

Modele zależne od zdarzeń

Przykłady

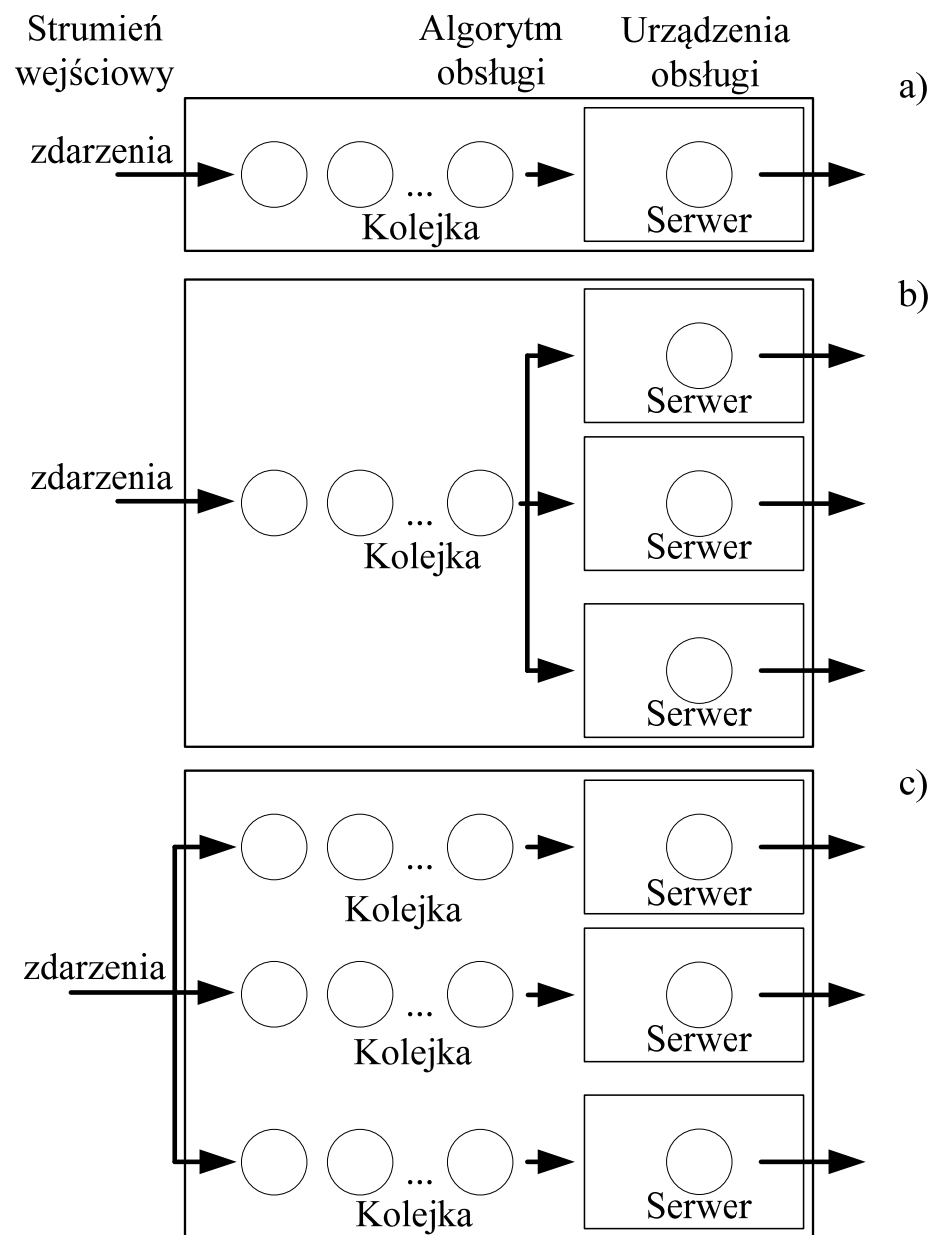
System	Elementy/zdarzenia	Atrybut	Zadanie
Ruch uliczny	Samochody	Prędkość i odległość	Jazda
Bank	Klienci	Stan konta	Wpłata/wypłata
System telefoniczny	Rozmowy	Długość rozmowy	Połączenie
Sklep	Klient	Zakupy	Obsługa kasowa
Kontrola jakości	Wyroby	Jakość	Kontrola
System produkcji	Produkty	Zamówienia	Realizacja zamówień
Obsługa ruchu lotniczego	Samolot	Przepustowość sektora	Dostęp do sektora

Modele zależne od zdarzeń

Przy analizie systemów zależnych od zdarzeń należy, w szczególności oszacować dwa podstawowe parametry:

- ilu zdarzeń (wyzwalających działanie systemu) należy się spodziewać w określonym przedziale czasowym;
- jak długi może być okres czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zdarzeniami.

Przykłady systemów kolejkowych



System kolejkowy

Strumień wejściowy jest tworzony przez uporządkowany zbiór zdarzeń wejściowych. Jest on określony przez rozkład prawdopodobieństwa długości okresów czasu pomiędzy kolejnymi zdarzeniami oraz przez liczbę jednostek, które mogą się pojawić jednocześnie. Przyjmuje się, że przedziały te są ściśle zdeterminowane lub, że są losowe.

System kolejkowy

Procedura obsługi kolejki opisuje sposób wyboru oczekujących zgłoszeń do obsługi. Mogą tu być stosowane różne rozwiązania, jak:

- wspomniana już zasada ‘pierwszy przyszedł – pierwszy do obsługi’ (FIFO);
- zasada: ‘ostatni przyszedł – pierwszy do obsługi’ (ang. *last in first out* – LIFO);
- losowy wybór do obsługi (ang. *selection in random order* - SIRO);
- wybór na zasadzie preferencji, np. zadania o krótkim czasie obsługi są wybierane częściej.

System kolejkowy

Kolejka może być charakteryzowana przez rozmaite wskaźniki, jak: średni czas oczekiwania, średnia i rzeczywista liczba oczekujących, liczba miejsc w kolejce (ograniczona lub nieskończona) i inne.

Urządzenie obsługi jest charakteryzowane przez liczbę i konfigurację kanałów obsługi, przyjęty rozkład prawdopodobieństwa odnoszący się do czasu obsługi jednego zgłoszenia lub liczby obsłużonych jednostek w odcinku czasu (wydajność).

System kolejkowy

Oznaczenia stosowane do opisu systemów kolejkowych.

$L_s(t)$ – liczba oczekujących na obsługę, łącznie z obsługiwany (liczba jednostek w systemie), określona w chwili t .

L_t – średnia długość kolejki do chwili t :

$$L_t = \frac{1}{t} \int_0^t L_s(\tau) d\tau$$

$L_q = \lim_{t \rightarrow \infty} L_t$ - średnia długość kolejki w ogóle.

$a(t)$ – liczba zgłoszeń do momentu t .

λ_t – średnia liczba zgłoszeń do chwili t :

$$\lambda_t = \frac{a(t)}{t}$$

- średnia liczba zgłoszeń w ogóle.

System kolejkowy

$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$ - średnia liczba zgłoszeń w ogóle.

W_s – średni czas realizacji zadania w systemie:

$$W_s = \frac{1}{a(t)} \sum_{i=1}^{a(t)} W_i$$

W_i – czas obsługi i -tego zgłoszenia w systemie

$W = \lim_{t \rightarrow \infty} W_t$ – ogólny czas działania systemu

p_n – prawdopodobieństwo, że w systemie znajduje się n jednostek

Klasyfikacja systemów kolejkowych

W celu uporządkowania opisu systemów kolejkowych wprowadzono oznaczenie, które zaproponował D. Kendall:

$1/2/3/4/5\dots,$

gdzie:

Parametr 1 – symbol rozkładu strumienia zgłoszeń:

M – markowski (rozkład Poissona) czas zgłoszenia;

D – deterministyczny czas zgłoszenia;

E_l – rozkład Erlanga rzędu l .

Parametr 2 – symbol rozkładu czasu obsługi:

M – markowski (rozkład Poissona) czas obsługi;

G – dowolny rozkład obsługi;

D – deterministyczny czas obsługi.

E_l – rozkład Erlanga rzędu l .

Klasyfikacja systemów kolejkowych

Parametr 3 – liczba stanowisk obsługi.

Parametr 4 – liczba miejsc w systemie (stanowiska obsługi + kolejka): jeśli liczba jest nieskończona, parametr jest pomijany.

Parametr 5 – liczba źródeł strumienia zgłoszeń.

Na przykład, zapis: $M/M/1$ oznacza system z pojedynczym kanałem obsługi, w którym zgłoszenia i obsługa mają rozkład Poissona.

Brak symbolu na którejś pozycji oznacza, że liczba zgłoszeń nie jest limitowana, lub, że obowiązuje zasada FIFO obsługi kolejki.

Przykłady systemów kolejkowych

System M/M/1

Charakterystyka systemu:

- zgłoszenia: proces Poissona z intensywnością λ (średnia liczba nowych zgłoszeń w jednostce czasu);
- czas obsługi: rozkład wykładniczy z parametrem μ (średnia liczba obsłużonych jednostek w czasie);
- pojedyncze stanowisko obsługi;
- czas obsługi nie zależy od czasu odstępu między zgłoszeniami;
- nieskończona kolejka, stąd, jest to system M/M/1/ ∞ .

Parametry systemu:

Współczynnik wykorzystania (intensywność ruchu):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Przykłady systemów kolejkowych

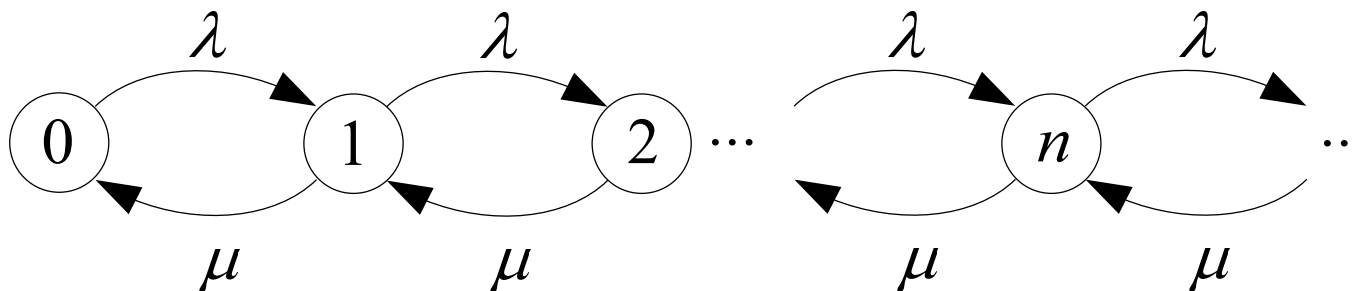
Zauważmy, że warunek stabilności systemu kolejkowego wymaga się, aby: $\rho < 1$, co oznacza, że:

intensywność obsługi (μ) > intensywność zgłoszeń (λ).

Można to także zapisać względem czasu:

średni czas obsługi ($1/\mu$) < średni czas zgłoszeń ($1/\lambda$).

Graf funkcjonowania systemu kolejkowego M/M/1:



Węzły reprezentują stany systemu, przy czym, numer stanu n oznacza liczbę jednostek, znajdujących się w systemie (suma jednostek w kolejce oraz obsługiwanych). Stan zerowy oznacza, że w systemie nie ma żadnych jednostek.

Kolejka M/M/1

Dla kolejnych stanów możemy napisać następujące równości:

$$n = 0: \quad \lambda p_0 = \mu p_1$$

$$n = 1: \quad \lambda p_0 + \mu p_2 = (\mu + \lambda) p_1$$

$$n = 2: \quad \lambda p_1 + \mu p_3 = (\mu + \lambda) p_2$$

$$\vdots$$

$$n > 1: \quad \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} = (\mu + \lambda) p_n$$

skąd otrzymamy:

$$\text{dla } n = 0: \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$$

$$\text{dla } n = 1: \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 p_0 = \rho^2 p_0$$

$$\text{ogólnie:} \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 = \rho^n p_0$$

Kolejka M/M/1

Ostateczna zależność:

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n$$

Równanie to określa prawdopodobieństwo zdarzenia, że w systemie kolejkowym znajduje się n jednostek (klientów).

Ponieważ $0 \leq \rho < 1$, więc p_n jest funkcją eksponentialną, monotonicznie malejącą.

Średnia liczba jednostek w systemie może być estymowana następująco:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n = (1 - \rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Gdy intensywność obsługi μ zmniejsza się do wartości bliskiej intensywności zgłoszeń λ ($\mu \rightarrow \lambda$), to wzrasta liczba jednostek przebywających w systemie: $L_s \rightarrow \infty$

Kolejka M/M/1

Średni czas przebywania jednostki w systemie:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}$$

Średnia długość kolejki (liczba jednostek):

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

Średni czas oczekiwania w kolejce:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$$

Kolejka M/M/1

Przykład

Myjnia samochodowa przeciętnie obsługuje jeden samochód w czasie 12 min. Do myjni przyjeżdżają średnio 4 samochody w ciągu godziny. Określić podstawowe parametry tego systemu: intensywność zgłoszeń, intensywność obsługi, intensywność ruchu (stopień wykorzystania), średnią długość kolejki, średni czas przeznaczony na mycie samochodu. Wyznaczyć rozkłady prawdopodobieństw: liczby samochodów w systemie oraz czasu całej procedury (kolejka + mycie).

Kolejka M/M/1

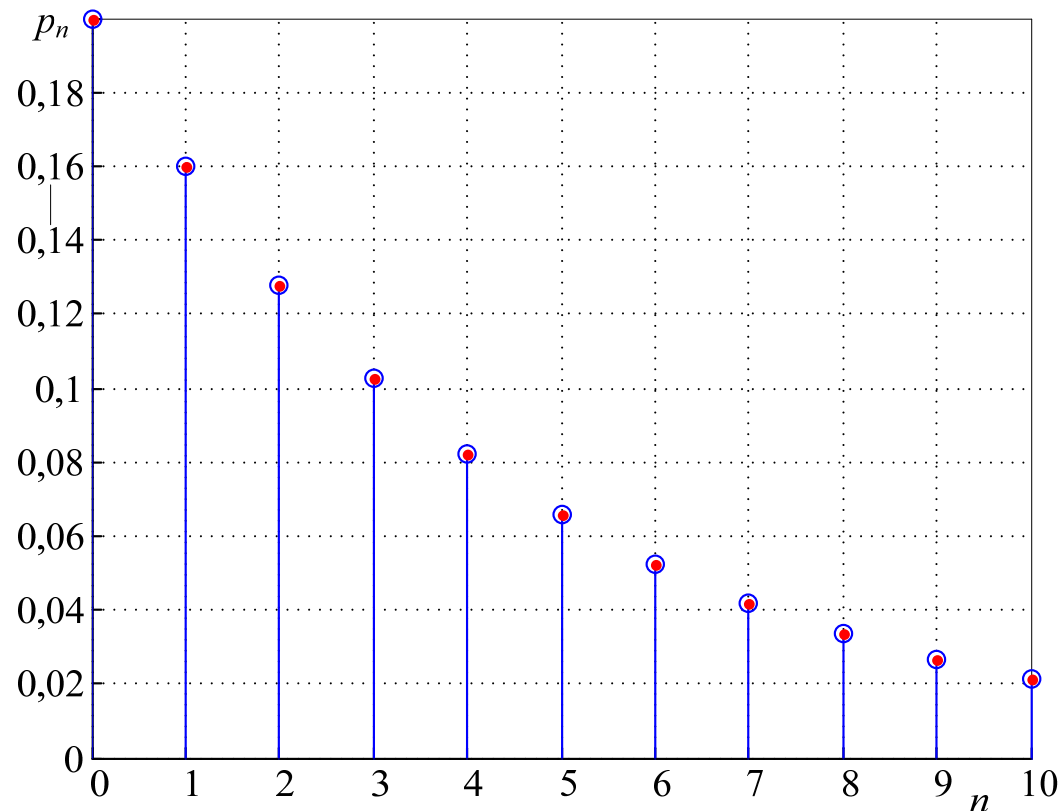
Zapiszmy parametry związane z rozpatrywanym systemem kolejkowym:

- intensywność zgłoszeń $\lambda = 4$ [1/godz];
- intensywność obsługi $\mu = 1/12$ min = 5 [1/godz];
- stopień wykorzystania $\rho = \lambda/\mu = 4/5 = 0,8$ (system jest stabilny, gdyż $\rho < 1$);
- średnia liczba samochodów w myjni (łącznie z kolejką) $N = \rho/(1-\rho) = 4$;
- średnia długość kolejki $L_q = \rho^2/(1-\rho) = 3,2$ (liczba samochodów w kolejce);
- średni czas przeznaczony na mycie (kolejka + mycie)
 $W_s = 1/\mu/(1-\rho) = 0,25/0,2 = 1,25$ godz, z czego w kolejce kierowcy tracą W_q czasu: $W_q = W_s - 1/\mu = 1,25 - 0,2 = 1,05$ godz

Kolejka M/M/1

Prawdopodobieństwo wystąpienia określonej liczby samochodów w systemie jest wyznaczone przez parametr p_n :

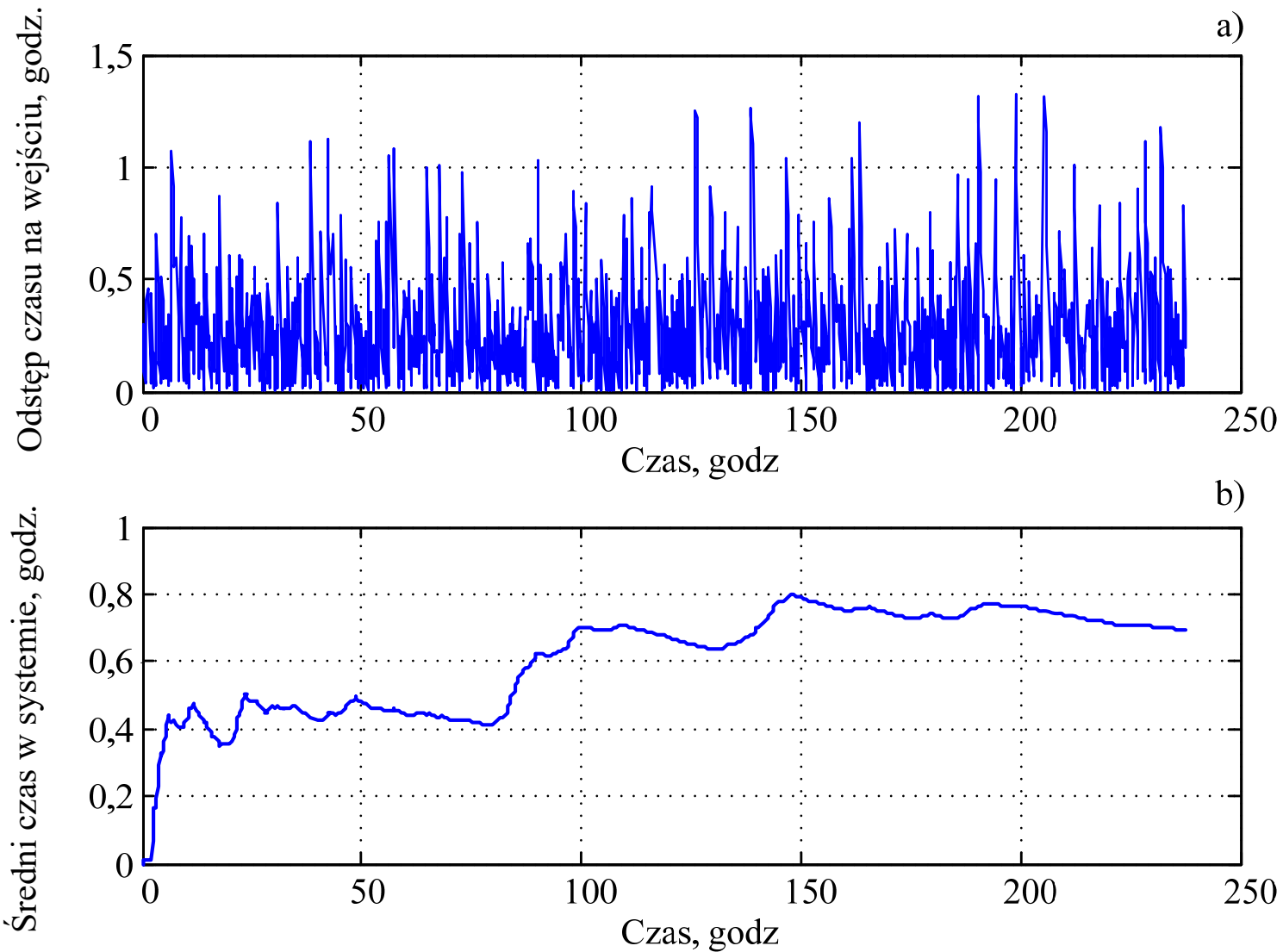
$$p_n = (1 - \rho)\rho^n$$



Rozkład prawdopodobieństwa liczby samochodów w systemie.

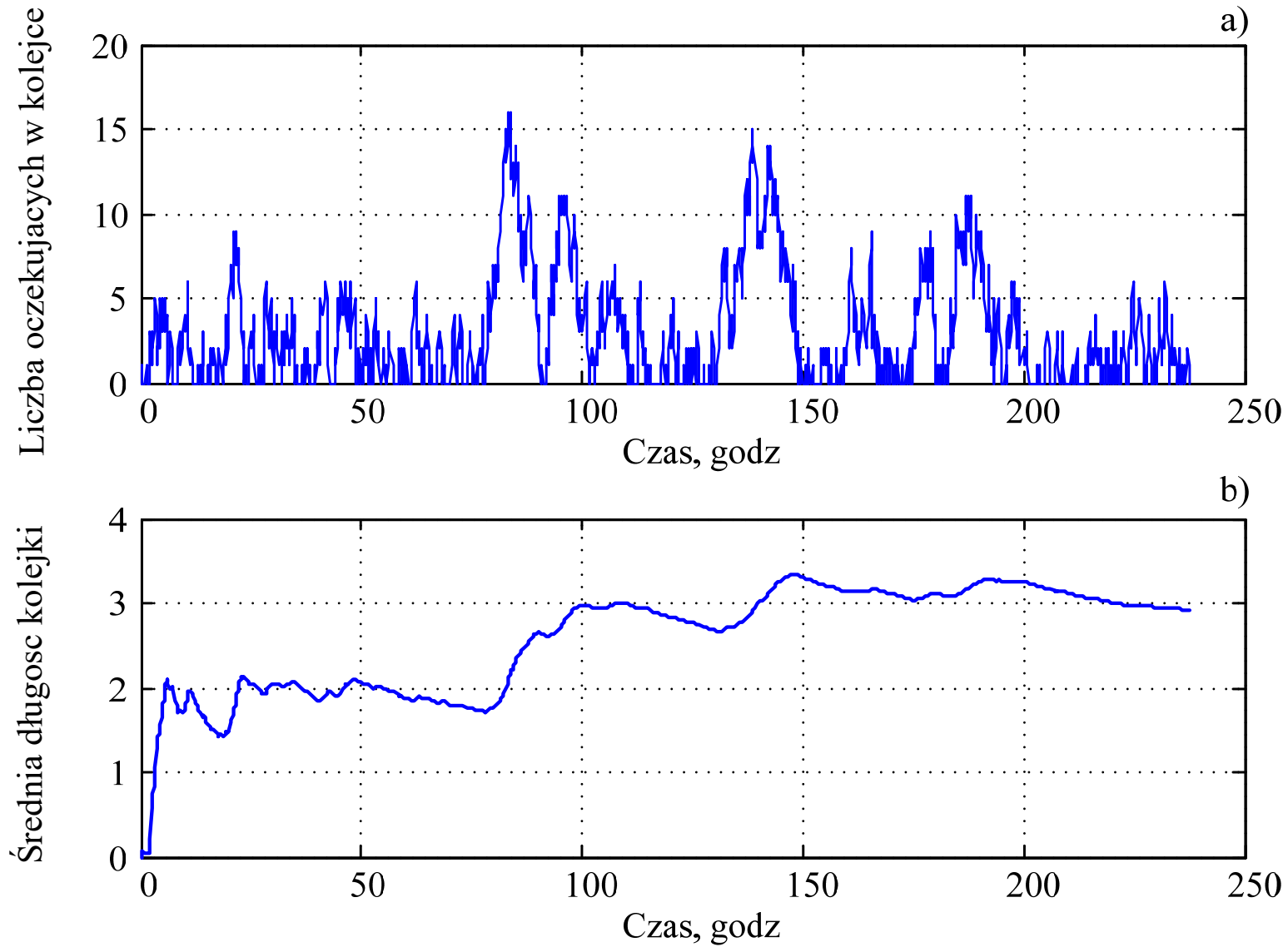
Kolejka M/M/1

Proces na wejściu:



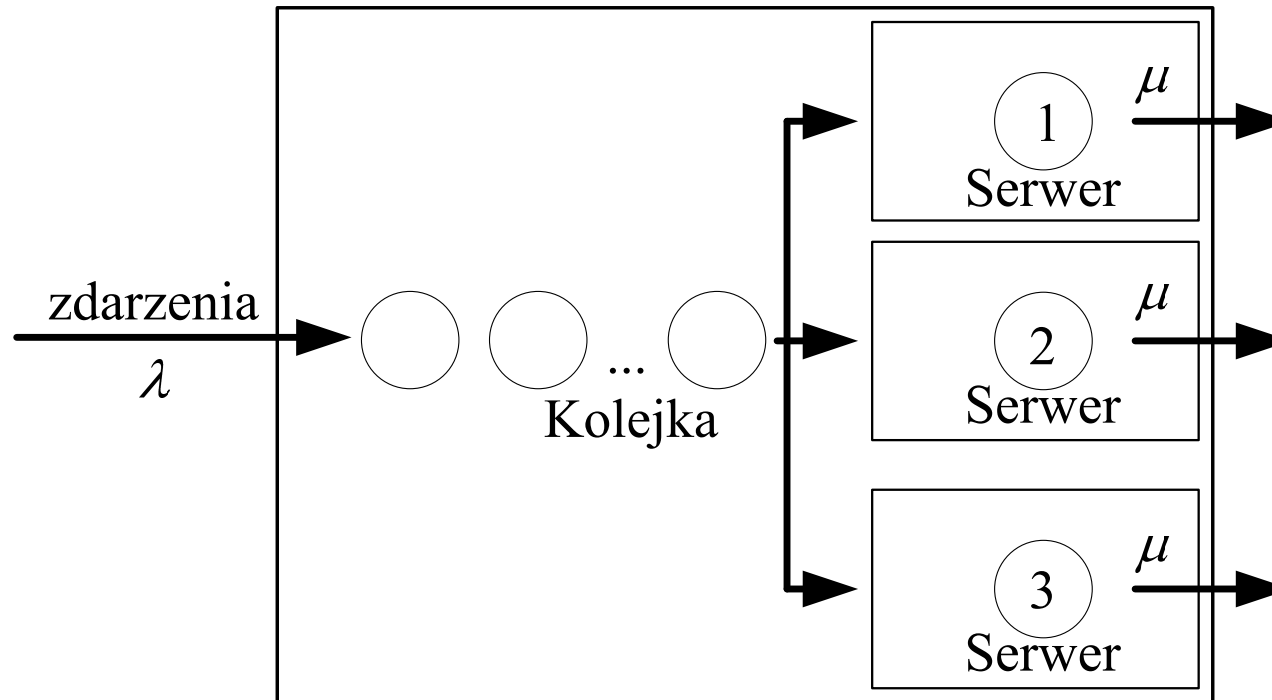
Kolejka M/M/1

Statystyka kolejki:



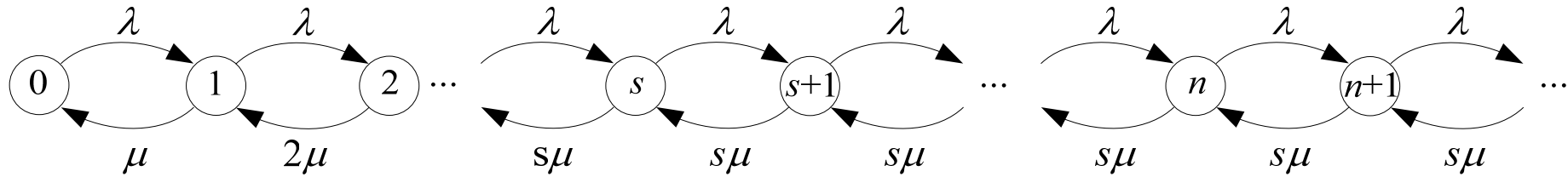
Kolejka M/M/s

System z liczbą stacji obsługi równą s :



Kolejka M/M/s

Graf funkcjonowania systemu kolejkowego M/M/s:



$$n = 0: \quad \lambda p_0 = \mu p_1$$

$$n = 1: \quad \lambda p_1 + \mu p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2 \Leftrightarrow (\lambda + \mu) p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2$$

$$n = 2: \quad \lambda p_2 + 2\mu p_2 = \lambda p_1 + 3\mu p_3 \Leftrightarrow (\lambda + 2\mu) p_2 = \lambda p_1 + 3\mu p_3$$

$$n = 3: \quad \lambda p_3 + 3\mu p_3 = \lambda p_2 + 4\mu p_4 \Leftrightarrow (\lambda + 3\mu) p_3 = \lambda p_2 + 4\mu p_4$$

...

$$n = s: \quad \lambda p_s + s\mu p_s = \lambda p_{s-1} + s\mu p_{s+1} \Leftrightarrow (\lambda + s\mu) p_s = \lambda p_{s-1} + s\mu p_{s+1}$$

$$n = s+1: \quad \lambda p_{s+1} + s\mu p_{s+1} = \lambda p_s + s\mu p_{s+2} \Leftrightarrow (\lambda + s\mu) p_{s+1} = \lambda p_s + s\mu p_{s+2}$$

...,

$$n > s+1: \quad \lambda p_n + s\mu p_n = \lambda p_{n-1} + s\mu p_{n+1} \Leftrightarrow (\lambda + s\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + s\mu p_{n+1}$$

Kolejka M/M/s

Prawdopodobieństwo wystąpienia pustego systemu można określić podobnie, jak w systemie M/M/1:

$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1$, skąd:

$$p_0 = \left(1 + \rho + (\rho^2 / 2) + \dots + \rho^n s! s^{n-s} + \dots \right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(s - \rho)(s - 1)!} \right)^{-1}$$

oraz: $\frac{\rho}{s} = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$

Ostatecznie:

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0 \quad n < s$$
$$p_n = \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} p_0 = \frac{\lambda^n}{s! s^{n-1} \mu^n} p_0 \quad n \geq s$$

Kolejka M/M/s

Podstawowe wskaźniki systemu.

- średnia liczba jednostek w systemie: $L_s = \rho + \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}$

- średnie wykorzystanie obsługujących stacji:

$$L_B = \lambda W_B = \rho$$

- średni czas wykorzystania stacji obsługi:

$$W_B = 1 / \mu$$

- średnia liczba jednostek w kolejce: $L_q = L_s - L_B = L_s - \rho$

- średnie wykorzystanie systemu:

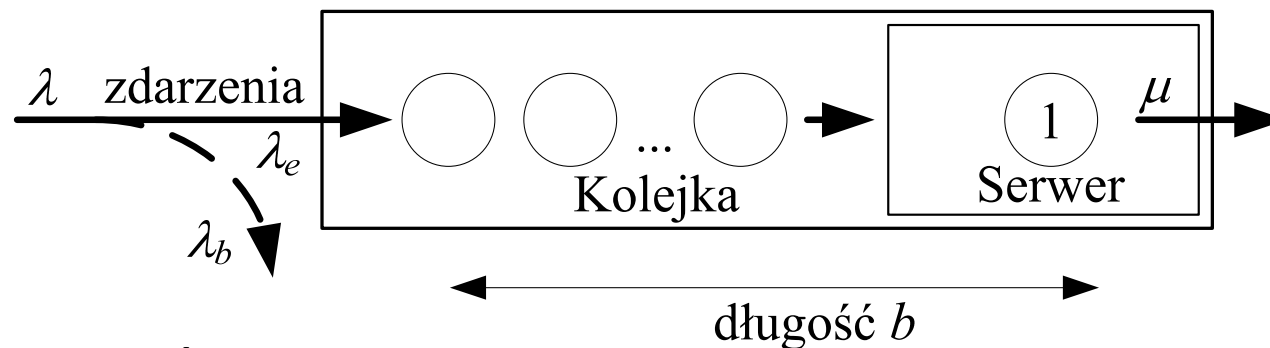
$$U = P(n > 0), \quad U = 1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{s-1}$$

- średni czas jednostki w systemie: $W_s = L_s / \lambda$

Kolejka M/M/1/b

System z ograniczoną długością kolejki

Konfiguracja systemu:

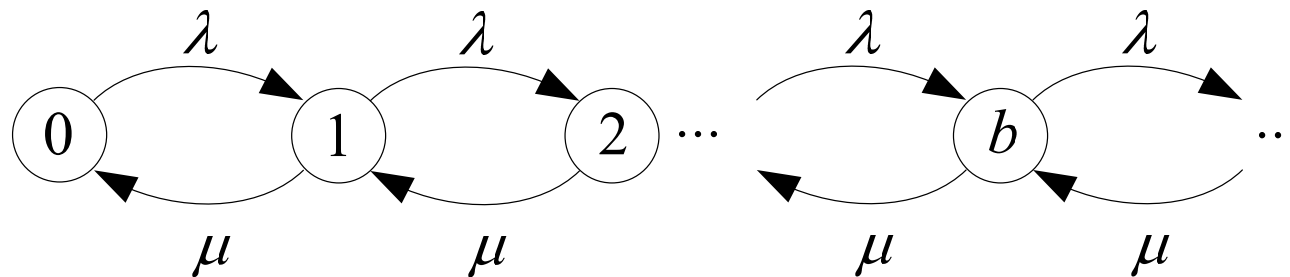


Podstawowe założenia:

- zdarzenia na wejściu pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ ;
- na wyjściu znajduje się jedna stacja o intensywności obsługi μ ;
- pojemność systemu jest ograniczona do b jednostek;
- odbiór z kolejki odbywa się według zasady FIFO.

Kolejka M/M/1/b

Graf funkcjonowania systemu kolejkowego M/M/1/b:



Analiza tego grafu prowadzi do następujących zależności:

$$n = 0: \quad \lambda p_0 = \mu p_1$$

$$n = 1: \quad \lambda p_1 + \mu p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2 \Leftrightarrow (\lambda + \mu) p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2$$

$$n = 2: \quad \lambda p_2 + \mu p_2 = \lambda p_1 + \mu p_3 \Leftrightarrow (\lambda + \mu) p_2 = \lambda p_1 + \mu p_3$$

$$n = 3: \quad \lambda p_3 + \mu p_3 = \lambda p_2 + \mu p_4 \Leftrightarrow (\lambda + \mu) p_3 = \lambda p_2 + \mu p_4$$

...

$$n = b: \quad \mu p_b = \lambda p_{b-1} \Leftrightarrow \mu p_b = \lambda p_{b-1}$$

Kolejka M/M/1/b

Ogólnie: $\mu p_b = \lambda p_{b-1}$,

skąd:
$$p_b = \frac{\lambda}{\mu} p_{b-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^b p_0 = \rho^b p_0$$

Łatwo sprawdzić następującą relację normalizującą:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^b\right)^{-1}, \text{ skąd: } p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^b \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^b \rho^n}$$

oraz:

$$p_n = \rho^n p_0 = \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{b+1}}$$

Kolejka M/M/1/b

Na podstawie tych związków można otrzymać charakterystyki:

- efektywna intensywność na wejściu:

$$\lambda_e = \lambda(p_0 + p_1 + \dots + p_{b-1}) = \lambda(1 - p_b)$$

- średnia liczba jednostek w systemie: $L_s = \sum_{n=0}^b np_n$

- średnie wykorzystanie stacji obsługi: $L_B = 1 - p_0 = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{b+1}}$

- średni czas wykorzystania obsługi: $W_B = 1 / \mu$

- średnia liczba jednostek w kolejce: $L_q = L_s - L_B$

- średnie wykorzystanie systemu: $U = P(n > 0) \quad U = 1 - p_0$

- średni czas jednostki w systemie: $W_s = L_s / \lambda_e$

- średni czas jednostki w kolejce: $W_q = L_q / \lambda_e$

Kolejka M/M/1/b

Przykład:

Rozpatrzmy przypadek z myjnią samochodową, jak w kolejce M/M/1, w której kolejka jest ograniczona przez liczbę miejsc parkingowych do $b = 5$ samochodów. Czas obsługi wydłuża się o 1 min, co jest związane z koniecznością dojazdu z parkingu do myjni. Pozostałe parametry pozostają niezmiennione.

Określić podstawowe charakterystyki systemu o następujących danych:

- intensywność zgłoszeń $\lambda = 4$ [1/godz];
- intensywność obsługi $\mu = 60/(12+1) = 60/13 = 4,6154$;
- długość kolejki $b = 5$;
- stopień wykorzystania $\rho = \lambda/\mu = 4 \cdot 13/60 = 0,8667$ (system jest stabilny).

Kolejka M/M/1/b

Porównanie danych z kolejki M/M/1:

Określić podstawowe charakterystyki systemu o następujących danych:

- intensywność zgłoszeń $\lambda = 4$ [1/godz] – tak samo, jak w M/M/1;
- intensywność obsługi $\mu = 60/(12+1) = 60/13 = 4,6154$ - mniej;
- długość kolejki $b = 5$ – w M/M/1 bez ograniczeń;
- stopień wykorzystania $\rho = \lambda/\mu = 4 \cdot 13/60 = 0,8667$ (system jest stabilny, bardziej wykorzystany niż w M/M/1).

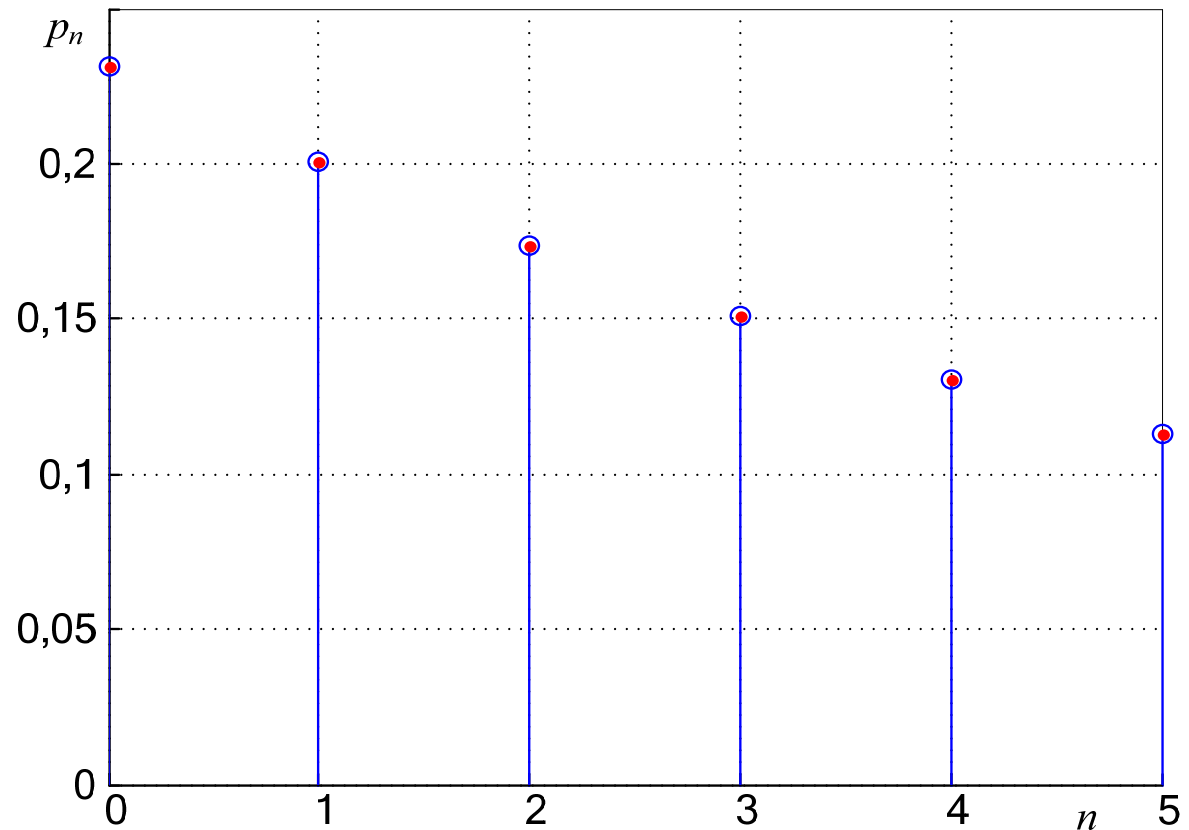
Obliczamy:

- rozkład prawdopodobieństwa liczby samochodów w systemie:

$$p_n = \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{b+1}} = \rho^n \frac{1 - \rho}{1 - \rho^6}$$

Kolejka M/M/1/b

rozkład
prawdopodobieństwa
liczby samochodów
w systemie:



- efektywna intensywność na wejściu:

$$\lambda_e = \lambda(1 - p_5) = \lambda \rho^5 \frac{1 - \rho}{1 - \rho^6} = 3,5475$$

(przy $\lambda = 4$)

Kolejka M/M/1/b

- średnia liczba samochodów w myjni (łącznie z kolejką):

$$L_s = \sum_{n=0}^5 np_n = 2,0878$$

- średnie wykorzystanie stacji obsługi: $L_B = 1 - p_0 = 0,7686$
- średnia liczba jednostek w kolejce: $L_q = L_s - L_B = 1,3192$
- średni czas obsługi w systemie: $W_s = L_s / \lambda_e = 0,5885$
- średni czas przebywania w kolejce: $W_q = L_q / \lambda_e = 0,3719$

W systemie M/M/1/b liczba stanów jest ograniczona przez długość kolejki, co radykalnie zmienia jego właściwości.

Kolejka M/M/1/b

W porównaniu z kolejką bez ograniczeń liczby oczekujących zdarzeń (M/M/1/ ∞), kolejka M/M/1/b może mieć radykalnie inne właściwości. Ilustruje to przykład z myjnią, jeśli zmieniona zostaje tylko długość kolejki (pozostałe dane bez zmian):

symulacja_M_M_1

Średni czas w systemie : 0.6925 godz.

Średnia długość kolejki : 2.9114

Wykorzystanie obsługi : 0.84523

symulacja_M_M_1_b

Średni czas w systemie : 0.47212 godz.

Średnia długość kolejki : 1.7739

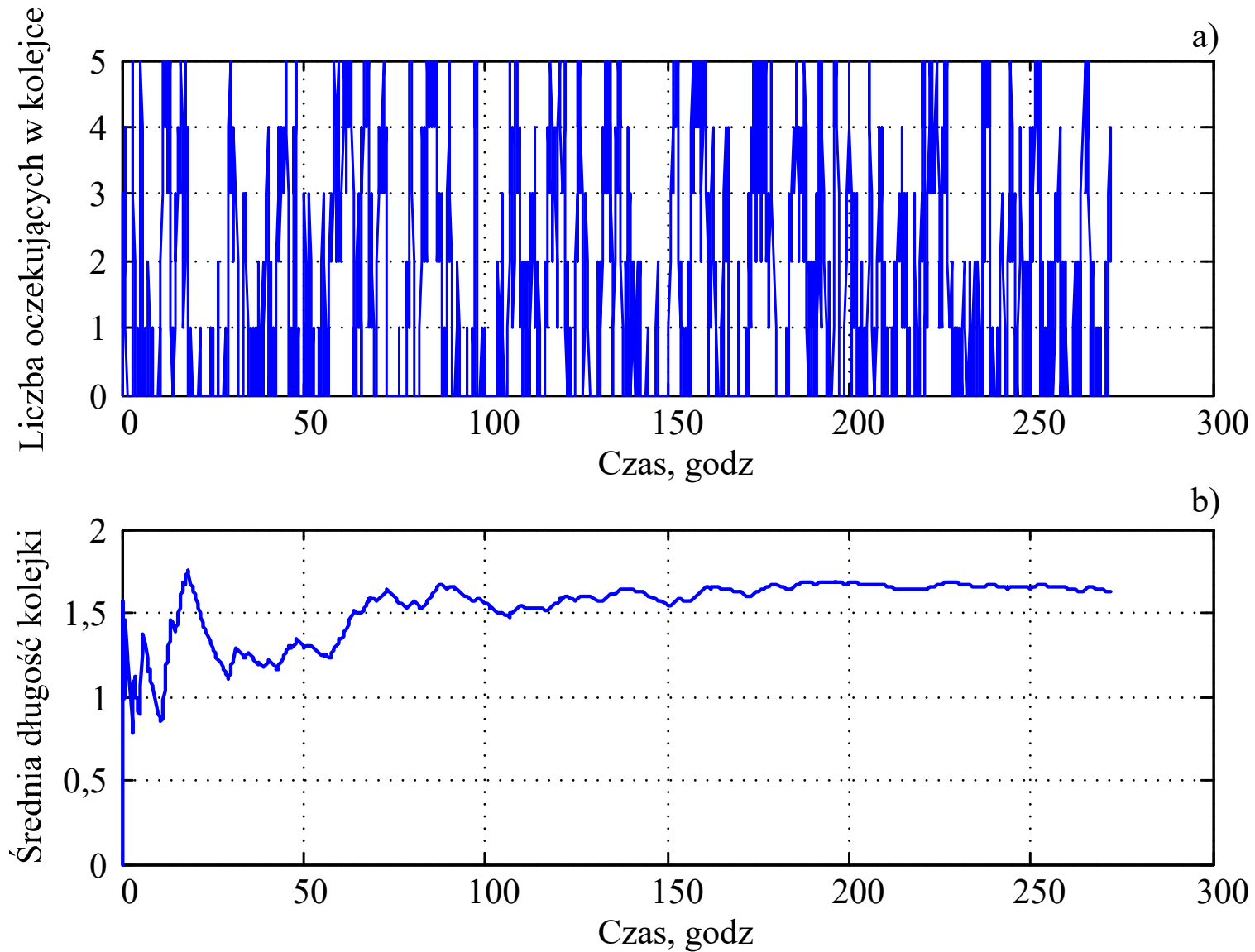
Wykorzystanie obsługi : 0.80357

Liczba odrzuceń: 109

Intensywność odrzucania : 0.39898

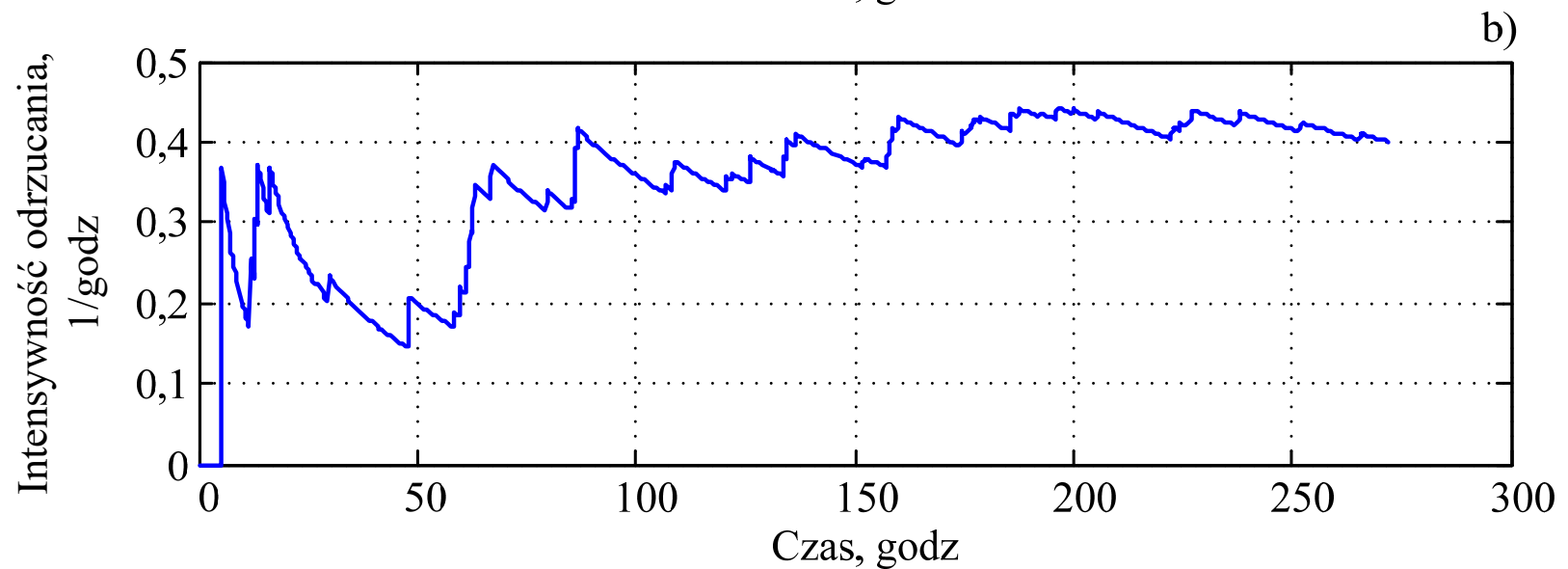
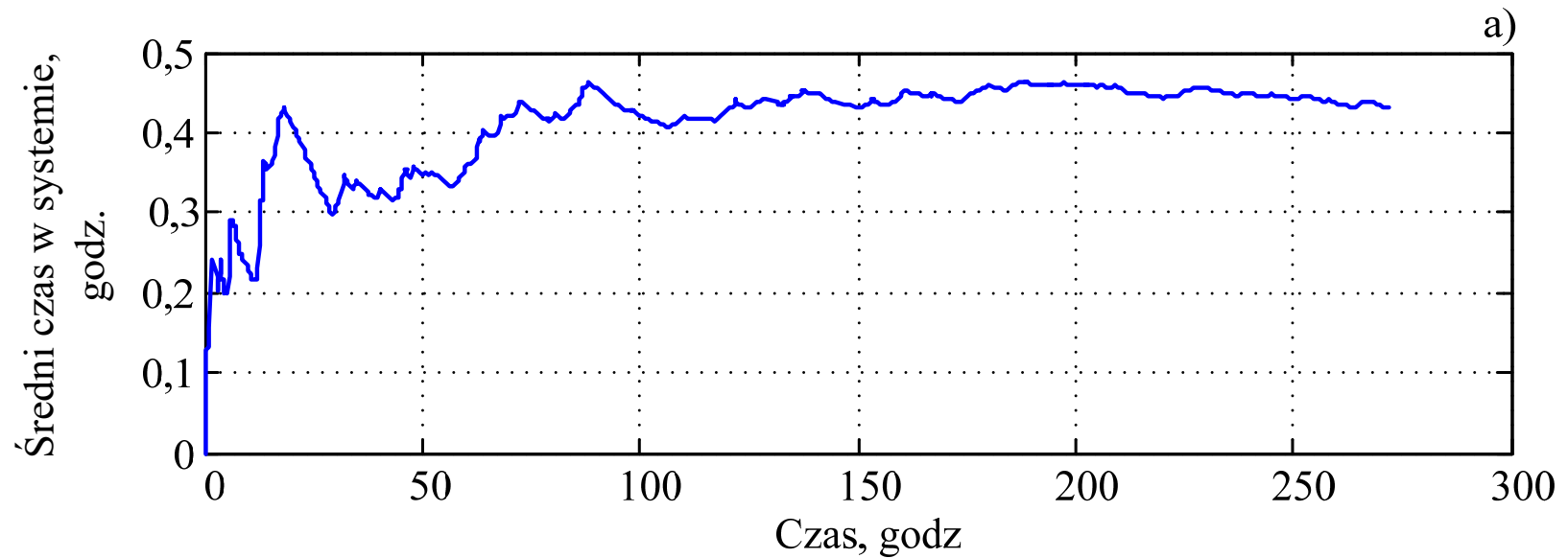
Kolejka M/M/1/b

Proces na wejściu:



Kolejka M/M/1/b

Statystyka kolejki:



Podstawy Modelowania Systemów

1. Opis systemów dynamicznych

- model bezpośredni: równania różniczkowe odpowiedniego rzędu;
- model zmiennych stanu;
- interpretacja fizyczna zmiennych stanu;
- równoważność modeli: elektryczne - mechaniczne

2. Modele klasycznej mechaniki

- równania Newtona;
- formalizm Lagrange'a,
- modele Hamiltona.

Podstawy Modelowania Systemów

3. Modele procesów fizycznych

- model tarcia suchego;
- model tarcia lepkiego;
- ruch falowy;
- model linii długiej.

4. Modele nieliniowych systemów dynamicznych

- typowe modele układów nieliniowych;
- systemy chaotyczne;
- nieliniowe układy dyskretne;
- identyfikacja systemów chaotycznych;

Podstawy Modelowania Systemów

5. Chaos w układach elektroenergetycznych

- ferorezonans;
- łuk elektryczny: modele dynamiczne;
- łuk elektryczny spawalniczy.

6. Modele procesów stochastycznych

- podstawowe funkcje;
- metoda Monte Carlo;
- zastosowania.

7. Modele zależne od zdarzeń: systemy kolejkowe

- zasada organizacji, podstawowe wiadomości;
- rodzaje systemów kolejkowych, oznaczenia;
- system M/M/1: graf funkcjonowania, charakterystyki.

