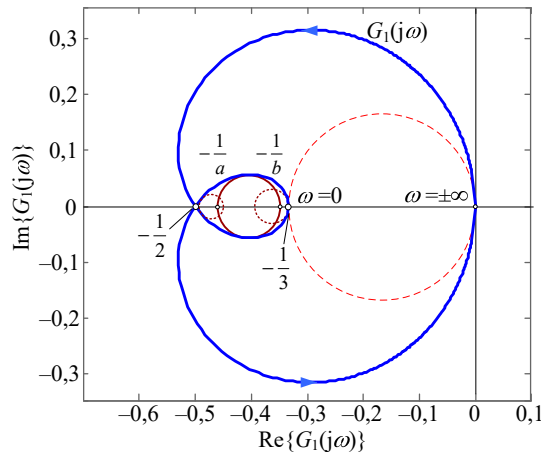
$$G_1(s) = \frac{s - 0,5}{s^2 - 2s + 1,5} = \frac{Y(s)}{E(s)}$$

Stosując kryterium kołowe, zbadać warunki stabilności tego układu.

Układ ma strukturę jak na rys. 11.24, przy czym: $u(t) = 0$, $e = -y$.

Bieguny transmitancji części liniowej otrzymujemy z równania charakterystycznego:

$s^2 - 2s + 1,5 = 0$, skąd: $s_{1,2} = 1 \pm j\sqrt{2}/2$ – oba pierwiastki mają dodatnie części rzeczywiste ($P = 2$). W celu określenia stabilnych rejonów wyznaczonych przez kryterium kołowe, należy posłużyć się wykresem Nyquista transmitancji widmowej $G_1(j\omega)$ i sprawdzić warunki jak na rys. 11.32a: trajektoria powinna dwukrotnie okrążyć okrąg $D(k_1, k_2)$ w kierunku dodatnim. Warunek ten spełniają tylko mniejsze okręgi wpisane w trajektorię części liniowej transmitancji widmowej na rys. 11.35. Największy przedział stabilnej pracy układu nieliniowego jest wyznaczony przez punkty $-1/a$ oraz $-1/b$. Stabilny przedział zmian wzmocnienia układu liniowego jest wyznaczony przez graniczne punkty $-1/a = -0,5$, $-1/b = -0,333$, skąd: $a = 2,0$; $b = 3,0$. Te współczynniki określają strefę dopuszczalnych zmian części nieliniowej układu reprezentowanej przez zależność liniową (wzmocnienie $k = a = b$ - rys. 11.36). Jak widać, dopuszczalna strefa zmian jest dosyć wąska.



Rys. 11.35. Trajektoria Nyquista do analizy kryterium kołowego

Sprawdźmy, jak zachowuje się układ w pobliżu asymptot ograniczających tę strefę. W tym celu część nieliniową reprezentujemy za pomocą elementu o wzmocnieniu k , co na rys. 11.36

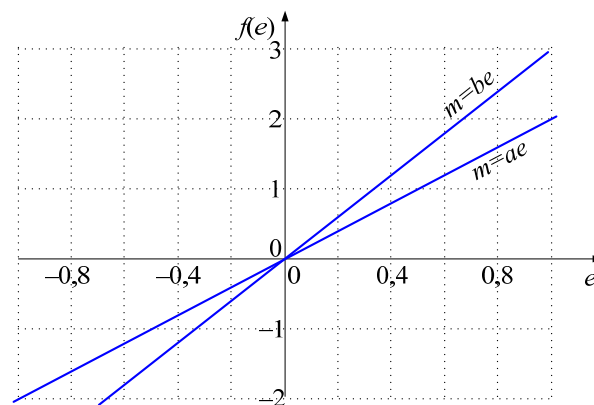
odpowiada prostej o takim właśnie współczynniku nachylenia (graniczne asymptoty mają nachylenie a lub b). Przy takim założeniu transmitancja całego autonomicznego układu jest równa transmitancji $G_1(j\omega)$ pomnożonej przez współczynnik k . Otrzymujemy więc następujące równanie przetwarzania w tym układzie (model w dziedzinie Laplace'a):

$$s^2 Y(s) = k s E(s) - 0,5 k E(s) + 2 s Y(s) - 1,5 Y(s).$$

Ponieważ $E(s) = -Y(s)$, więc powyższa zależność przyjmuje następującą postać w dziedzinie czasu:

$$\ddot{y}(t) = (2 - k)\dot{y}(t) - 0,5(3 - k)y(t),$$

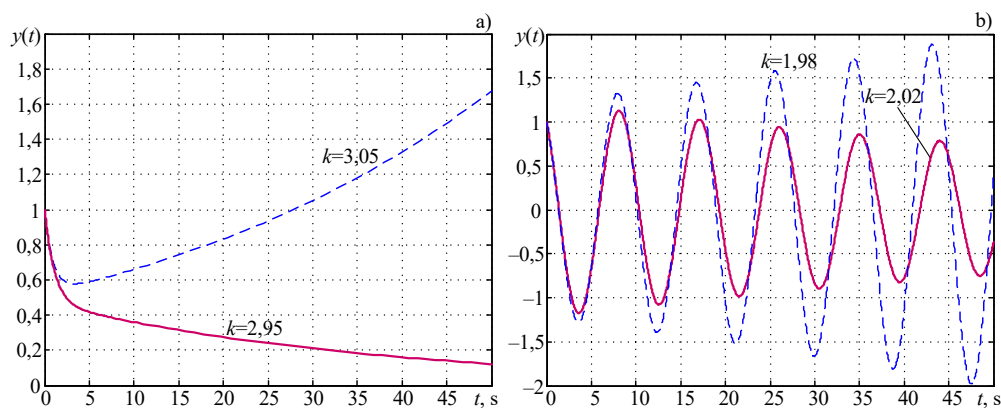
co łatwo jest zrealizować w postaci modelu symulacyjnego.



Rys. 11.36. Dopuszczalna strefa zmian charakterystyki części nieliniowej układu

Uzyskane przebiegi sygnału wyjściowego $y(t)$ są pokazane na rys. 11.37. Łatwo zauważyć, że współczynniki wzmocnienia $k = 1,98$ oraz $k = 3,05$ leżą już w strefie niestabilności układu. Przebiegi uzyskano dla następujących wartości początkowych: $y(0) = 1,0$ oraz $y'(0) = -0,5$.

Podobnie jak w przykładzie 11.10, także tutaj, można wyznaczyć przedział zmienności ekwiwalentnego współczynnika k , badając stabilność układu zamkniętego, w którym transmitancja układu otwartego jest równa:



Rys. 11.37. Odpowiedzi układu w pobliżu obszarów stabilności

$$kG_1(s) = \frac{k(s-0,5)}{s^2 - 2s + 1,5}$$

Zadanie sprowadza się więc do określenia przedziału zmian k , w którym stabilny jest układ o transmitancji:

$$G(s) = \frac{kG_1(s)}{1 + kG_1(s)} = \frac{k(s-0,5)}{s^2 - (2-k)s + 0,5(3-k)} = \frac{L(s)}{M(s)}$$

Bieguny transmitancji $G(s)$ wyznaczymy, rozwiązując równanie: $M(s) = 0$. Pierwiastki tego równania przyjmują ujemne części rzeczywiste dla: $2 < k < 3$, co jest zgodne z otrzymanym powyżej wynikiem na podstawie kryterium kołowego.

11.3. Metoda funkcji opisującej

Rozpatrzmy nieliniowy układ regulacji jak na rys. 11.24. Załóżmy, że na wejście bloku nieliniowego podawany jest sygnał harmoniczny:

$$e(t) = A \sin(\omega t) \quad (11.35)$$

Jeśli w bloku nieliniowym nie występują elementy inercyjne, to na wyjściu pojawi się sygnał, który można przedstawić w postaci szeregu Fouriera:

$$m(t) = f(e(t)) = M_0 + M_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + M_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \quad (11.36)$$

W przypadku, gdy $f(e)$ jest funkcją antysymetryczną, to $M_0 = 0$.

Linearyzacja harmoniczna polega na założeniu, że przebieg wyjściowy $m(t)$ może być przybliżony przez składnik, odnoszący się do pierwszej harmonicznej (11.36):

$$m(t) \approx M_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = B_1 \sin(\omega t) + C_1 \cos(\omega t), \quad (11.37)$$

co można przedstawić w postaci zespolonego wektora (zespolonej amplitudy):

$$M(A) = B_1(A) + jC_1(A) \quad (11.38)$$

Iloraz zespolonego wektora na wyjściu bloku nieliniowego do amplitudy harmonicznego sygnału wejściowego jest nazywany funkcją opisującą [57]:

$$J(A) = P(A) + jQ(A) = \frac{B_1(A) + jC_1(A)}{A} = \underline{J}, \quad (11.39)$$

$$\text{gdzie: } P(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t \, d(\omega t), \quad Q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos \omega t \, d(\omega t).$$

Przykład 11.12. Określić funkcję opisującą dla dwóch typowych nieliniowości:

a) dla idealnego dwupołożeniowego przekaźnika, dla którego:

$$y = f(x) = D \operatorname{sgn}(A \sin(\omega t))$$

b) dla nieliniowości trzeciego stopnia:

$$y = f(x(t)) = D(A \sin \omega t)^3.$$

Kształty tych funkcji są pokazane na rys. 11.38.

Zakładamy, że w obu przypadkach sygnał testujący ma postać (11.35).

W pierwszym przypadku, zgodnie z (11.39), otrzymujemy:

$$P(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} D \operatorname{sgn}(A \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2D}{\pi A} \int_0^{\pi} \sin \omega t d(\omega t) = \frac{4D}{\pi A}.$$

$$\text{Można sprawdzić, że: } Q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} D \operatorname{sgn}(A \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t) = \frac{2D}{\pi A} \int_0^{\pi} \cos \omega t d(\omega t) = 0.$$

$$\text{Zatem: } J(A) = P(A) = \frac{4D}{\pi A}$$

W przypadku nieliniowości trzeciego stopnia otrzymamy:

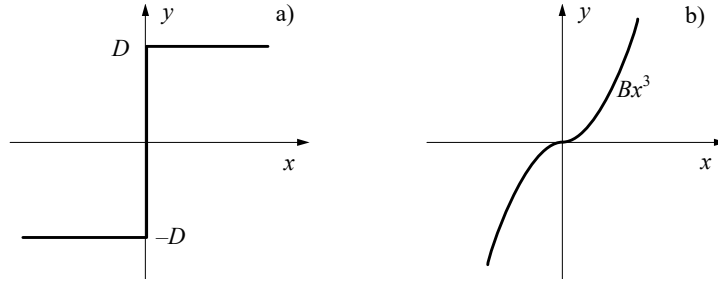
$$y = f(x(t)) = D(A \sin \omega t)^3 = DA^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right) = \frac{3}{4} A^2 D A \sin \omega t - \frac{1}{4} A^3 D \sin 3\omega t$$

Do dalszych rozważań pozostawiamy tylko składnik z podstawową harmoniczną, co w postaci wektorowej ma następującą formę:

$$Y = \frac{3}{4} A^2 D A$$

Wobec tego:

$$J(A) = \frac{3}{4} \frac{A^3 D}{A} = \frac{3}{4} A^2 D$$



Rys. 11.38. Przykłady nieliniowych funkcji

W niektórych wybranych przypadkach funkcja opisująca zależy także od pulsacji sygnału wejściowego:

$$J(A, \omega) = P(A, \omega) + jQ(A, \omega).$$

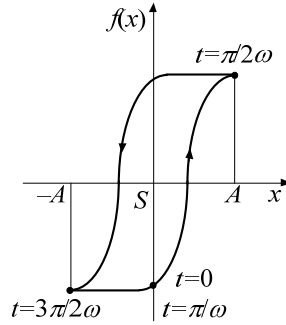
Odnosi się to do przypadku nieliniowości wyższego rzędu, gdy w opisie funkcji nieliniowej występują także pochodne względem sygnału wejściowego. Takie zależności nie występują w większości standardowych przypadków (z nieliniowościami zerowego rzędu), które będą dalej rozpatrywane. Pozostaniemy zatem przy założeniu jak w (11.39).

Składnik urojony w wyrażeniu na funkcję opisującą (11.39) jest różny od zera tylko w przypadku, gdy funkcja nieliniowa jest wielowartościowa (funkcja z histerezą). Wówczas współczynnik urojony w (11.39) można określić za pomocą całki krzywoliniowej obliczanej wzdłuż zamkniętego konturu charakterystyki nieliniowej (rys. 11.39) [57]:

$$Q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos \omega t \, d(\omega t) =$$

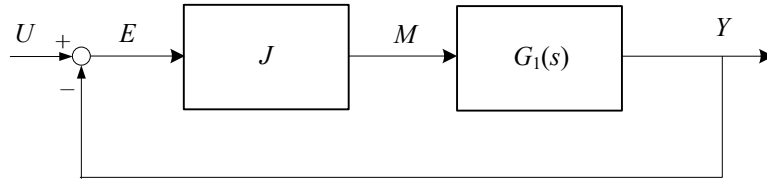
$$\frac{1}{\pi A^2} \oint f(A \sin \omega t) d(A \sin \omega t) = \frac{1}{\pi A^2} \oint f(x) d(x) = -\frac{1}{\pi A^2} S \quad (11.40)$$

gdzie S jest polem wyznaczonym przez zamknięty kontur charakterystyki.



Rys. 11.39. Nieliniowa charakterystyka z histerezą

Funkcja opisująca $\underline{J}$, wyznaczona według przedstawionej metody pełni rolę zespolonego współczynnika wzmocnienia, który zastępuje nieliniową funkcję $f(e)$ w schemacie na rys. 11.24, co jest pokazane na rys. 11.40.



Rys. 11.40. Schemat układu sterowania z funkcją opisującą

Zauważmy, że wartość współczynnika zespolonego $\underline{J} = \underline{J}(A)$ zależy od amplitudy sygnału wejściowego. Wszystkie wielkości na rys. 11.40 reprezentują odpowiednie wektory zespolone odniesione do pulsacji $s \rightarrow j\omega$. Na przykład, przy założonym sygnale harmonicznym reprezentowanym przez zespolony wektor uchybu $\underline{E}$, wektor wyjścia można określić z zależności:

$$Y(j\omega) = \underline{E} \underline{J} G_1(j\omega)$$

Transmitancja układu zamkniętego z rys. 11.40 przyjmuje więc następującą postać:

$$G(j\omega) = \frac{\underline{J} G_1(j\omega)}{1 + \underline{J} G_1(j\omega)} = \frac{G_1(j\omega)}{\frac{1}{\underline{J}} + G_1(j\omega)}, \quad (11.41)$$

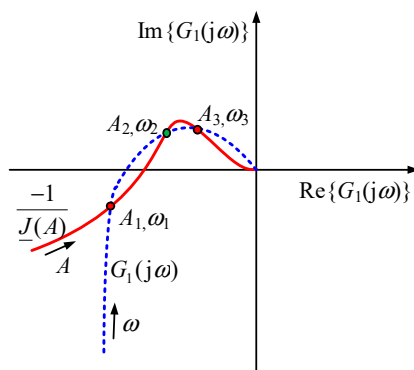
przy czym, że jeśli $\underline{J} = 1$, to mamy do czynienia z układem liniowym, którego stabilność jest określana na podstawie relacji trajektorii transmitancji układu otwartego $G_1(j\omega)$ do punktu $(-1, 0)$ na płaszczyźnie Nyquista. W układzie nieliniowym reprezentowanym za pomocą funkcji opisującej rolę punktu $(-1, 0)$ pełni funkcja $-1/\underline{J}(A)$. Przykład wzajemnej relacji pomiędzy funkcją $-1/\underline{J}(A)$ oraz $G_1(j\omega)$ jest pokazany na rys. 11.40. Do wykreślenia funkcji $-1/\underline{J}(A)$ można posłużyć się reprezentacją wykładniczą funkcji opisującej:

$$\underline{J} = |\underline{J}| e^{j\phi} \quad (11.42)$$

gdzie: $|\underline{J}| = \sqrt{P^2(A) + Q^2(A)}$, $\phi = \arctg \frac{Q(A)}{P(A)}$.

W takim razie: $\frac{-1}{\underline{J}(A)} = \frac{1}{|\underline{J}(A)|} e^{-j(\phi+\pi)}$.

Ilustracja współzależności trajektorii odwrotności funkcji opisującej i charakterystyki Nyquista na płaszczyźnie zespolonej układu otwartego jest pokazana na rys. 11.41.



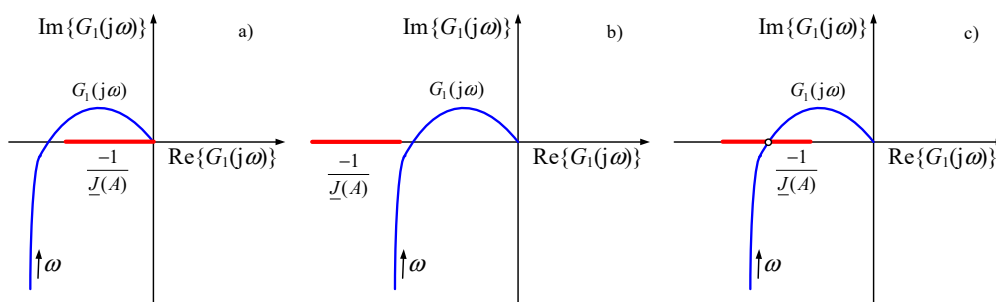
Rys. 11.41. Trajektorja transmitancji części liniowej i odwrotności funkcji opisującej

W rozpatrywanym przypadku funkcja opisująca ma charakter zespolony, natomiast część liniowa jest reprezentowana transmitancją I-szej klasy (z zerowym biegunem). Obie charakterystyki przecinają się w trzech punktach wyznaczonych przez amplitudy A (wyznaczone przez funkcję opisującą) oraz pulsacje ω (związane z trajektorią transmitancji układu liniowego). Punkty te odpowiadają cyklom granicznym układu, które mogą być stabilne lub niestabilne. Przy ich ocenie obowiązują następujące zasady:

- jeśli zwiększenie amplitudy A powoduje przesunięcie punktu na charakterystyce $-1/\underline{J}(A)$ na prawo od trajektorii $G_1(j\omega)$, to jest to cykl niestabilny;
- jeśli zwiększenie amplitudy A powoduje przesunięcie punktu na charakterystyce $-1/\underline{J}(A)$ na lewo (na zewnątrz) od trajektorii $G_1(j\omega)$, to jest to cykl stabilny.

W ten sposób punkt (A_2, ω_2) określa cykl graniczny stabilny, a pozostałe dwa punkty wyznaczają cykle niestabilne.

Charakterystyczne przypadki położenia widmowej transmitancji części liniowej i odwrotności funkcji opisującej na płaszczyźnie Nyquista są pokazane na rys. 11.42.



Rys. 11.42. Położenie widmowej transmitancji części liniowej i odwrotności funkcji opisującej

Przykład z rys. 11.42a) odpowiada sytuacji systemu niestabilnego: trajektoria transmitancji widmowej całkowicie obejmuje wykres odwrotności funkcji opisującej. Przeciwny przypadek jest pokazany na rys. 11.42b): trajektoria transmitancji widmowej znajduje się po prawej stronie trajektorii $-1/J(A)$. W przykładzie z rys. 11.42c) występuje cykl graniczny i potrzebna jest bliższa analiza w celu określenia jego rodzaju.

Przykład 11.13. W układzie jak na rys. 11.24 funkcja nieliniowa jest określona równaniem:

$$m(t) = f(e) = e + e^3, \quad u(t) = 0,$$

natomiast transmitancja części liniowej jest następująca:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Zbadać warunki stabilności tego układu.

Funkcja opisująca dla części nieliniowej może być określona na podstawie wyników przykładu 11.12, gdzie dla składnika trzeciego stopnia otrzymano:

$$J(A) = \frac{3}{4} A^2 D, \quad D = 1. \text{ Pierwszy składnik rozpatrywanej funkcji jest liniowy o wzmacnieniu 1,}$$

więc ostatecznie, dla funkcji $f(e) = e + e^3$, otrzymamy: $\underline{J}(A) = J(A) = 1 + \frac{3}{4} A^2$ (część urojona jest równa zero).

Na płaszczyźnie Nyquista należy wykreślić funkcję $-1/J(A)$:

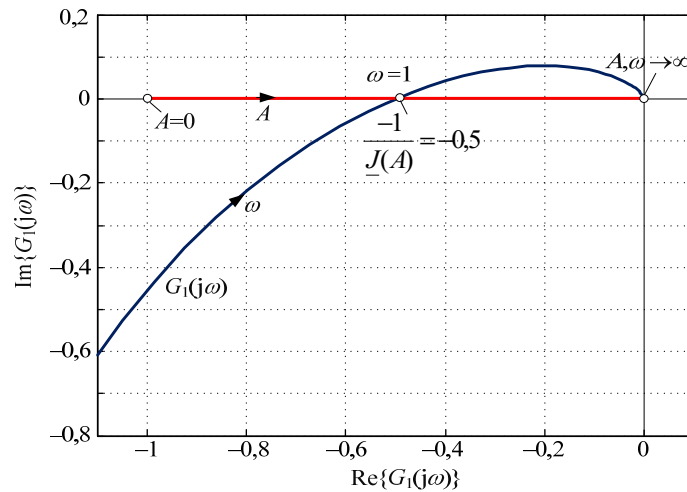
$$\frac{-1}{J(A)} = \frac{-1}{1 + \frac{3}{4} A^2}.$$

Wykresy obu funkcji: ujemnej odwrotności funkcji opisującej oraz widmowej transmitancji części liniowej są pokazane na rys. 11.43. Pulsację odpowiadającą wspólnemu punktowi obu trajektorii można określić z warunku:

$$\operatorname{Im}\{G_1(j\omega)\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2}\right\} = 0, \text{ skąd otrzymamy następujące warunki: } \omega_{1,2} = \pm 1, \omega_3 = 0.$$

Widać, że punktowi wskazanemu na rys. 11.43 odpowiada pulsacja $\omega_1 = 1$, przy której $\operatorname{Re}\{G_1(j\omega)\} = -0,5$. Wartość amplitudy A , przy której trajektoria odwrotności funkcji opisującej przechodzi przez ten punkt, można określić z warunku:

$$\frac{-1}{1 + \frac{3}{4}A^2} = -0,5, \text{ skąd: } A = A_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

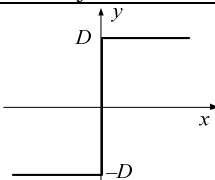
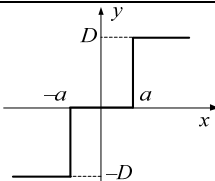
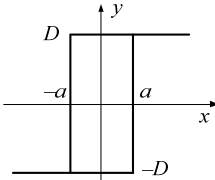
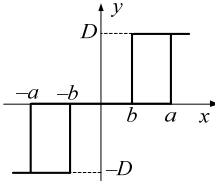
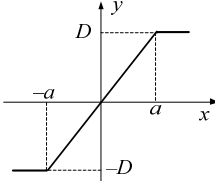
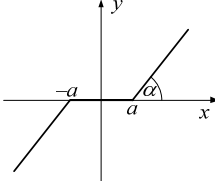
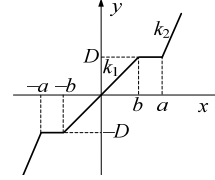


Rys. 11.43. Trajektorie części nieliniowej i liniowej układu

Punkt ten wyznacza cykl graniczny, który jest niestabilny, gdyż wzrost amplitudy A w tym punkcie powoduje przesunięcie trajektorii odwrotności funkcji opisującej na prawo od trajektorii widmowej transmitancji $G_1(j\omega)$ (trajektoria tej transmitancji obejmuje część trajektorii $-1/J(A)$, dla $A > A_1$), więc jest to cykl graniczny niestabilny. Ponieważ trajektoria $-1/J(A)$ biegnie aż do początku układu współrzędnych, więc nie można znaleźć warunków stabilizacji układu. Można to uzyskać jedynie przez korekcję elementu nieliniowego, na przykład przez dodanie do części nieliniowej elementu z nasyceniem (Tabela 11.2, wiersz 5).

Wartości funkcji opisujących dla typowych nieliniowości są zestawione w Tabeli 11.2. Przedstawiono tam w postaci graficznej przebiegi odpowiednich nieliniowości oraz związane z nimi funkcje opisujące. Na podstawie układu z pozycji 7 można otrzymać funkcje wielu innych elementów przez odpowiednią zmianę ukazanych parametrów: D , a , b , k_1 lub k_2 .

Tabela 11.2. Funkcje opisujące typowych elementów nieliniowych

Funkcja nieliniowa	Funkcja opisująca
1. 	$J(A) = \frac{4D}{\pi A}$
2. 	$A < a: \quad J(A) = 0$ $A > a: \quad J(A) = \frac{4D}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$
3. 	$A > a: \quad J(A) = \frac{4D}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - j \frac{4Da}{\pi A^2}$
4. 	$A > a: \quad J(A) = \frac{2D}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} - j \frac{a-b}{A} \right)$
5. 	$A > a: \quad J(A) = \frac{2D}{\pi a} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right)$
6. 	$A > a: \quad J(A) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\pi} \left(\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right)$
7. 	$A \leq b: \quad J(A) = k_1, \quad A > a:$ $J(A) = k_2 + \frac{2}{\pi} \left(k_1 \arcsin \frac{b}{A} - k_2 \arcsin \frac{a}{A} - \frac{k_1 b}{A} \cos \beta + \frac{2D}{A} \cos \beta - \frac{k_2 a}{A} \cos \alpha \right)$ gdzie: $\cos \alpha = a/A$, $\cos \beta = b/A$, $k_1 b = D$

Przykład 11.14. W układzie z przykładu 11.13 w charakterze elementu nieliniowego umieszczony jest przekaźnik 3-położeniowy symetryczny bez histerezy (jego funkcja nieliniowa i funkcja opisująca są określone w pozycji 2 Tabeli 11.2) z następującymi parametrami: $D = 1$, $a = 0,1$. Część liniową reprezentuje transmitancja jak w przykładzie 11.13:

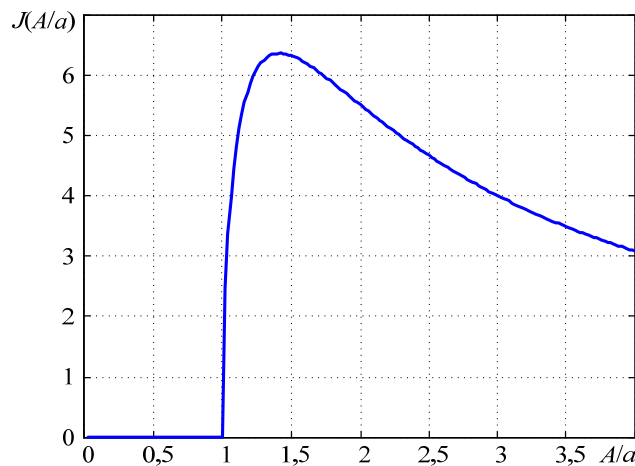
$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Zbadać warunki stabilności tego układu.

Funkcja opisująca rozpatrywanego elementu nieliniowego jest następująca (Tabela 11.2):

$$J(A) = \frac{4D}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}.$$

Przebieg tej funkcji względem zmiennej A/a jest pokazany na rys. 11.44. Uzyskuje się w ten sposób prostszą postać funkcji względem nowej zmiennej: $x = \frac{A}{a}$.



Rys. 11.44. Trajektorie części nieliniowej i liniowej układu

Widać, że funkcja ta przyjmuje maksymalną wartość w punkcie, który można określić na podstawie jej pochodnej:

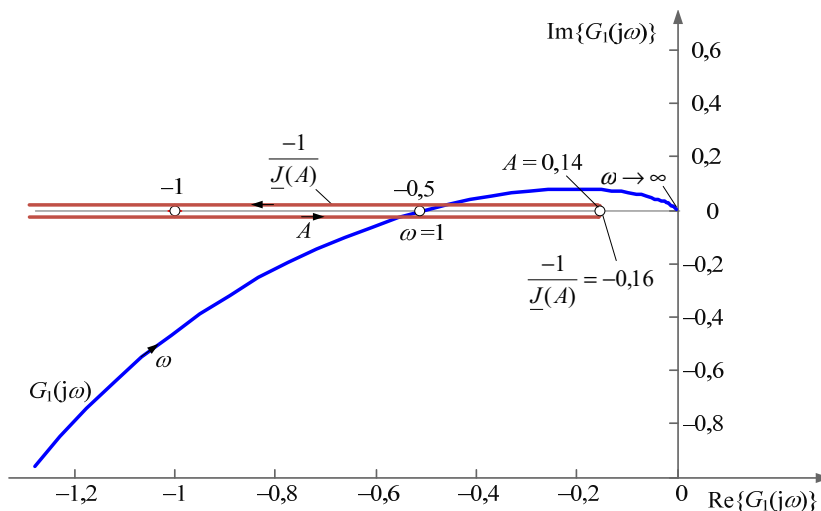
$$\frac{dJ(A/a)}{d(A/a)} = \frac{4D}{\pi a x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \right) = 0, \text{ skąd: } \frac{A}{a} = \sqrt{2}, \quad A = a\sqrt{2} = 0,1\sqrt{2} \approx 0,1414.$$

W tym punkcie funkcja opisująca przyjmuje następującą wartość:

$$J(A) = \frac{4D}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} = \frac{4}{\pi 0,1\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 6.366.$$

Trajektorie części liniowej i nieliniowej układu na płaszczyźnie Nyquista są pokazane na rys. 11.45.

Generalnie, trajektorie te są podobne do tych z przykładu 11.13. Trajektoria $-1/J(A)$, przy wzroście A , porusza się po ujemnej części osi rzeczywistej w stronę początku układu współrzędnych, przecinając trajektorię $G_1(j\omega)$ w punkcie $(-0,5, j0)$, gdy amplituda $A = 0,1013$. Widać, że wyznaczony w ten sposób cykl graniczny jest niestabilny. Trajektoria $-1/J(A)$ przyjmuje maksymalną wartość $-0,16$ dla $A = 0,14$ i zawraca w stronę ujemnych wartości, przecinając ponownie trajektorię $G_1(j\omega)$ w tym samym punkcie $(-0,5, j0)$ przy wartości amplitudy sygnału wymuszającego $A = 0,6285$. Tym jednak razem punkt ten wyznacza stabilny cykl graniczny, gdyż wzrost A łączy się z wyjściem trajektorii elementu nieliniowego na lewo od trajektorii $G_1(j\omega)$.



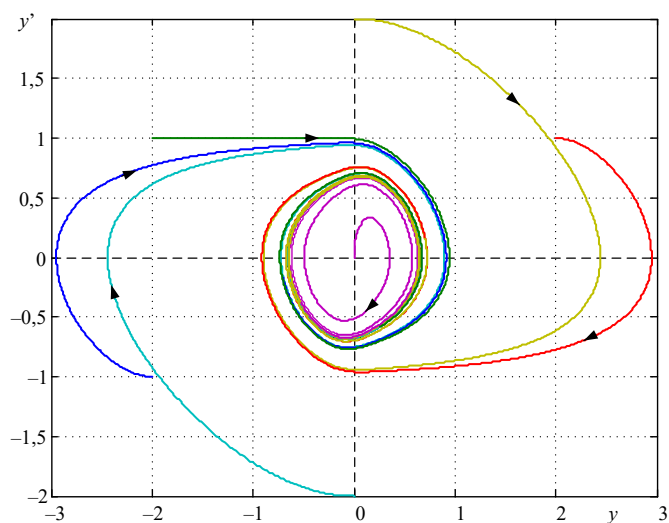
Rys. 11.45. Trajektorie części nieliniowej i liniowej układu

Tworzący się w ten sposób stabilny cykl graniczny jest dobrze widoczny na płaszczyźnie fazowej (rys. 11.46). Można zauważyć, że zarówno trajektorie mające początek na zewnątrz cyklu, jak i te, zaczynające się w jego wnętrzu, zbiegają do ustalonego cyklu granicznego. Cykl graniczny niestabilny (dla $A = 0,1013$) nie daje się zaobserwować.

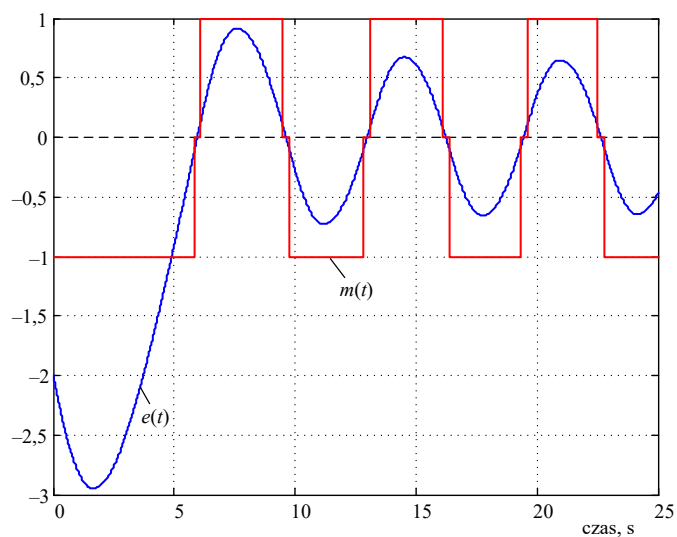
Charakterystyczną cechą cyklu stabilnego jest generacja ustalonych oscylacji na wyjściu układu. Obrazują to przebiegi na rys. 11.47. Widać, że amplituda stabilnych oscylacji na wejściu układu przyjmuje wartość obliczoną dla tego stanu: $A = 0,6285$.

Sygnał wyjściowy jest jednocześnie sygnałem błędu ($u(t) = 0$): $y(t) = e(t)$. Na rysunku jest także pokazany przebieg sygnału $m(t)$ na wyjściu układu nieliniowego (jest to także sygnał wejściowy do części liniowej). Można zauważyć, że blok opisany transmitancją $G_1(s)$ ma charakter filtra dolnoprzepustowego. Jest to, w istocie, warunek stosowania metody funkcji opisującej do analizy systemów nieliniowych.

Sygnał wyjściowy $y(t) = e(t)$ nie jest dokładnie sinusoidalny (harmoniczny), o czym świadczy nieco odkształcony kształt cyklu granicznego na płaszczyźnie fazowej (rys. 11.46).



Rys. 11.46. Trajektorie fazowe rozważanego układu

Rys. 11.47. Przebiegi sygnału wyjściowego $y(t)$ oraz na wejściu części liniowej $m(t)$ układu

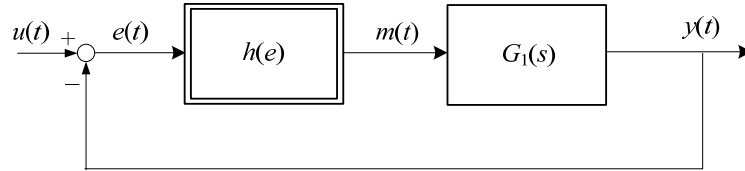
Metoda funkcji opisującej może być stosowana w odniesieniu do układów, które mają cechy filtra dolnoprzepustowego. W takim przypadku można oczekiwać, że energia reprezentowana w składnikach odnoszących się do wyższych harmonicznych przebiegu wyjściowego jest niewielka. Jednak, ze względu na nieuniknione uproszczenie związane z linearyzacją harmoniczną, dokładność tej metody jest na ogół mniejsza od metody płaszczyzny fazowej.

11.4. Metoda płaszczyzny fazowej w regulacji przekąźnikowej

Dwu- lub trójpołożeniowy przekąźnik jest wygodnym elementem wykonawczym w układzie regulacji. Umieszczenie takiego elementu w torze głównym lub w sprzężeniu zwrotnym powoduje, że mamy do czynienia z układem nieliniowym. Takie rozwiązania są ograniczone do układów drugiego rzędu. Do ich analizy może być stosowana zarówno metoda funkcji opisującej, jak i metoda portretu fazowego. Ta ostatnia jest zwykle dokładniejsza, więc poniżej omówione są podstawowe zasady jej stosowania.

Rozpatrzmy niezależny od czasu autonomiczny układ drugiego rzędu ($u(t) = 0$) o strukturze jak na rys. 11.48, w którym:

$$h(e) = h(\ddot{e}, \dot{e}, e) \quad (11.43)$$



Rys. 11.48. Schemat układu nieliniowego

Metodą podstawiania opis ten można przedstawić w postaci modelu stanowego:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ m &= g(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (11.44)$$

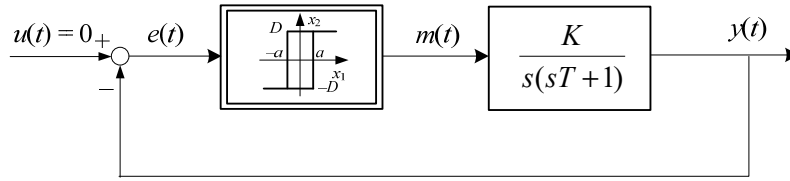
gdzie: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$.

Uogólniając rozważania z p. 11.2 można zauważyć, że równanie różniczkowe opisujące trajektorię układu we współrzędnych x_1, x_2 ma następującą postać:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (11.45)$$

Zależność (11.45) pozwala dokładnie analizować przebieg trajektorii układu na podstawie jego równania stanu. Zauważmy, że (11.45) przedstawia równanie różniczkowe pierwszego rzędu.

Przykład 11.15. W układzie z rys. 11.49 wyznaczyć trajektorie na płaszczyźnie fazowej. Przyjąć następujące parametry przekąźnika: $D = 1,0$; $a = 0,1$ oraz układu ciągłego: $T = 1,0$; $K = 1,0$.



Rys. 11.49. Schemat układu nieliniowego

Na podstawie transmitancji części liniowej otrzymujemy:

$$Y(s) = \frac{K}{s^2 T + s} M(s), \text{ skąd: } s^2 Y(s) = \frac{K}{T} M(s) - \frac{1}{T} s Y(s).$$

Przechodząc do postaci czasowej otrzymamy: $\ddot{y}(t) = \frac{K}{T} m(t) - \frac{1}{T} \dot{y}(t).$

Przyjmując w charakterze zmiennych stanu: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$

otrzymamy następujące równanie stanu:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{T} x_2(t) + \frac{K}{T} m(t),$$

co można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K/T \end{bmatrix} m(t)$$

oraz: $y(t) = x_1(t)$, przy czym: $e(t) = -y(t)$.

Zakłada się, że wielkość $\dot{e}(t)$ nie zmienia wartości dla $-a < e(t) < a$. Na tej podstawie funkcja działania przekaźnika może być zapisana następująco:

$$m(t) = \begin{cases} D & \text{dla } (e(t) \geq a) \vee ((\dot{e}(t) < 0) \wedge (e(t) > -a)) \\ -D & \text{dla } (e(t) \leq -a) \vee ((\dot{e}(t) > 0) \wedge (e(t) < a)) \end{cases}$$

Równanie (11.45) w tym przypadku przyjmuje następującą postać:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \frac{-\frac{1}{T} x_2(t) + \frac{K}{T} m(t)}{x_2(t)} = -\frac{1}{T} + \frac{K}{T} m(t) \frac{1}{x_2(t)},$$

a zatem: $dx_1 = \frac{x_2(t)}{\frac{K}{T} m(t) - \frac{1}{T} x_2(t)} dx_2$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$dx_1 = \left(-T + K T m(t) \frac{1}{K m(t) - x_2(t)} \right) dx_2$$

Relacja pomiędzy $x_1(t)$ oraz $x_2(t)$ może być wyznaczona przez całkowanie powyższej zależności. Granice całkowania są wyznaczone przez przedział czasu, w którym zachodzi analizowany proces: $[t_0, t)$. Warunki początkowe ($t = t_0$) są wyznaczone przez wektor:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Pomiędzy czasem początkowym t_0 , a czasem t_1 , w którym następuje przełączenie przekaźnika, sygnał $m(t) = m = \text{const}$. W tych warunkach otrzymujemy:

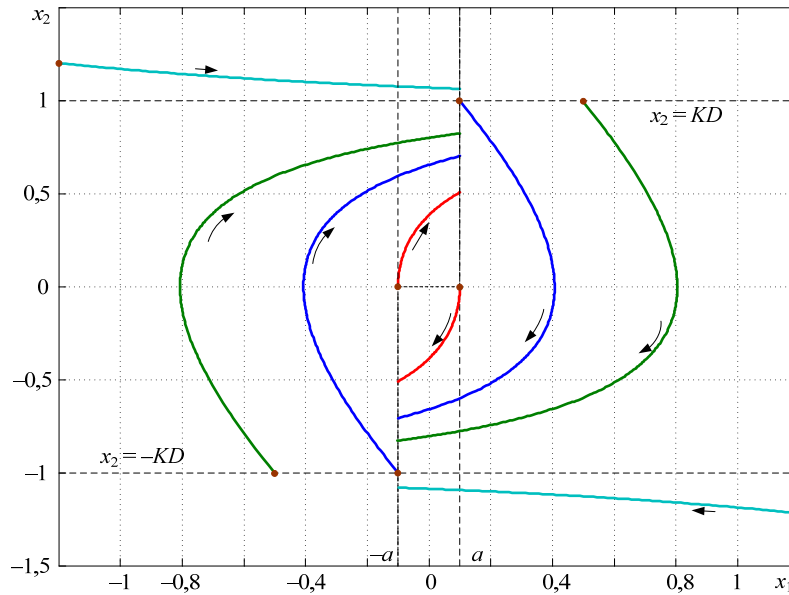
$$x_1(t) - x_1(t_0) = \int_{t_0}^t dx_1 = \int_{t_0}^t \left(-T + KTm \frac{1}{Km - x_2(t)} \right) dx_2 = T(x_2(t_0) - x_2(t)) - KTm(\ln(Km - x_2(t)) - \ln(Km - x_2(t_0)))$$

Współrzędna x_1 zmienia się zgodnie z zależnością:

$$x_1(t) = x_1(t_0) + T(x_2(t_0) - x_2(t)) - KTm(\ln(Km - x_2(t)) - \ln(Km - x_2(t_0)))$$

Zauważmy, że: $sY(s) = M(s) \frac{K}{sT+1} = X_2(s)$, skąd łatwo określić graniczne wartości (asymptoty) zmiennej x_2 : $x_2 = KD$ lub $x_2 = -KD$. Stosownie do tego sygnał m przyjmuje wartości: $m = D$ lub $m = -D$.

Trajektorie rozpatrywanego układu na płaszczyźnie fazowej wraz z zaznaczonymi asymptotami zmian zmiennej x_2 oraz obszarami dwóch wartości zmiennej m są pokazane na rys. 11.50. Jest to zbiór oddzielnych trajektorii, które mają początki wyznaczone przez odpowiednie warunki początkowe (punkty te oznaczone są kropkami).

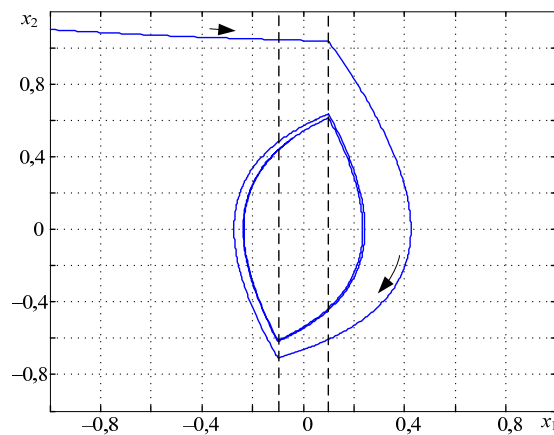


Rys. 11.50. Trajektorie układu z przekaźnikiem z histerezą przy różnych warunkach początkowych

Widać, że przekaźnik wyznacza przedziały liniowej pracy układu, gdy jego stan pozostaje ustalony. Jeśli początek trajektorii znajduje się na asymptocie poziomej, związanej ze zmianą

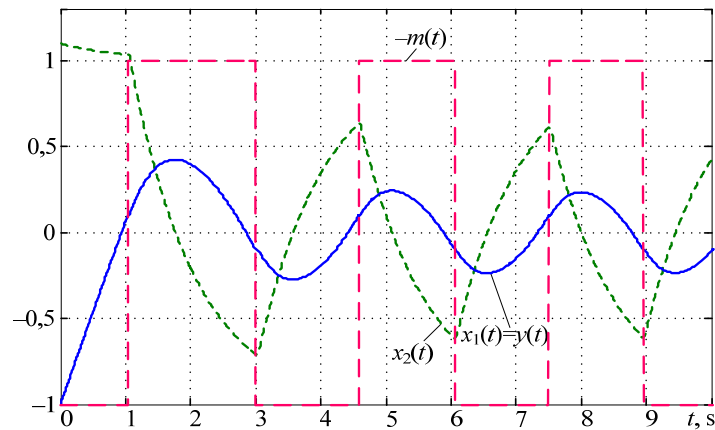
pozycji przekaźnika, to trajektoria odpowiadająca odpowiedzi układu liniowego przebiega do osiągnięcia asymptoty pionowej, wyznaczonej przez granice histerezy przekaźnika.

W układzie może wystąpić cykl graniczny, jeśli połówkowe trajektorie dla obu położań przekaźnika będą takie same. Jego charakterystyki zależą od parametrów przekaźnika oraz transmitancji części liniowej. Przykład takiego cyklu jest pokazany na rys. 11.51. Jest to cykl stabilny. Widać, że punkty graniczne obu symetrycznych części trajektorii (początkowy i końcowy) znajdują się na pionowych asymptotach wyznaczonych przez histerezę przekaźnika. Przy zmianie wielkości zadanej $u(t)$ przebieg wyjściowy $y(t) = x_1(t)$ będzie za nią podążał.



Rys. 11.51. Cykl graniczny układu z przekaźnikiem z histerezą

Przebiegi zmiennych stanu (x_1 , x_2) oraz sygnał na wyjściu przekaźnika (ze zmienionym znakiem, gdyż na wejście przekaźnika jest podany sygnał $-y(t)$) są pokazane na rys. 11.52.



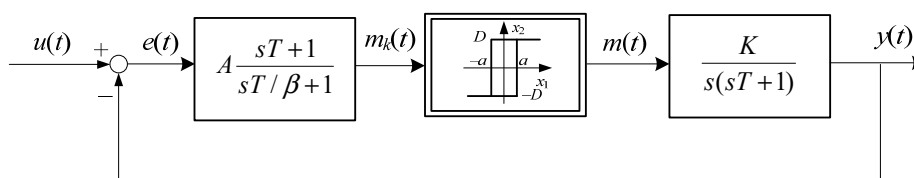
Rys. 11.52. Przebiegi generowane w układzie z przekaźnikiem

Widać, że sygnał wyjściowy $y(t)$ jest dostatecznie wygładzony, chociaż jego amplituda jest dosyć duża. Jest to istotne w przypadku, gdy na wejście podana zostanie określona wartość zadana $u(t)$, która powinna być stabilizowana.

Układ regulacji z przekąźnikiem (dwu- lub trójpółosiowym) jest rozwiązaniem oszczędnym, jednak znaną niedogodnością jest tu występowanie oscylacji w sygnale wyjściowym. Zbyt duża amplituda oscylacji uniemożliwia osiągnięcie pożądanego efektu regulacji. Kolejny przykład pokazuje sposób redukcji tych niepożądanych oscylacji.

Przykład 11.16. W układzie z przykładu 11.15 wprowadzić korekcję szeregową opóźniającą w celu zmniejszenia amplitudy oscylacji wielkości wyjściowej.

Rozpatrywany układ nieliniowy z korektorem jest pokazany na rys. 11.53. Zastosowano takie same parametry układu jak w przykładzie 11.15.

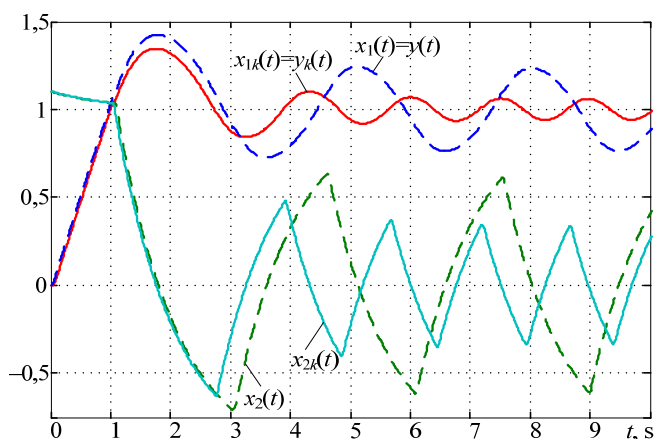


Rys. 11.53. Schemat układu nieliniowego z korektorem szeregowym

Dobrano został korektor opóźniający. Sposób doboru korektora jest przedstawiony w [62]. Parametry korektora są następujące: $A = 10$, $T = 0,0001$ s, $\beta = 0,01$.

W celu porównania efektu korekcji z układem bez korektora analizę wykonano dla wymuszenia $u(t) = 1$. Przebiegi zmiennych stanu w układzie bez korektora i z wybranym szeregowym korektorem przyspieszającym (zmienne z indeksem k) są pokazane na rys. 11.54.

Widać, że korektor powoduje zwiększenie częstotliwości oscylacji i zmniejszenie ich amplitudy.



Rys. 11.54. Przebiegi zmiennych stanu w układzie bez korektora i z korektorem szeregowym przyspieszającym

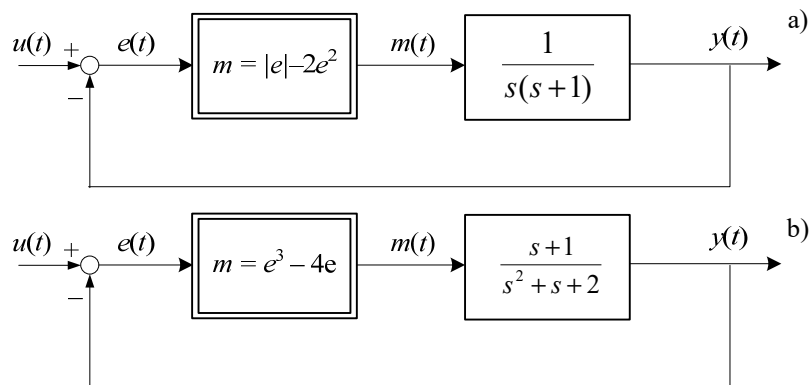
Układy przekaźnikowe mają szerokie zastosowanie w układach automatyki z uwagi na ich prostą i niezawodną konstrukcję (praktyczne zastosowanie mają przekaźnikowe układy elektroniczne). Pożądane charakterystyki tych układów uzyskuje się przez wprowadzenie korekcji i dodatkowe sprzężenia zwrotne [62].

Zadania

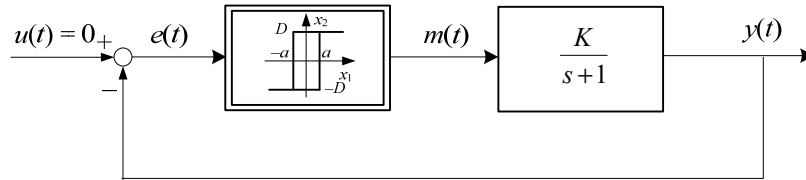
- 11.1. Układ nieliniowy jest określony za pomocą następującego równania:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (0,5 + y^2) \frac{dy}{dt} - 0,6 \left(\frac{dy}{dt} \right)^3 + y = 0$$

- zapisać dynamikę układu za pomocą równań stanu ze zmiennymi x_1, x_2 ;
 - wyznaczyć punkty równowagi układu;
 - zbadać stabilność układu w punktach równowagi;
 - przyjmując funkcję Lapunowa w postaci: $V = x_1^2 + x_2^2$, zbadać jego stabilność globalną.
- 11.2. Przeprowadzić analizę stabilności oraz sporządzić portret fazowy układu z przykładu 11.6, przyjmując, że w równaniu Van der Pola współczynnik $\mu = -1$.
- 11.3. W podanych układach określić punkty równowagi, przeprowadzić linearyzację oraz ocenić stabilność w otoczeniu poszczególnych punktów równowagi. Korzystając z programu SIMULINK, zamodelować układy i wyznaczyć przebiegi trajektorii fazowych w warunkach autonomicznej pracy układu. Uwaga: transmitancje części liniowej układu należy reprezentować w postaci zmiennych stanu, aby można było zadawać warunki początkowe w poszczególnych integratorach.



- 11.4. Korzystając z programu SIMULINK, przeprowadzić analizę podanego autonomicznego układu z przekaźnikiem z histerezą. Określić trajektorie układu dla różnych warunków początkowych (patrz: uwaga w zad. 11.3), przyjmując następujące parametry w podanym schemacie: $D = 1$, $a = 0,2$, $K = 2,5$. Określić wpływ wartości tych parametrów na częstotliwość oscylacji.



- 11.5. Poniższe równanie jest jedną z wersji równania Duffinga.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - y \left(1 - \frac{y^2}{p^2} \right) = 0, \text{ gdzie } p \neq 0,$$

- określić punkty równowagi i ich stabilność;
- wyznaczyć trajektorie fazowe układu w pobliżu punktów równowagi.

- 11.6. System jest opisany następującym układem równań:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1(x_1^2 - 3x_1 + 4) - x_2$$

- wyznaczyć punkty równowagi i określić ich charakter;
- wyznaczyć trajektorie fazowe w pobliżu punktu stabilnego.

- 11.7. System nieliniowy jest opisany następującym układem równań:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + (x_2^2 - 1)(x_1 + 2x_2)$$

Stosując funkcję Lapunowa: $V = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$, pokazać, że system jest stabilny asymptotycznie w początku układu współrzędnych.

- 11.8. Dany jest układ nieliniowy jak w zad. 11.4, przy czym część liniowa jest określona za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{k}{s(0,1s+1)(s+1)},$$

natomiast przekładnik dwupołożeniowy z histerezą ma następujące parametry:

$$D = 1, a = 0,2.$$

Stosując metodę funkcji opisującej, określić:

- warunki stabilności układu dla $k = 1$;
- dla jakich wartości $k > 0$ stabilność układu nie zależy od amplitudy A sygnału błędów?

- 11.9. System nieliniowy jest opisany następującym równaniem:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x(1 - x^2) = 0$$

Pokazać, że jest on stabilny asymptotycznie w początku układu współrzędnych. Określić graficznie obszar przyciągania.

- 11.10. Dany jest układ nieliniowy jak w zad. 11.4, przy czym część liniowa jest określona za pomocą następującej transmitancji:

$$G_1(s) = \frac{30}{s(0,1s+1)(0,6s+1)},$$

natomiast część nieliniowa jest wykonana w postaci przekładnika 3-położeniowego symetrycznego o następujących parametrach: $D = 1, a = 1$.

Stosując metodę funkcji opisującej, określić amplitudę i pulsację drgań w stabilnym punkcie równowagi.

- 11.11. Układ nieliniowy ma część nieliniową jak w Tabeli 11.2, wiersz 7, z następującymi parametrami: $k_1 = k_2 = 1,0$; $a = 0,9$; $b = 0,4$, natomiast część liniowa jest określona przez następującą transmitancję:

$$G_1(s) = \frac{k}{0,1s^3 + 1,1s^2 + s}.$$

- Stosując kryterium kołowe określić stabilność układu dla $k = 1$; wyznaczyć graniczną wartość wzmocnienia k , przy której układ jest stabilny;
- określić funkcję opisującą $J(A)$ części nieliniowej i wyznaczyć warunki stabilności układu (metodą funkcji opisującej) dla $k = 1$; wyznaczyć graniczną wartość wzmocnienia k , przy której układ jest stabilny.

- 11.12. Stosując kryterium kołowe, określić obszary stabilności układów o podanych transmitancjach.

$$\text{a) } G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad \text{b) } G(s) = \frac{s}{s^2 - s + 1}, \quad \text{c) } G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

- 11.13. Stosując kryterium Popova określić obszary absolutnej stabilności układów o podanych transmitancjach.

$$\text{a) } G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)}, \quad \text{b) } G(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}, \quad \text{c) } G(s) = \frac{s^2 - 0,5}{(s+1)(s^2 + 1)}$$

- 11.14. Układ rozpatrywany w przykładzie 11.13 (str. 422) jest strukturalnie niestabilny. Pokazać, że dodanie w szereg z elementem nieliniowym układu z nasyceniem (Tabela 11.2, wiersz 5), może prowadzić do stabilizacji całego układu. Określić warunki takiej stabilizacji przy podanej transmitancji części liniowej układu.

- 11.15. System jest opisany następującym równaniem:

$$\text{a) } \ddot{x} + \dot{x}(3 - 2x) + 6x - 4x^2 = 0;$$

$$\text{b) } \ddot{x} + 0,4\dot{x}(1 - x^2) - x = 0;$$

$$\text{c) } \ddot{x} + 0,2\dot{x} + 3x + x^2 = 0;$$

$$\text{d) } \ddot{x} + 0,5\dot{x} + x(x^2 - 1) = 0;$$

- określić równania stanu wybranego systemu;
- wyznaczyć punkty równowagi i określić ich charakter;
- wyznaczyć trajektorie fazowe w pobliżu punktów równowagi.

DODATKI

D.1. Alfabet grecki

Wielka litera	Mała litera	Nazwa
A	α	alpha
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	dzeta, zeta
H	η	eta
Θ, ϑ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mi, my
N	ν	ni, ny
Ξ	ξ	ksi
O	$\omicron$	omikron
Π	π	pi
P	ρ	rho
Σ	σ, ς	sigma
T	τ	tau
Y	υ	ypsilon
Φ	ϕ, φ	phi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

D.2. Podstawowe funkcje programu MATLAB w bloku CONTROL SYSTEM

Blok programowy (ang. *toolbox*) CONTROL SYSTEM zawiera wiele funkcji użytecznych do tworzenia i analizy układów regulacji. Ich pełna lista jest dostępna w pomocy programu MATLAB [41]. Bardziej zaawansowane podejście do zagadnienia zastosowania programu MATLAB do analizy systemów sterowania można znaleźć w obszernej literaturze [6, 8, 12, 40]. Poniżej przedstawione są jedynie te funkcje, które są użyte w programach prezentowanych w książce, na wskazanej stronie.

<code>nyquist(licz,mian)</code>	rysuje charakterystykę częstotliwościową Nyquista transmitancji układu otwartego określonej przez licznik (<code>licz</code>) i mianownik (<code>mian</code>) (str. 145)
<code>[g,fi,omf,omg]=margin(licz,mian)</code>	określa zapas wzmocnienia i fazy; <code>g</code> jest zapasem wzmocnienia (g), <code>fi</code> przedstawia liczbową wartość zapasu fazy ($\Delta\phi$), <code>omf</code> jest pulsacją (ω_f), natomiast <code>omg</code> – pulsacją (ω_d) (str. 145)
<code>bode(licz,mian)</code>	rysuje charakterystykę częstotliwościową Bodego transmitancji układu określonej przez licznik (<code>licz</code>) i mianownik (<code>mian</code>) (str. 146)
<code>f=iztrans(F)</code>	funkcja z bloku Symbolic Math Toolbox, która dokonuje odwrotnego przekształcenia z funkcji $F(z)$ (str. 168)
<code>num=[1 1]; den=[1 0.2 -0.5]; sysc=tf(num,den); sysd=tf(num,den,T);</code>	tworzy transmitancję układu ciągłego (dyskretnego – poniżej) wyznaczonej przez wielomiany licznika (<code>num</code>) oraz mianownika (<code>den</code>); <code>T</code> – okres próbkowania (str. 191)
<code>sysd=tf(licz,mian,T,'tustin')</code>	transformuje układ ciągły o transmitancji $\{licz/mian\}$ do układu dyskretnego według przekształcenia biliniowego; <code>T</code> – okres próbkowania (str. 189)
<code>sysd=c2d(sysc,T,'prewarp',oma);</code>	transformuje układ ciągły do układu dyskretnego o okresie próbkowania <code>T</code> , ze skalowaniem pulsacji względem wartości krytycznej <code>oma</code> (str. 191)
<code>[licz,mian]=tfdata(sysd,'v');</code>	zwraca w postaci wektorów: licznik (<code>licz</code>) i mianownik (<code>mian</code>) transmitancji <code>sysd</code> (str. 221)

<code>rr=roots(ded)</code>	określa miejsca zerowe wielomianu zadanego w postaci wektora <code>ded</code> (str. 221)
<code>impulse(sysc,tfin);</code>	wykreśla odpowiedź impulsową układu o transmitancji <code>sysc</code> od czasu $t = 0$ do $t = t_{fin}$
<code>step(sysd,25);</code>	wykreśla odpowiedź na skok jednostkowy układu o transmitancji <code>sysc</code> od czasu $t = 0$ do $t = 25$; jeśli jest to układ dyskretny, to oznacza to liczbę próbek odpowiedzi (str. 221)
<code>sysz=feedback(sysd,1);</code>	wyznacza transmitancję układu zamkniętego przy założeniu, że w sprzężeniu zwrotnym znajduje się człon o transmitancji jednostkowej (str. 221)
<code>ripple0(num,den,1,1,T,9,[0 0.05 0 1.6]);</code>	funkcja niestandardowa utworzona na bazie procedury <code>ripple(np,dp,nc,dc,T,n)</code> dostępnej w [70], zakładka 'Functions' (str. 223)
<code>sys = ss(A,B,C,D);</code>	tworzy obiekt <code>sys</code> reprezentujący układ opisany równaniami stanu na bazie macierzy <code>A, B, C, D</code> (str. 235)
<code>lsim(sys,u,t);</code>	wykreśla odpowiedź układu <code>sys</code> na wymuszenie <code>u</code> w czasie wyznaczonym przez <code>t</code> (str. 235)
<code>X=expm(A*t(k));</code>	oblicza wartość funkcji macierzowej e^{At} dla dyskretnej wartości czasu wyznaczonej przez $t(k)$ (str. 259)
<code>nichols(G0,freq);</code> <code>ngrid</code>	wykreśla na karcie Nicholisa charakterystykę amplitudową w funkcji fazy układu otwartego o transmitancji <code>G0</code> w funkcji fazy i rysuje okręgi odnoszące się do współrzędnych układu zamkniętego (str. 298)

Bliższe informacje o sposobie użycia poszczególnych funkcji oraz poleceń programu MATLAB można uzyskać w bloku pomocy, po uruchomieniu programu. Bardzo użyteczną formą uzyskania takiej pomocy jest bezpośrednie korzystanie z polecenia *help* na głównym ekranie programu. Na przykład w odpowiedzi na polecenie:

```
help impulse
```

otrzymamy informację o sposobie użycia funkcji *impulse*.

LITERATURA

1. ÅSTRÖM K.J., MURRAY R.M., *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton University Press, Princeton 2010. Dostępne w: http://www.cds.caltech.edu/~murray/amwiki/index.php/Main_Page
2. ÅSTRÖM K.J., HÄGGLUND T., *Advanced PID Control*. ISA—The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC, 2005.
3. ÅSTRÖM K.J., HÄGGLUND T., *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. ISA—The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC, 1995.
4. ATHERTON D.P., *An Introduction to Nonlinearity in Control Systems*. Ventus Publishing ApS, 2011.
5. БЕСЕКЕРСКИЙ В.А., ПОПОВ Е.П., *Теория систем автоматического регулирования*, Издательство «НАУКА», Москва 1972.
6. BISHOP R.H., *Modern Control Systems Analysis and Design Using MATLAB*. Addison-Wesley Publishing Company, New York 1993.
7. BURNS R.S., *Advanced Control Engineering*. Butterworth-Heinemann, 2001.
8. CHATURVEDI D.K., *Modeling and Simulation of Systems Using MATLAB and SIMULINK*. CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2010.
9. CHEN C-T, *Analog and Digital Control System Design*. Saunders College Publishing, Fort Worth 1993.
10. CZEMPLIK A., *Modele dynamiki obiektów fizycznych*, WNT, Warszawa 2008.
11. DAHLIN E.B., *Designing and Tuning Digital Controllers*. Instruments and Control Systems, 41 (6), 1968, pp. 77 – 83.
12. D'AZZO J.J., HOUPIS C.H., *Linear Control System Analysis and Design with MATLAB*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2003.
13. DEVANEY A.J., *An Introduction to Linear Systems Theory*, Department of Electrical and Computer Engineering Northeastern University Boston, MA 02115, 2005.
14. DIRECTOR S.W., ROHRER R.A., *Podstawy teorii układów elektrycznych*, PWN 1976.
15. DORF R.C., BISHOP R.H., *Modern control systems*. Pearson Education, Inc. London 2008.
16. FADALI M.S., VISIOLI A., *Digital control engineering. Analysis and design*. Elsevier Inc. 2009.
17. FORTUNA Z., MACUKOW B., WĄSOWSKI J., *Metody numeryczne*, Warszawa, WNT, 1993.
18. FRANKLIN D.F., POWELL J.D., WORKMAN M.L., *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley Longman, Inc., Menlo Park, Ca, 1998.
19. ГАХТМАХЕР Ф. Р. *Теория мартингуала*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2004.
20. GOLNARAGHI F., KUO B.C., *Automatic Control Systems*, John Wiley & Sons. Inc., Hoboken. NJ 2010.
21. GREBLICKI W., *Podstawy automatyki*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2006.
22. GREGA W., *Metody i algorytmy sterowania cyfrowego w układach scentralizowanych i rozproszonych*. Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, Kraków 2004.
23. HSU J.C., MEYER A.U., *Modern Control Principles and Applications*. McGRAW-HILL, New York, 1968.
24. JURY E.I., *Sampled-data control systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York 1958.
25. JURY E.I., *Przekształcenie Z i jego zastosowania*, WNT Warszawa 1970.

26. KACZOREK T., DZIELIŃSKI A., DĄBROWSKI W., ŁOPATKA R., *Podstawy teorii sterowania*. WNT Warszawa 2009.
27. KACZOREK T., *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1998.
28. KACZOREK T., *Teoria sterowania i systemów*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 1993.
29. KACZOREK T., *Teoria układów regulacji automatycznej*. WNT Warszawa 1977.
30. KHALIL H.K., *Nonlinear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York 1992.
31. КИМ Д.П., *Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы*. ФИЗМАТЛИТ, Москва 2003.
32. KORBICZ J., OBUCHOWICZ A., UCIŃSKI D., *Sztuczne sieci neuronowe. Podstawy i zastosowania*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1994.
33. KUDREWICZ J., *Nieliniowe obwody elektryczne. Teoria i symulacja komputerowa*. WNT Warszawa 1996.
34. KUDREWICZ J., *Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych*. WNT Warszawa 1970.
35. KUO B.C., *Digital control systems*. HOLT, RINEHART and WINSTON, INC., 1980.
36. KWAKERNAK H., SIVAN R., *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, 1972.
37. de LARMINAT, P. (Edit.), *Analysis and Control of Linear Systems*. ISTE Ltd, London, 2007.
38. LEJA F., *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*. PWN, Warszawa 1978.
39. LEJA F., *Funkcje zespolone*. PWN, Warszawa, 2006.
40. LURIE B.J., ENRIGHT P.J., *Classical Feedback Control with MATLAB*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.
41. *MATLAB user's guide*, The Math Works Inc., Natick, MA, USA, 2000.
42. MAZUREK J., VOGT H., ŻYDANOWICZ W., *Podstawy automatyki*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2006.
43. MITKOWSKI W., *Zarys teorii sterowania*. Wydawnictwo AGH, Kraków 2019.
44. NISE N.S., *Control Systems Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 2011.
45. OGATA K., *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
46. OPPENHEIM A.V., SHAFER R.W., BUCK J.R., *Discrete-time Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1999.
47. OSIOWSKI J., *Zarys rachunku operatorowego*. WNT Warszawa 1972.
48. OSOWSKI S., *Sieci neuronowe do przetwarzania informacji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
49. RUMATOWSKI K., *Podstawy regulacji automatycznej*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008.
50. RUTKOWSKA D., PILIŃSKI M., RUTKOWSKI L., *Sieci neuronowe, algorytmu genetyczne i systemy rozmyte*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.
51. SEBORG D.E., EDGAR T.F., MELLICHAMP D.A., *Process Dynamics and Control*. John Wiley & Sons. Inc., Hoboken. NJ 2004.
52. SIRISENA H.R., *Ripple-Free Deadbeat Control of SISO Discrete Systems*. IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-30, pp. 168–170, Feb. 1985.
53. SÖDERSTRÖM T., STOICA P., *Identyfikacja systemów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.
54. STASZEWSKI J. *Podstawy automatyki. Zbiór zadań z przykładowymi rozwiązaniami*. Politechnika Wrocławska. Dolnośląska Biblioteka Cyfrowa. Dostępne w: <http://www.dbc.wroc.pl/dlibra>

55. TAKAHASHI Y., RABINS M.J., AUSLANDER D.M., *Sterowanie i systemy dynamiczne*. WNT, Warszawa 1976.
56. TATJEWSKI P. *Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych. Struktury i algorytmy*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2002. Dostępne w: <https://www.ibuk.pl/fiszka/154119/sterowanie-zaawansowane-obiektow-przemyslowych-struktury-i-algorytmy-wydanie-drugie-zmienione.html>.
57. TRIPATHI A.N., *Linear Systems Analysis*. New Age International (P) Limited, Publishers, New Delhi 1998.
58. VISIOLI A., *Practical PID control*, Springer-Verlag London Limited 2006.
59. VLADIMIROV V., *Wstęp do teorii dystrybucji*. Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Matematyki Stosowanej, Kraków 2007.
Dostępne w: <http://wms.mat.agh.edu.pl/~vladimir/courses/Maindst7c.pdf>
60. VOGEL E.G., EDGAR T.F., *An Adaptive Pole Placement Controller for Chemical Processes and Variable Dead Time*. Comp. Chem. Engr. 12, 15, 1988.
61. VUKIĆ Z., KULJAĆA L., ĐONLAGIĆ D., TEŠNJAK S., *Nonlinear Control Systems*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2003.
62. WISZNIEWSKI A. (red.), *Podstawy automatyki. Ćwiczenia laboratoryjne*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.
63. YU C.-C., *Autotuning of PID Controllers. A Relay Feedback Approach*, Springer-Verlag London Limited 2006.
64. XUE D., CHEN Y.-Q., ATHERTON D.P., *Linear Feedback Control. Analysis and Design with MATLAB*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 2007.
65. ZHANG Z.-G., ZOU B.-G., BI Z.-F., *Dahlin Algorithm Design and Simulation for Time-delay System*. Control and Decision Conference, 2009. CCDC '09. China, pp. 5819 – 5822.
66. ŻAK S.H., *Systems and Control*. Oxford University Press, New York 2003.

Niektóre strony internetowe:

67. <http://www.mathworks.com/> – The MathWorks, Inc.
68. <http://artikel-software.com/blog/> – Free Download Engineering Ebooks.
69. <http://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=index&itemId=0471134767&itemTypeId=BKS&bcsId=2357> – Web site for *Automatic Control Systems*, by Benjamin C. Kuo and Farid Golnaraghi [20].
70. <https://se.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/2163-digital-control-of-dynamic-systems-3e> – Przykłady w języku Matlab do książki [18].
71. <http://mathworld.wolfram.com/> – The Wolfram Web site – wiele użytecznych informacji po wybraniu szczegółowych haseł, np. *Applied Mathematics*.
72. https://se.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8381-stcsl-standard-version?s_tid=srchtitle – Self-tuning controllers Simulink library.

SKOROWIDZ

A

Algorytm, 17
 cyfrowy, 365
 obliczania, 174
 przetwarzania, 171, 354
 przyrostowy, 357
 różnicowy, 357
 sterowania, 17, 19, 324
Amplituda zespolona, 44
Atraktor, 383

B

Błąd regulacji, *patrz* Uchyb regulacji
 położenia, 262
 prędkościowy, 263
 przyśpieszeniowy, 264

C

Charakterystyka
 amplitudowa, 40
 Bodego, 74
 fazowa, 40
 widmowa, 54
Cykl graniczny, 383
Czas
 do pierwszego maksimum, 266
 narastania, 76, 266
 ustalenia, 266

D

Decybel, 74
Delta Kroneckera, *patrz* Symbol
 Kroneckera

E

Ekstrapolator
 właściwości częstotliwościowe, 182
 zerowego rzędu, 181
Ekwiwalent

całkowania, 187
ekstrapolacji, 185

F

Funkcja
 analityczna, 66
 Diraca, *patrz* Impuls Diraca
 holomorficzna, 66
 meromorficzna, 66
 opisująca, *patrz* Metoda funkcji
 opisującej
 przejścia, *patrz* Transmitancja
 wagi, 36, 37

I

Impuls Diraca, 25
Impulsator, 151

J

Jakobian, 391, 394
Jakość regulacji
 błędy w układach ciągłych, 261
 błędy w układach dyskretnych, 347
 wskaźniki jakości regulacji, 267

K

Karta Nicholisa, 290, 297
Korekcja układów ciągłych
 korekcja addytywna, 331
 korekcja predykcyjna, 334
 korekcja szeregową, 270
 korekcja w sprzężeniu zwrotnym, 329
 korektor Smitha, 335
 regulacja z modelem wewnętrznym,
 338
 zasady korekcji, 269
Korekcja układów dyskretnych
 bezpośrednie projektowanie korektora,
 365
 korekcja szeregową, 350

korekcja ze skończonym czasem
 odpowiedzi, 224, 375
 korektor analogowy, 350
 korektor Dahlina, 366
 korektor *deadbeat*, 375
 korektor dyskretny, 353
 ‘dzwonienie’ w korektorze, 223, 224,
 370
 korektor Vogela-Edgara, 372
 Kryterium stabilności
 Jury’ego, 203
 logarytmiczne (Bodego), 145
 Michajłowa, 128
 Nyquista, 131, 136
 twierdzenie Cauchy’ego, 131
 układu dyskretnego, 208
 Routha-Hurwitza, 123
 na płaszczyźnie ‘w’, 205
 właściwości, 126

L

Linie pierwiastkowe transmitancji, 113

M

Metoda
 funkcji opisującej, 420, 429
 linearyzacji, 395
 płaszczyzny fazowej, 430
 Metoda zmiennych stanu, 227
 macierz przenoszenia stanu, 232
 twierdzenie Cayleya-Hamiltona, 235
 wzór Lagrange’a-Sylwestera, 233
 operatorowy zapis równań, 239
 rozwiązanie równań stanu, 231
 równanie stanu, 229
 kanoniczna postać obserwatorowa, 247
 kanoniczna postać regulatorowa, 243
 stabilność, 252
 sterowalność i obserwowalność
 systemu, 248
 system dyskretny, 253
 związek transmitancji z równaniami
 stanu, 241
MIMO – Multi Input Multi Output, 17
 Model
 deterministyczny, 14

dynamiki układu, 16
 liniowy, 14
 matematyczny, 13
 nieliniowy, 15, 381
 probabilistyczny, 14
 systemu, 13
 Modelowanie
 cyfrowe układów dyskretnych, 185
 tworzenie modelu, 13

O

Odpowiedź
 impulsowa, *patrz* Funkcja wagi
 na wymuszenie harmoniczne, 39
 Odpowiedź systemu
 dyskretnego, 222
 składowa swobodna, 34
 składowa wymuszona, 28
 stan ustalony, 34
 Okręgi stałej amplitudy i fazy, 286

P

Portret fazowy, 383
 Próbkowanie, 151
 nachodzenie widm (aliasing), 195
 sygnału ciągłego, 192
 twierdzenie o próbkowaniu, 194
 Przekształcenie
 biliniowe, 189, 357
 Fouriera, 43
 całkowe, 44
 transformaty, 47
 właściwości, 46
 Laplace’a
 definicja, 52
 odwrotne, 60
 proste, 52
 właściwości, 55
 Z, 153
 odwrotne, 161
 podstawowe właściwości, 156
 transformaty, 159
 Przeregulowanie, 95
 Przestrzeń
 fazowa, 228, 383

zmiennych stanu, 228
Pulsacja drgań własnych, 94
Pulsacja rezonansowa, 97

R

Regulatory PID
dobór nastawień, 316
dobór regulatora, 315
nasycenie, 325
postać dyskretna, 355
układy ciągłe, 310
Residuum funkcji zespolonej, 66
Równanie
Duhamel'a, 38
różnicowe, 177
różniczkowe, 28
różniczkowe jednorodne, 29
różniczkowe niejednorodne, 28
stanu, 229, 430
stanu, układ nieliniowy, 384

S

SISO – Single Input Single Output, 17
Skok
jednostkowy, 27
prędkości, 27
przyśpieszenia, 27
Stabilność, 117
asymptotyczna, 119, 389
bezpośrednia metoda Lapunowa, 404
globalna, 389
granica stabilności, 120
kryteria stabilności, 122
kryterium Kudrewicza, 415
kryterium okręgu, 415
lokalna, 388
metoda Popova, 408
pierwsza metoda Lapunowa, 387, 390
rozszerzona metoda Nyquista, 415
systemu dyskretnego, 199
układów ze zwłoką, 148
warunek *BIBO*, 117, 119, 199
Sterowanie, 16
automatyczne, 12
odporne, 19

rozmyte, 19
ślizgowe, 20
Sygnał, 13
ciągły, 23
dyskretny, 152
Symbol Kroneckera, 169
System, 12
ciągły, 16
dyskretny, 16, 151
typu NOI, 174, 187
typu SOI, 174, 224
inwariantny względem czasu, 15
nieliniowy
płaszczyzna fazowa, 383
punkt równowagi, 382, 384, 390, 391, 398, 401
otwarty, 18
przyczynowy, 154
właściwości dynamiczne, 22
ze sprzężeniem zwrotnym, 18, 101

T

Trajektoria fazowa, 383
Transformata
Laplace'a, *patrz* Przekształcenie Laplace'a
Z, *patrz* Przekształcenie *Z*
Transformata Fouriera, *patrz* Przekształcenie Fouriera
Transmitancja
bieguny, 60, 118
impulsowa, 169, 172
Laplace'a, 53
algebra blokowa, 100
macierzowa, 248
układu dyskretnego, 170
algebra blokowa, 179
o postaci filtru cyfrowego, 174
Typowe elementy automatyki
element bezinercyjny, 73
element całkujący z inercją, 87
element II-go rzędu inercyjny, 89
element inercyjny I-go rzędu, 76
element opóźniający, 97
element oscylacyjny II-go rzędu, 92

elementy wyższych rzędów, 105
idealny element całkujący, 79, 81
rzeczywisty element różniczkujący, 84
układ z wieloma wejściami, 103

U

Uchyb regulacji, 101, 261, 311, 347, 357
Układ, *patrz* System
Układ regulacji
 liniowy, 261
 nieliniowy, 381
 z ogranicznikiem, 324
 z przekąznikiem, 434

W

Warunki Dirichleta, 43
Wektor stanu, 228
Wielomian charakterystyczny, 86, 123,
 127, 205, 235, 247, 252
Współczynnik tłumienia oscylacji, 92, 94,
 283

Z

Zależność
 wejście – wyjście, 23
Zapas fazy i zapas wzmocnienia, 142
Zmienne stanu, 228