

# Modele Procesów Stochastycznych

## **Rozkład prawdopodobieństwa** (rozkład zmiennej losowej)

$P(A)$  jest miarą, pozwalającą przypisać prawdopodobieństwo zmiennej losowej lub zbiorom tej zmiennej według reguł określonych w  $A$ . Każdej zmiennej losowej można przypisać prawdopodobieństwo jej wystąpienia.

W przypadku dyskretnej zmiennej losowej  $x$ , definicja prawdopodobieństwa jest intuicyjna:

$$P_{x_k} = P(X = x_k) = f(x_k) = \frac{f_k}{N} = \frac{f_k}{\sum_{j=1}^n f_j}$$

gdzie  $f_k$  jest liczbą przypadków wystąpienia wartości  $x_k$ , natomiast  $N$  jest sumą wszystkich możliwych prób.

# Modelowanie Procesów Stochastycznych

Zapis ten można rozszerzyć na odpowiedni zbiór wartości dyskretnych, na przykład:

$$P(6 \leq X < 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$$

**Funkcja gęstości prawdopodobieństwa**  $f(x)$  jest funkcją rzeczywistą określającą prawdopodobieństwo wystąpienia określonego zdarzenia ze zbioru  $B$ :

$$P(B) = \int_B f(x) dx$$

Na przykład:  $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$

W szczególności, jeśli  $B$  pokrywa całą przestrzeń zdarzeń, to: .

$$\int_B f(x) dx = 1$$

# Modelowanie Procesów Stochastycznych

Zapis ten można rozszerzyć na odpowiedni zbiór wartości dyskretnych, na przykład:

$$P(6 \leq X < 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$$

**Funkcja gęstości prawdopodobieństwa**  $f(x)$  jest funkcją rzeczywistą określającą prawdopodobieństwo wystąpienia określonego zdarzenia ze zbioru  $B$ :

$$P(B) = \int_B f(x) dx$$

Na przykład:  $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$

W szczególności, jeśli  $B$  pokrywa całą przestrzeń zdarzeń, to:

$$\int_B f(x) dx = 1$$

# Modelowanie Procesów Stochastycznych

**Dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa  $F(x)$**  jest prawdopodobieństwem przyjęcia przez zmienną losową  $X$  wartości mniejszej od  $x$ :

$$F(x) = P(X < x)$$

gdzie  $P(X < x)$  oznacza prawdopodobieństwo, że zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartość mniejszą od  $x$ . Inaczej mówiąc, dystrybuanta określa szansę przyjęcia przez zmienną losową  $X$  wartości mniejszej od  $x$ .

# Modelowanie Procesów Stochastycznych

W przypadku dyskretnej zmiennej losowej,  $P(X < x)$  oblicza się przez sumowanie wszystkich prawdopodobieństw  $P(X = x_k)$  dla  $x_k < x$ :

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)$$

gdzie:

$$P(X = x_k) = p_k$$

jest funkcją prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$  oznaczającą prawdopodobieństwo, że zmienna losowa  $X$  przyjmie wartość  $x_k$  (dla zmiennych losowych dyskretnych).

# Modelowanie Procesów Stochastycznych

Jeśli  $k$  w (3.4) wyczerpuje wszystkie wartości zmiennej dyskretnej, to:

$$\sum_{x_k} P(X = x_k) = \sum_{x_k} p_k = 1$$

Dla zmiennej losowej ciągłej zachodzi relacja:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (3.7)$$

i odwrotnie:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) \quad (3.8)$$

Na podstawie (3.7) można napisać:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

(całka oznaczona)

# Modelowanie Procesów Stochastycznych

**Przykład 3.1.** Określić rozkład zmiennej losowej, która przyjmuje wartości równe sumie oczek w dwukrotnym rzucie kostką. Wykreślić dystrybuantę tej zmiennej. Obliczyć prawdopodobieństwo  $P(7 < X \leq 12)$ .  
Prawdopodobieństwo uzyskania dowolnej wartości 1..6 w pojedynczym rzucie kostką wynosi  $1/6$ . Zbiór wartości uzyskanych w dwóch rzutach kostką jest następujący:  $A = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$ . Łatwo określić prawdopodobieństwo uzyskania każdego z elementów tego zbioru:

$P(X = 2) = (1/6)(1/6) = 1/36 \rightarrow$  w obu rzutach muszą wystąpić jedynki:  $(1, 1)$ ;

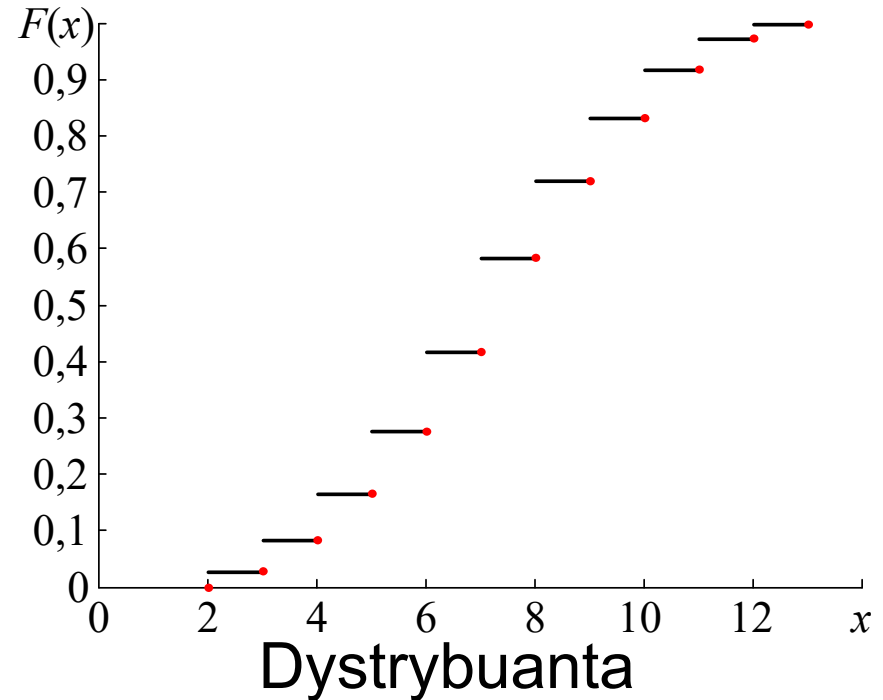
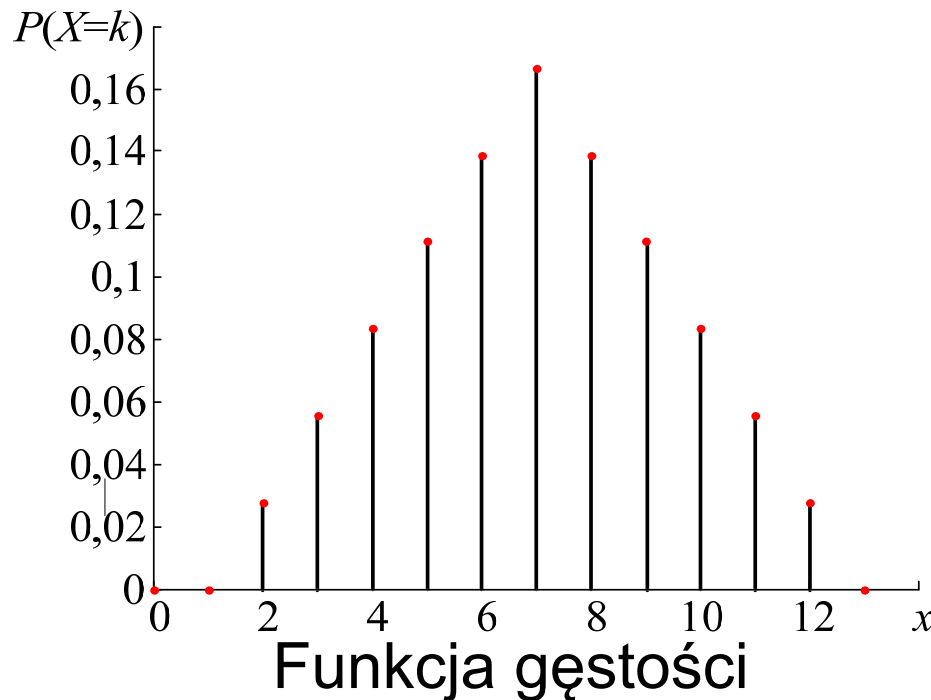
$P(X = 3) = (1/6)(1/6) + (1/6)(1/6) = 2/36 \rightarrow (1, 2) \vee (2, 1)$ ;

$P(X = 4) = 3(1/6)(1/6) = 3/36 \rightarrow (1, 3) \vee (3, 1) \vee (2, 2)$ ;

$P(X = 5) = 4(1/6)(1/6) = 4/36 \rightarrow (1, 4) \vee (4, 1) \vee (2, 3) \vee (3, 2)$ ;

...

# Modelowanie Procesów Stochastycznych



Prawdopodobieństwo  $P(7 < X \leq 12)$  jest sumą prawdopodobieństw dla poszczególnych zmiennych ze zdefiniowanego przedziału:

$$\begin{aligned} P(7 < X \leq 12) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) \\ &= 5/36 + 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36 = 15/36. \end{aligned}$$



# Modelowanie Procesów Stochastycznych

**Wartość oczekiwana**  $E(X)$  zmiennej losowej  $X$  jest wartością średnią z  $n$  zmiennych  $x_i$ , z których każda występuje z prawdopodobieństwem  $p_i$ :

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

W przypadku ciągłym wartość oczekiwana jest obliczana następująco:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

**Wariancja**  $D^2(X)$ :

$$D^2(X) = \sigma^2 = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

Wielkość:  $D(X) = \sigma$  jest odchyleniem.

# Modelowanie Procesów Stochastycznych

**Moment rzędu  $l$**  ( $l = 1, 2, \dots$ ) zmiennej losowej  $X$  względem liczby  $c$  jest określany następująco:

$$\mu_l' = \begin{cases} \sum_k (x_k - c)^l p_k & \text{dla zmiennej losowej dyskretnej} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^l f(x) dx & \text{dla zmiennej losowej ciągłej} \end{cases}$$

Jeśli  $c = 0$ , to mówimy o momencie zwykłym. Moment zwykły pierwszego rzędu jest wartością średnią.

W przypadku, gdy  $c = 1$ , to mamy do czynienia z momentem centralnym rzędu  $l$ . Moment centralny rzędu drugiego jest wariancją, a pierwiastek z niego jest odchyleniem standardowym.

# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

**Rozkład równomierny** (jednostajny). Funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  w rozkładzie równomiernym na odcinku  $[0, 1]$  jest równa:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

W przypadku dyskretnym, prawdopodobieństwo wylosowania każdej z wartości, przyjmowanych przez zmienną losową, jest jednakowe. W takim przypadku, zmienna  $x$  przyjmuje wartości całkowite w zdefiniowanym przedziale. Przykładem jest rozkład wyników rzutu jedną kostką: każdy z sześciu wyników ma to samo prawdopodobieństwo, równe  $1/6$ : zero (0) lub jeden (1).

# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

W ogólnym przypadku, gdy zmienna losowa jest zdefiniowana w przedziale  $[a, b]$ , funkcja gęstości jest określana następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

natomiast dystrybuanta ma następującą postać:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)/(b-a) & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases}$$

# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

**Rozkład dwumianowy** (Bernoulliego, *ang. binomial distribution*) opisuje liczbę sukcesów  $k$  w  $N$  niezależnych próbach, z których każda ma to samo prawdopodobieństwo sukcesu  $p$ .

Jeśli zmienna losowa  $X$  zostanie zdefiniowana, jako suma  $N$  zmiennych losowych:

$$X = \sum_{i=1}^N X_i$$

z których każda może przyjąć wartość 1 z prawdopodobieństwem  $p$  albo wartość 0 z prawdopodobieństwem  $1 - p$ , to zmienna  $X$  może przyjąć każdą wartość całkowitą z przedziału  $\langle 0, N \rangle$ , przy czym prawdopodobieństwo, że  $k$  spośród  $N$  zmiennych  $X_i$  przyjmie wartość 1, wynosi:

$$f_X(x) = P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad k = 0, 1, \dots, N; x = k,$$

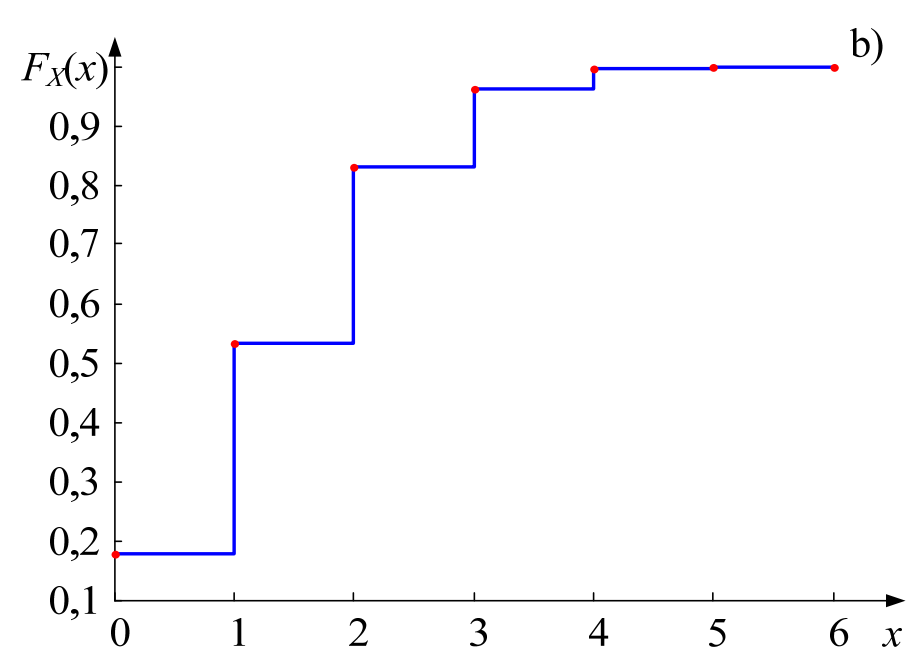
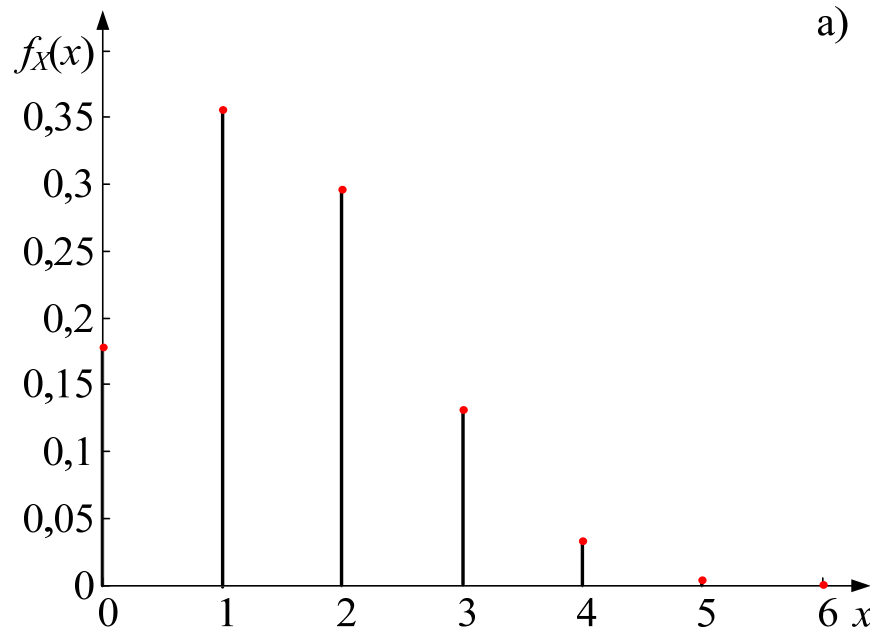
gdzie:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

Podobnie można wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie dwumianowym:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$



Gęstość prawdopodobieństwa (a) oraz dystrybuanta (b) rozkładu dwumianowego;  $N=6$ ,  $p=0,25$ . Wartość oczekiwana:  $E_X = N \cdot p$

# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

**Rozkład Poissona** jest pewnym rozszerzeniem rozkładu dwumianowego. Zmienną losową definiuje się przy założeniu, że wartość  $\lambda = N p > 0$  jest stała, natomiast  $N$  dąży do nieskończoności. Prawdopodobieństwo przyjęcia przez tę zmienną wartości  $k$  jest określone za pomocą wzoru Poissona:

$$f_X(x) = P(X = k) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(X_N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Widać, że wartość  $x = k$ , którą może przyjmować zmienna losowa jest dowolną całkowitą liczbą nieujemną. Zauważmy także, że podobnie, jak w rozkładzie dwumianowym, parametr  $\lambda$  jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej (średnią liczbą zdarzeń w jednostce czasu).

# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

Dystrybuanta jest określana następująco:

$$F_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Rozkład Poissona ma szerokie zastosowanie do modelowania różnych zdarzeń, które mają charakter policzalny: liczba nieprawidłowych produktów, liczba rozmów telefonicznych prowadzonych w określonej jednostce czasu, liczba wypromieniowanych cząstek w jednostce czasu i innych. W takim przypadku zmienna  $x$  ma znaczenie liczby zdarzeń zachodzących w założonej jednostce czasu.



# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

**Rozkład wykładniczy** charakteryzuje się następującą funkcją gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \lambda > 0$$

oraz dystrybuantą:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Rozkład ten dobrze się nadaje do modelowania zgłoszeń telefonicznych lub oceny niezawodności. Jeśli zmienna  $x$  reprezentuje czas, to rozkład ten opisuje prawdopodobieństwo przejścia układu z jednego z dwóch możliwych stanów w drugi w określonym czasie. Jak widać, rozkład zależy tylko od jednego parametru  $\lambda$ , który opisuje odstęp czasu pomiędzy kolejnymi zdarzeniami. Tym samym wielkość  $1/\lambda$  oznacza liczbę niezależnych zdarzeń, które mają zajść w jednostce czasu. Jest to także wartość oczekiwana:  $E_X(x) = 1/\lambda$ .

# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

**Przykład** Czas oczekiwania na połączenie telefoniczne jest zmienną losową  $X$  o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 10 s. Określić, jakie jest prawdopodobieństwo, że telefonująca osoba będzie czekała na połączenie nie krócej niż 5 s i nie dłużej niż 10 s.

Określamy parametr  $\lambda$  rozkładu. Wartość oczekiwana wynosi:  $E_X(x) = 1/\lambda = 10$ , skąd:  $\lambda = 0,1$ . Otrzymamy:

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 10) &= F(10) - F(5) = (1 - e^{-\lambda x_2}) - (1 - e^{-\lambda x_1}) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2} = e^{-0,1 \cdot 5} - e^{-0,1 \cdot 10} \\ &= e^{-0,5} - e^{-1} = 0,239. \end{aligned}$$

# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

**Rozkład Erlanga** jest szczególnie przydatny do reprezentacji zdarzeń (na przykład, liczby rozmów telefonicznych), realizowanych w określonej jednostce czasu. Wywodzi się on z rozkładu wykładniczego. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest określana następująco ( $x > 0$ ):

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$$

oraz dystrybuantą:  $F_X(x) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!}$

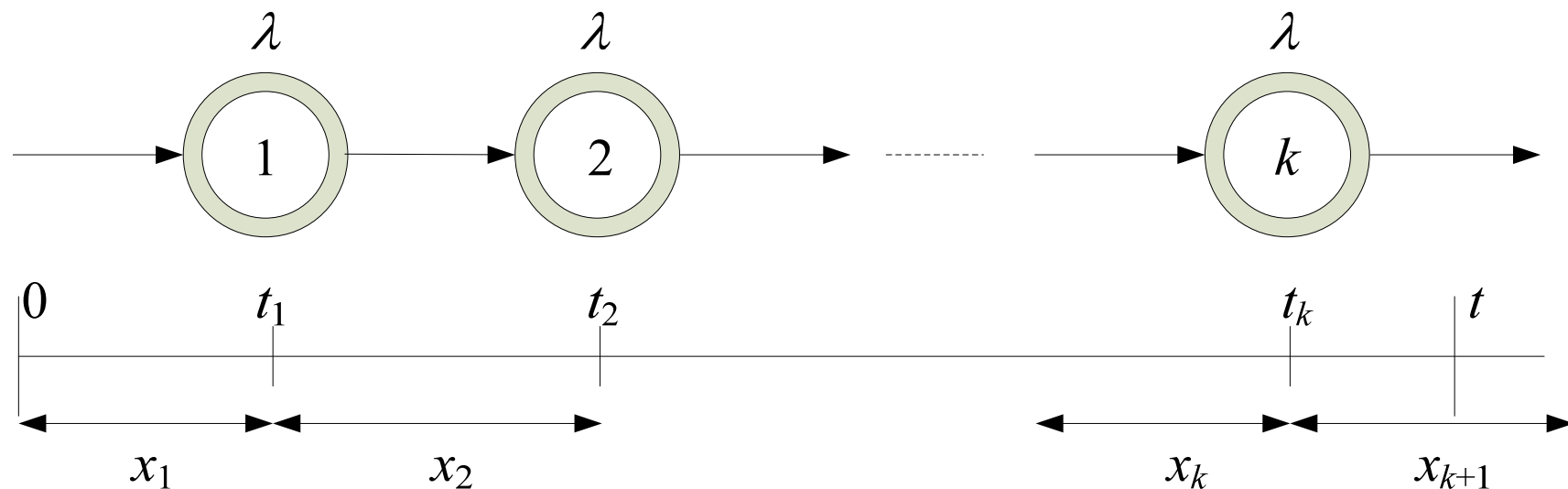
gdzie:  $k=m$  – liczba naturalna (parametr kształtu),  $\lambda > 0$  – parametr skali.

Wartość oczekiwana:

$$E_X(x) = \frac{k}{\lambda}$$

# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

Rozkład Erlanga jest stosowany do sytuacji, gdy analizowany proces jest podzielony na szereg  $k$  kolejno realizowanych faz i każda faza ma cechy rozkładu wykładniczego (rys)



Dla dużej wartości  $k$  rozkład Erlanga zbliża się do właściwości rozkładu normalnego. Jest on często stosowany do reprezentowania czasu potrzebnego do wykonania wieloetapowego zadania.

# Niektóre Rozkłady Prawdopodobieństwa

Typowy rozkład Erlanga  $k$ -tego rzędu może być zilustrowany następującym przykładem (rys):

- niech  $n$  oznacza zdarzenie, które zachodzi w czasie  $t_n$ ;
- niech zmienne losowe  $x_1, x_2, \dots, x_k$  oznaczają odcinki czasu pomiędzy kolejnymi zdarzeniami; zakładamy, że są to zmienne losowe o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $\lambda$ ;
- niech  $N$  oznacza liczbę zdarzeń w czasie  $t$ ; jest to zmienna losowa o rozkładzie Poissona;

W takim przypadku, do czasu  $t_k$  zajdzie  $k$  zdarzeń:

$$t_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

Zmienna losowa  $t_k$  ma rozkład Erlanga  $k$ -tego rzędu z parametrem  $\lambda$ . Prawdopodobieństwo, że w czasie  $t$  zajdzie  $k$  zdarzeń jest określone przez dystrybuantę.

# Generowanie Liczb Losowych

**Generowanie liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym.** Stosuje się w tym celu algorytmy liniowe lub nieliniowe. Przykłady algorytmów liniowych:

$$x_n = (1176x_{n-1} + 1476x_{n-2} + 1776x_{n-3}) \bmod (2^{32} - 5)$$

$$x_n = 2^{19} (x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + 1) \bmod (2^{35} - 1629)$$

przy zadanych warunkach początkowych.

Przykłady generatorów nieliniowych:

$$x_n = (a / x_n + b) \bmod m$$

$$x_n = (a(n + n_0 + b))^{-1} \bmod m$$

przy zadanych wartościach parametrów  $a$ ,  $b$ ,  $n$ ,  $n_0$ ,  $m$ .

# Generowanie Liczb Losowych

W przypadku generacji liczb pseudolosowych o zadanym rozkładzie, niekiedy można bezpośrednio korzystać z definicji rozkładu. Na przykład, analiza **rozkładu dwumianowego** o danej funkcji prawdopodobieństwa prowadzi do następującego algorytmu:

- Wygenerować zbiór  $N$  zmiennych pseudolosowych  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ .
- Określić liczbę  $x$  elementów tego zbioru, dla których spełniony jest warunek:  $u_i \leq p$ .

W rezultacie,  $x$  jest poszukiwaną zmienną pseudolosową o rozkładzie dwumianowym.

# Generowanie Liczb Losowych

Najpopularniejszym sposobem generowania liczb pseudolosowych o zadanym rozkładzie jest metoda odwracania dystrybuanty. Jeśli znana jest dystrybuanta danego rozkładu, to możemy napisać:

$$F(x_i) = \alpha \rightarrow x_i = F^{-1}(\alpha)$$

gdzie:  $\alpha = u_i$  jest liczbą pseudolosową o rozkładzie równomiernym,  $F^{-1}(\alpha)$  - funkcja odwrotna do  $F(x)$ .

W rezultacie,  $x$  jest poszukiwaną zmienną pseudolosową o rozkładzie dwumianowym.



# Generowanie Liczb Losowych

W przypadku **rozkładu wykładniczego**, funkcja odwrotna do dystrybuanty

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

dana jest równaniem:  $x_i = F^{-1}(u_i) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u_i)$

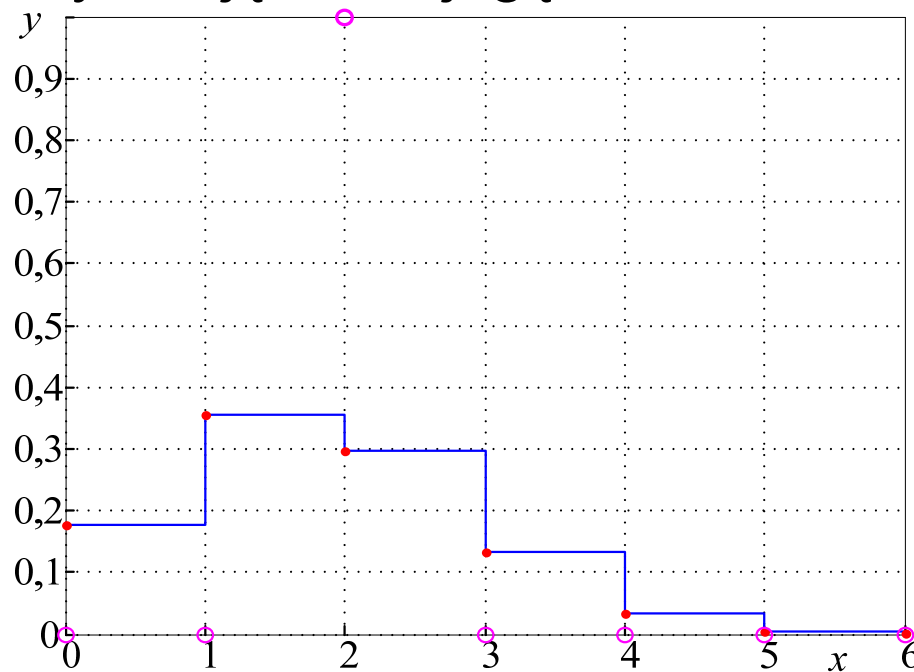
Znajomość funkcji odwrotnej może posłużyć do generacji liczb pseudolosowych według dyskretnego **rozkładu Poissona**. W tym przypadku, pojedyncza liczba losowa  $x_i$  jest równa liczbie wartości rozkładu wykładniczego o średniej równej 1, które dodane razem przekraczają wartość oczekiwaną rozkładu Poissona  $\lambda$ . Stąd powstaje następujący algorytm:

```
sum = 0; j = -1; % warunki początkowe
while (sum ≤ λ),
y = uj; z = -ln(1-y);
sum = sum + z;
j = j + 1;
endwhile;
```

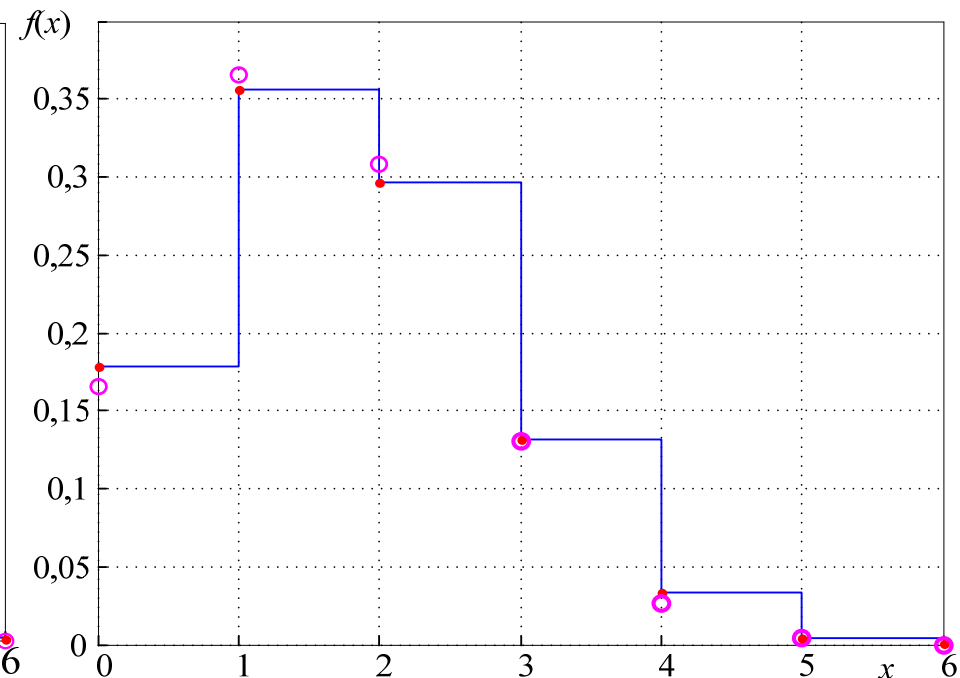
Wartość  $j$  jest generowaną zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem  $\lambda$ .

# Generowanie Liczb Losowych

**Przykład** Na slajdzie 14 jest pokazana funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu dwumianowego dla  $N = 6$  oraz  $p = 0,25$ . Opracować program do generacji liczb losowych według tego rozkładu dla tych samych parametrów. Wygenerować dużą liczbę zmiennych losowych i na ich podstawie przeprowadzić estymację funkcji gęstości.



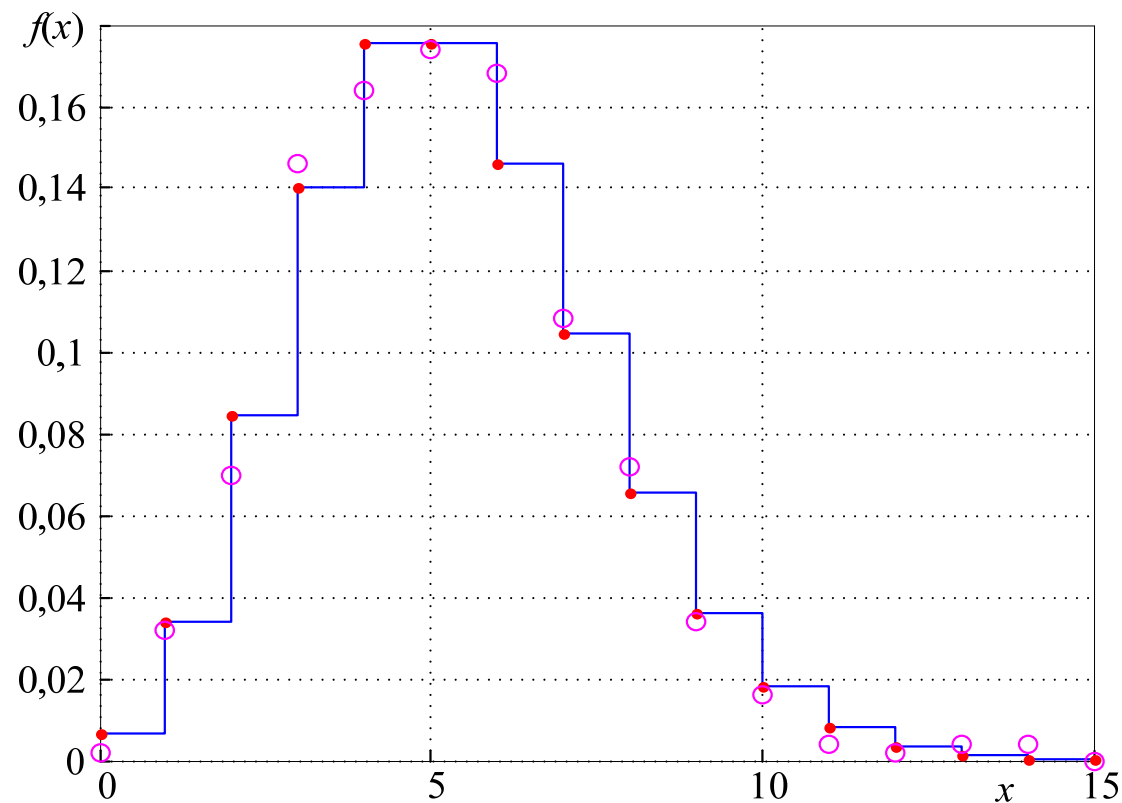
Pojedyncza zmienna



Estymata gęstości

# Generowanie Liczb Losowych

W przypadku **rozkładu Poissona** z parametrem  $\lambda = 5$ , porównanie estymaty z funkcją gęstości jest pokazane na poniższym rysunku.

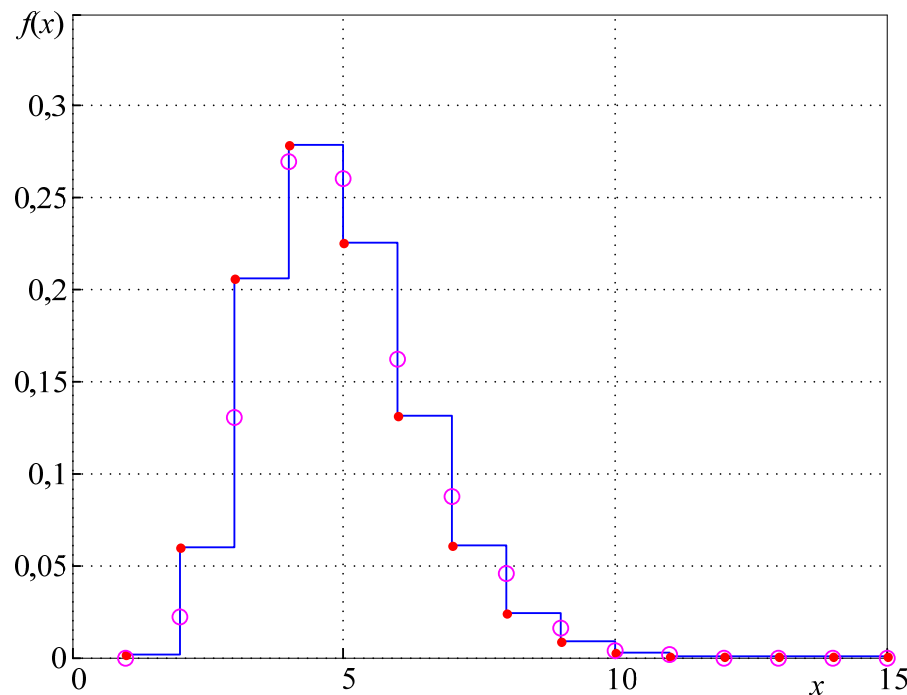


Funkcja gęstości prawdopodobieństwa i jej estymata (kółka)

# Generowanie Liczb Losowych

W przypadku **rozkładu Erlanga**, pseudolosowe liczby mogą być generowane na podstawie pseudolosowych liczb uzyskanych dla rozkładu równomiernego według następującej relacji:

$$x_n = F^{-1}(u_n) \approx -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\prod_{i=1}^k u_i\right)$$



Funkcja gęstości prawdopodobieństwa i jej estymata (kółka)

# Metoda Monte Carlo

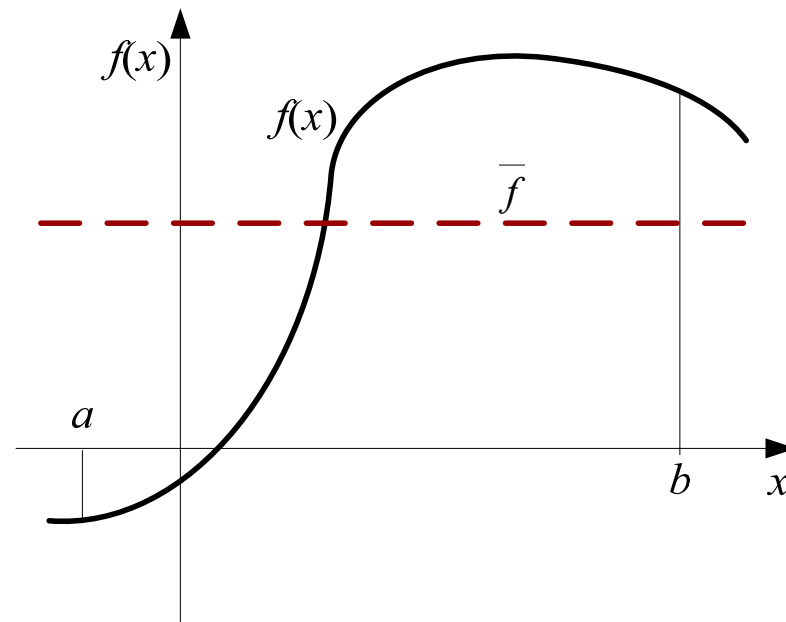
Metoda Monte Carlo (MC) została opracowana, jako narzędzie numeryczne do estymacji różnych parametrów procesów stochastycznych (np. wartości oczekiwanej) na podstawie ich realizacji w warunkach rzeczywistych lub symulowanych. Jej powstanie łączy się ze znanym projektem Manhattan podczas II-giej Wojny Światowej, związanym z budową bomby jądrowej. Pomysł tej metody wiąże się z polskim matematykiem Stanisławem Ulamem, który pracował w projekcie. Metoda MC jest zazwyczaj ilustrowana przykładami związanymi z obliczaniem całek oznaczonych.

# Metoda Monte Carlo

Założmy, że należy oszacować wartość całki funkcji  $f(x)$  w przedziale  $[a, b]$ , co zapisujemy następująco:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Wartość całki jest równa polu wyznaczonemu przez funkcję  $f(x)$ , co można także obliczyć, jako pole pod wartością średnią tej funkcji w granicach całkowania, a zatem:



# Metoda Monte Carlo

- wartość średnia całkowanej funkcji:

$$\overline{f}_{ab} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

- pole wyznaczone przez wartość średnią:

$$S = (b-a) \overline{f}_{ab}$$

Wartość średnią można estymować statystycznie przez wyznaczenie wartości funkcji  $f(x)$  w  $N$  punktach wybranych według rozkładu równomiernego:

$$\hat{f}_{ab} = \frac{\sum_{n=1}^N f(x_n)}{N} \quad \xrightarrow{\text{pole}} \quad \hat{S} = (b-a) \frac{\sum_{n=1}^N f(x_n)}{N}$$

# Metoda Monte Carlo

**Przykład 1.** Stosując metodę MC obliczyć wartość podanej całki:

$$S = \int_{-2}^1 f(x)dx = \int_{-2}^1 xe^x dx$$

- Ustalamy liczbę generowanych punktów  $N = 100$ . Losowe wartości w przedziale  $[-2, 1]$  o rozkładzie równomiernym są ustalane następująco:

$x = a + (b-a) \cdot \text{rand}(N,1);$

gdzie:  $a = -2, b = 1$ .

- W powyższej instrukcji  $x$  jest wektorem zawierającym argumenty funkcji podcałkowej:  $f(x) = xe^x$



# Metoda Monte Carlo

Fragment programu:

```
% przedzial:
```

```
a = -2;
```

```
b = 1;
```

```
% liczba punktów
```

```
N = 100;
```

```
x = a + (b-a).*rand(N,1);
```

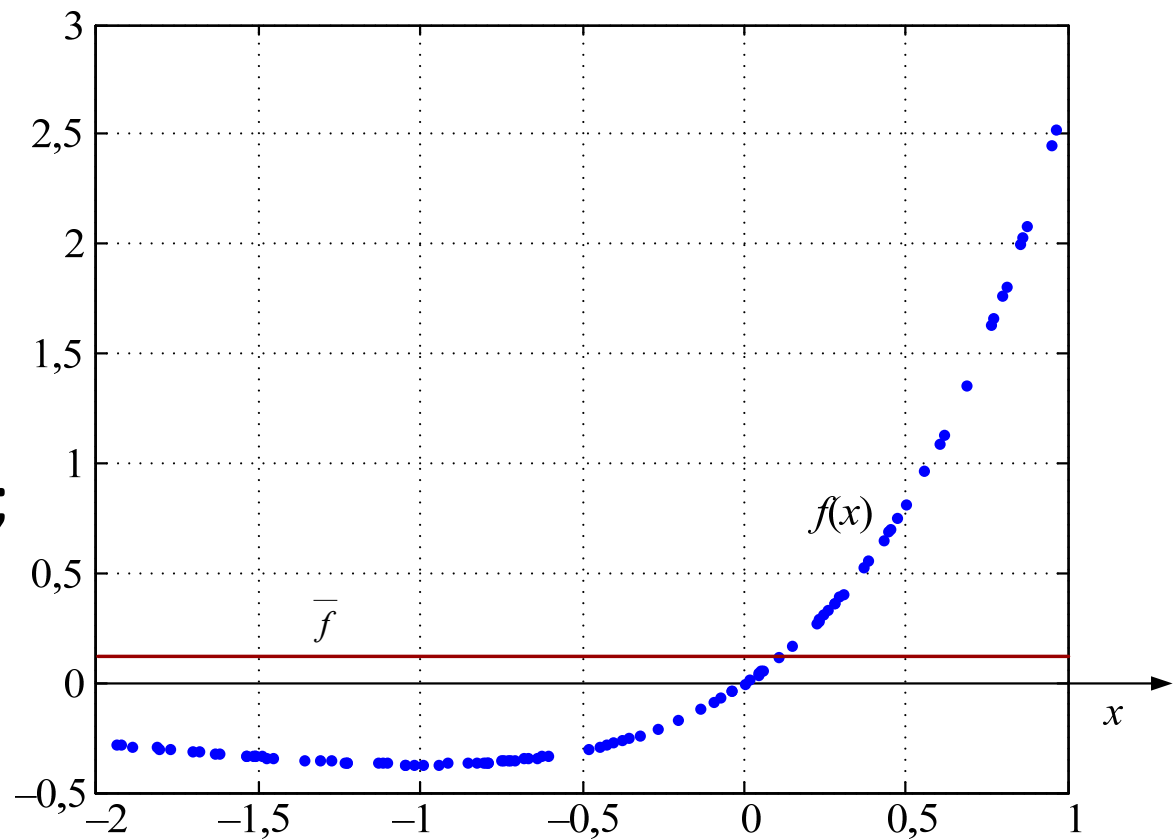
```
% funkcja
```

```
f=x.*exp(x);
```

```
% srednia
```

```
sr=mean(f);
```

```
S=(b-a)*sr,
```



# Metoda Monte Carlo

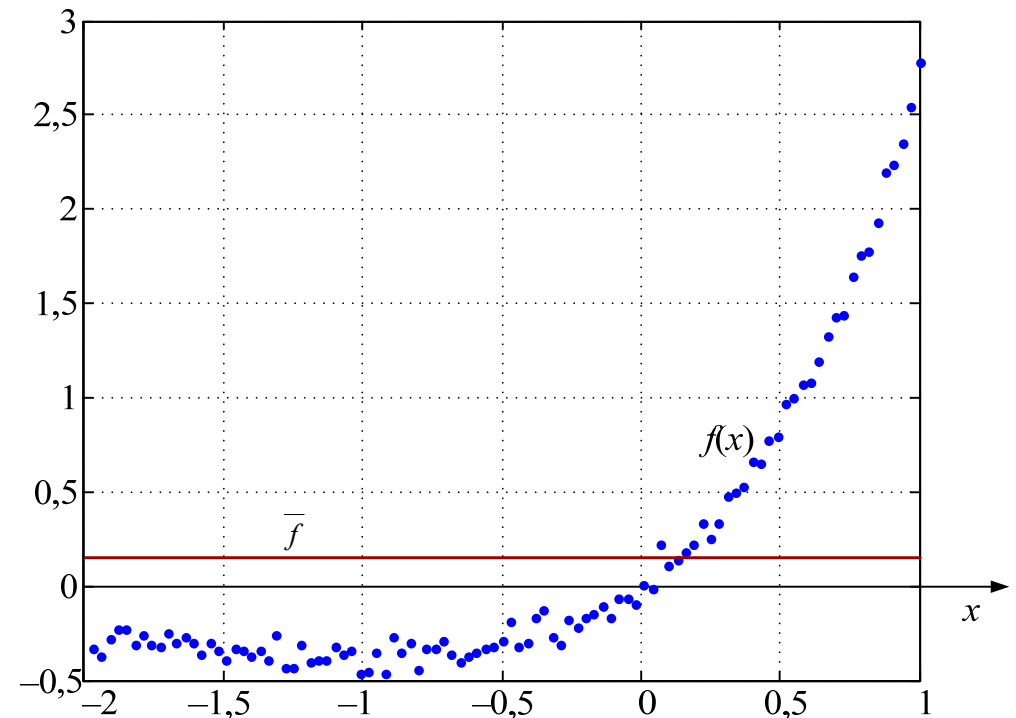
Porównanie wyników dla  $N = 100$ :

rzeczywista wartość:  $S_r = 0,406005849709838$

estymowana wartość:  $S = 0,343329818074488$

Można stosować różne wersje tej metody, na przykład:

- rozrzutem wokół wartości rzeczywistej



# Metoda Monte Carlo

**Przykład 2.** Stosując metodę MC obliczyć wartość liczby  $\pi$ . Wykorzystać relację pomiędzy polem okręgu i polem wpisanego w okrąg kwadratu.

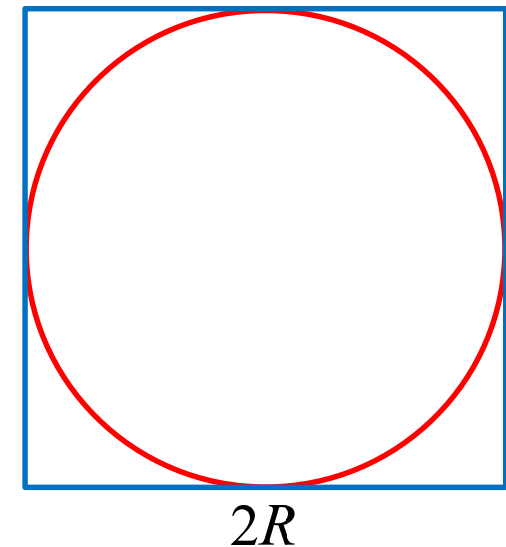
Porównując pola obu figur, otrzymamy:

$$p = \frac{S_k}{S_o} = \frac{4R^2}{\pi R^2} = \frac{4}{\pi}$$

skąd:

$$\pi = \frac{4}{p} = 4 \frac{S_o}{S_k} = 4 \frac{(S_k - S_{no})}{S_k} = 4 \left( 1 - \frac{S_{no}}{S_k} \right)$$

gdzie:  $S_o$  – pole okręgu;  $S_k$  – pole kwadratu;  $S_{no}$  jest polem obszaru między kwadratem i okręgiem.



# Metoda Monte Carlo

Algorytm postępowania:

- Generujemy  $N$  par niezależnych liczb losowych  $x_i, y_i$  w przedziale  $[-1, 1]$  o rozkładzie równomiernym, które traktujemy jako współrzędne punktów leżących w kwadracie o boku  $2R$ .
- Liczymy liczbę punktów leżących poza okręgiem. Są to te spośród wygenerowanych punktów, które spełniają warunek:

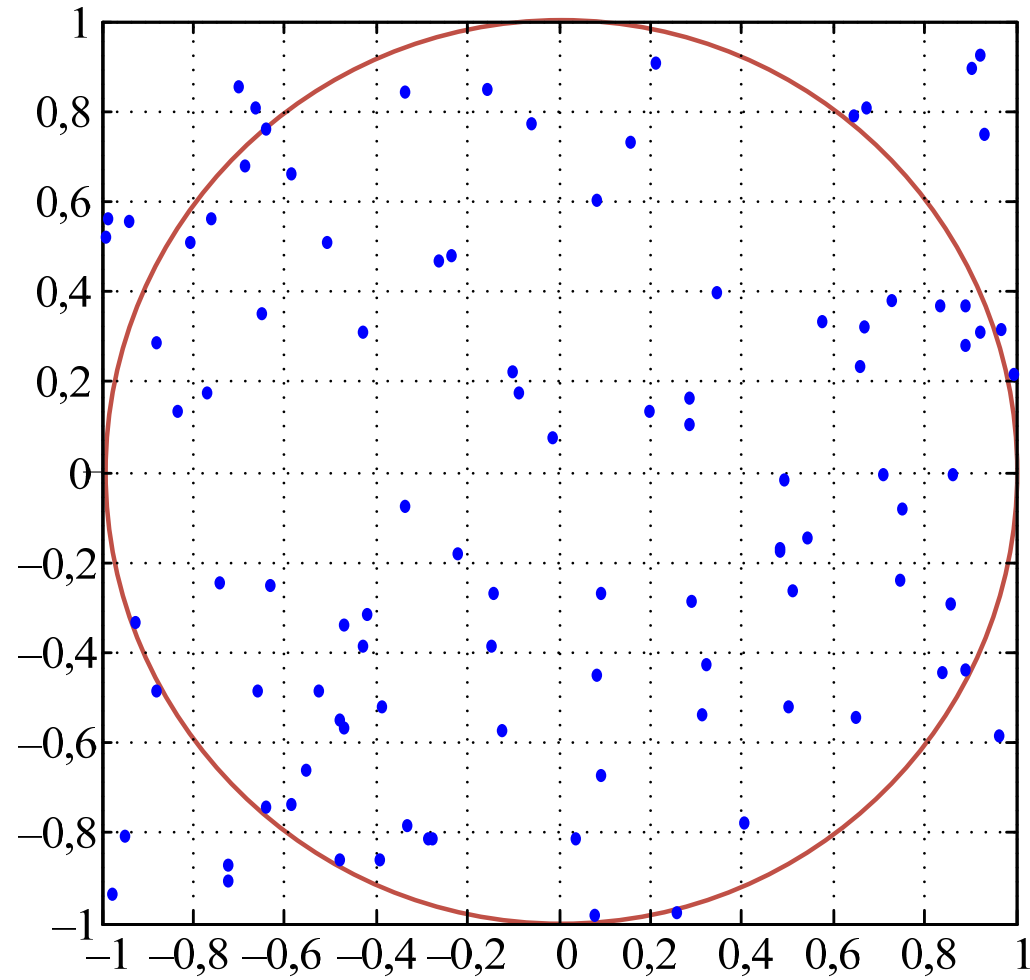
$$x_i^2 + y_i^2 > 1 \quad , i = 1, 2, \dots, N$$

# Metoda Monte Carlo

Wynik obliczeń:

dla  $N = 100$

$\pi \approx 3,24$ .



# Metoda Monte Carlo

**Przykład 3.** Stosując metodę MC obliczyć masę, środek ciężkości oraz moment inercji krążka z otworem, jak na rysunku.

Przyjąć następujące parametry badanego obiektu:  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 0,2$ ,  $d = 0,5$ ,  $\rho = 1$  (gęstość materiału).

Analityczne zależności są następujące:

- masa krążka:

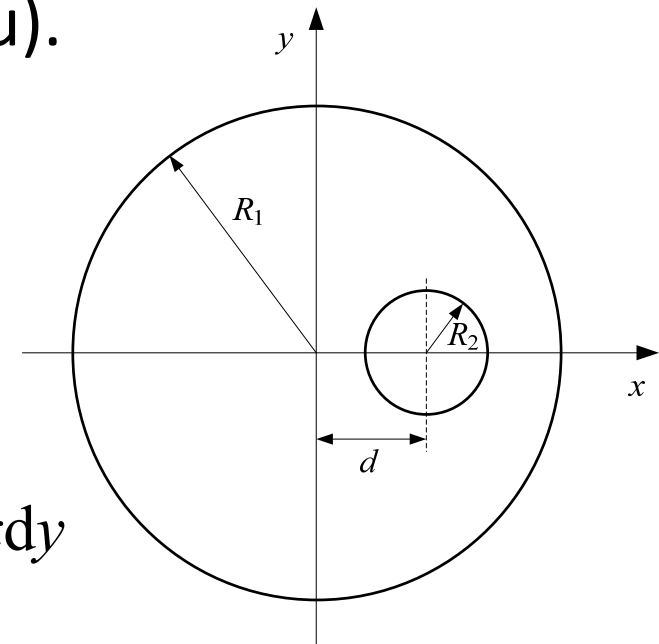
$$M = \iint_S \rho(x, y) dx dy$$

- środek ciężkości:

$$X_0 = \frac{1}{M} \iint_S x \rho(x, y) dx dy \quad Y_0 = \frac{1}{M} \iint_S y \rho(x, y) dx dy$$

- moment bezwładności:

$$J = \iint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$$



## Metoda Monte Carlo

Algorytm dyskretnego rozwiązania tego zadania może bazować na podziale całego obszaru krążka na  $N$  małych elementów, których masa przyjmuje wartość:

$$m_j = \frac{S}{N} \rho(x_j, y_j) \approx \rho(x, y) dx dy \Big|_{x=x_j, y=y_j},$$

gdzie:

$$S = \pi (R_1^2 - R_2^2)$$

Wychodząc stąd można obliczyć poszukiwane parametry.

Uzyskane rezultaty wg metody MC:

- $N = 1000$ ,  $M = 3,0159$ ,  $X_0 = -0,0593$ ,  $J = 1,5464$ ;
- $N = 100000$ ,  $M = 3,0159$ ,  $X_0 = -0,0673$ ,  $J = 1,5345$ .

Wartość obliczona analitycznie:  $J = 1,5369$ .

