

## Modele Procesów Fizycznych: ruch falowy

Ruch falowy jest związany z przemieszczaniem się zaburzenia w przestrzeni. Jest on wywołany przez zaburzenie, które następnie, dzięki odpowiednim właściwościom ośrodka, w którym powstało, może się przemieszczać. Ruch ten jest związany z przekazywaniem energii.

- Fale mechaniczne: w powietrzu, w wodzie, ośrodkach stałych i innych sprężystych;
- Fale elektromagnetyczne: w próżni i w różnych ośrodkach;
- Fale grawitacyjne: w przestrzeni.

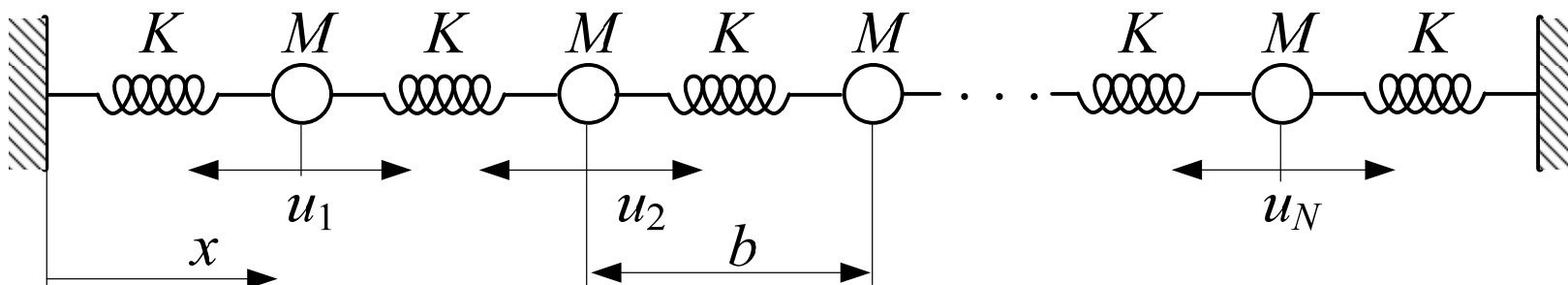
## Fale mechaniczne

Fale mechaniczne występują w przypadku, gdy zaburzenie przemieszcza się w ośrodku, który wykazuje **cechy sprężystości**, jak: woda, metal, powietrze. Drgania wywołane zaburzeniem są przekazywane do sąsiednich elementów struktury materiału (sąsiednich cząsteczek), co powoduje rozprzestrzenianie się fali.

- Fale podłużne
- Fale poprzeczne

## Fale mechaniczne

Schemat układu do analizy fali mechanicznej podłużnej:



Przy pominięciu strat:

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = -\frac{K}{M}(u_i - u_{i+1}) - \frac{K}{M}(u_i - u_{i-1}) = \frac{K}{M}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

$$\left. \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right|_{x=b \cdot i} \approx \frac{1}{b^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

## Fale mechaniczne

Równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

gdzie:  $v^2 = \frac{F}{\rho_l}$  - prędkość (m/s)<sup>2</sup>

$F = K \cdot b$  - naprężenie, (N)

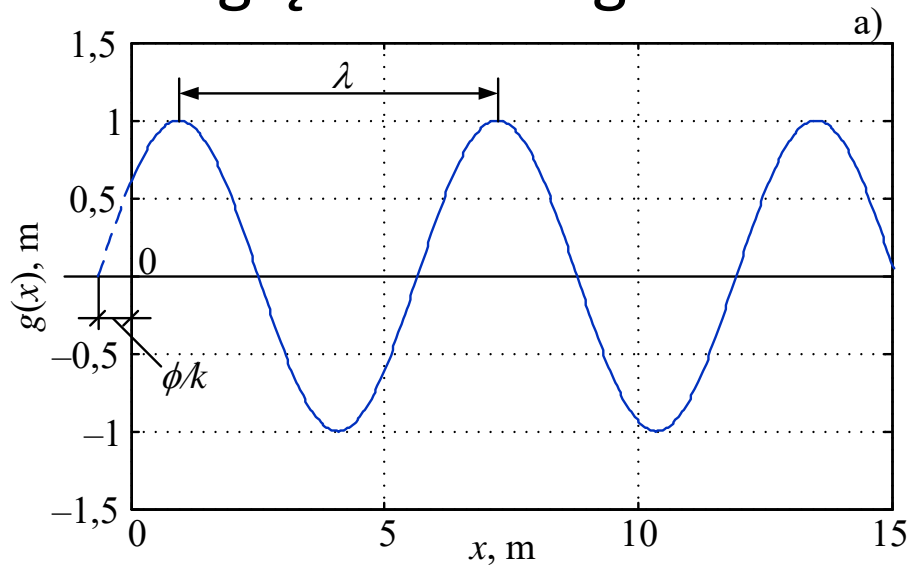
$\rho_l = \frac{M}{b}$  - gęstość liniowa (kg/m)

$$v = \sqrt{\frac{\text{czynnik sprężystości}}{\text{czynnik bezwładności}}}$$

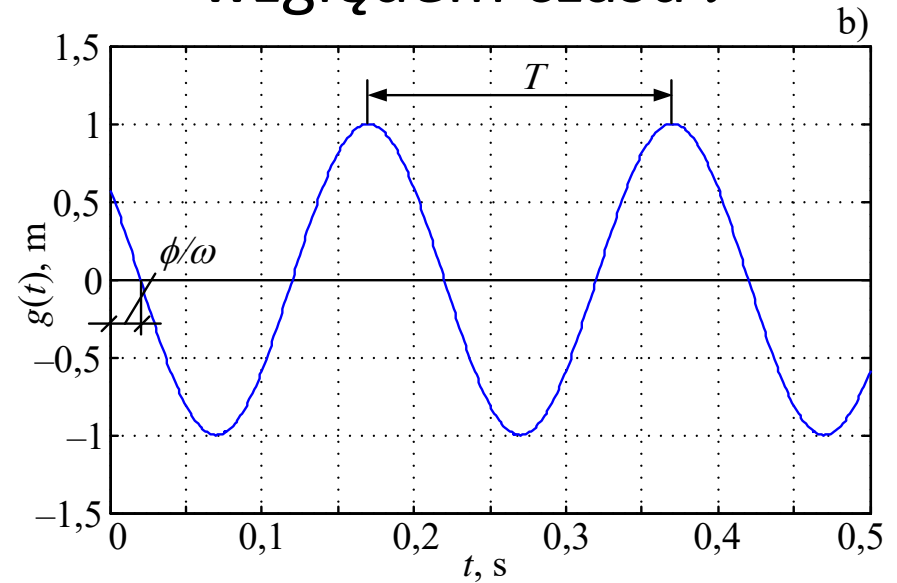
# Fale mechaniczne

Fala biegnąca:

względem odległości  $x$



względem czasu  $t$



$$v = \lambda \cdot f$$

## Fale mechaniczne

Równanie falowe 2-go rzędu:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = v \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = v \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

gdzie:  $u_x(t)$  - funkcja zależna od czasu przy ustalonej odległości,

$w_t(x)$  - funkcja zależna od odległości przy ustalonym czasie

## Fale mechaniczne

W przypadku fali przestrzennej:

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2}$$

gdzie:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ - laplasjan}$$

$u(x, y, z, t)$  – funkcja położenia

## Fale elektromagnetyczne

Równanie fali elektromagnetycznej wywodzi się z równań Maxwella i przy braku ładunku elektrycznego i bez źródeł prądowych ma następującą formę:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},$$

gdzie:  $\mathbf{E}$  – natężenie pola elektromagnetycznego (V/m),

$\mathbf{B}$  – indukcja magnetyczna (T),

$c$  – prędkość fali (m/s).



# Fale elektromagnetyczne

Równanie fali wzdłuż jednej współrzędnej:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

gdzie dla próżni:

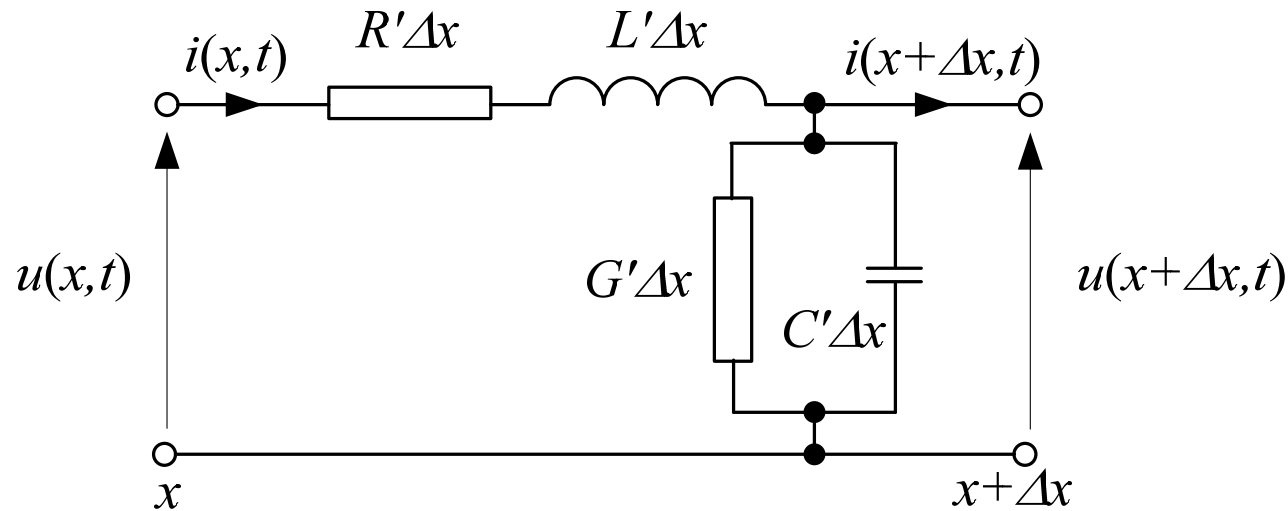
$$\frac{E_y}{B_z} = v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})$  – przenikalność magnetyczna próżni,

$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  – przenikalność elektryczna próżni.

# Fale elektromagnetyczne w linii

Schemat odcinka linii:



Równania obwodu:

$$u(x, t) = R'\Delta x \cdot i(x, t) + L'\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + u(x + \Delta x, t),$$

$$i(x, t) = G'\Delta x \cdot u(x + \Delta x, t) + C'\Delta x \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} + i(x + \Delta x, t),$$

## Fale elektromagnetyczne w linii

Po przejściu do granicy:  $\Delta x \rightarrow 0$ , otrzymamy:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R'i(x,t) + L'\frac{\partial i(x,t)}{\partial t},$$
$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G'u(x,t) + C'\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Dla linii bezstratnej:  $R' = 0$ ,  $G' = 0$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0,$$

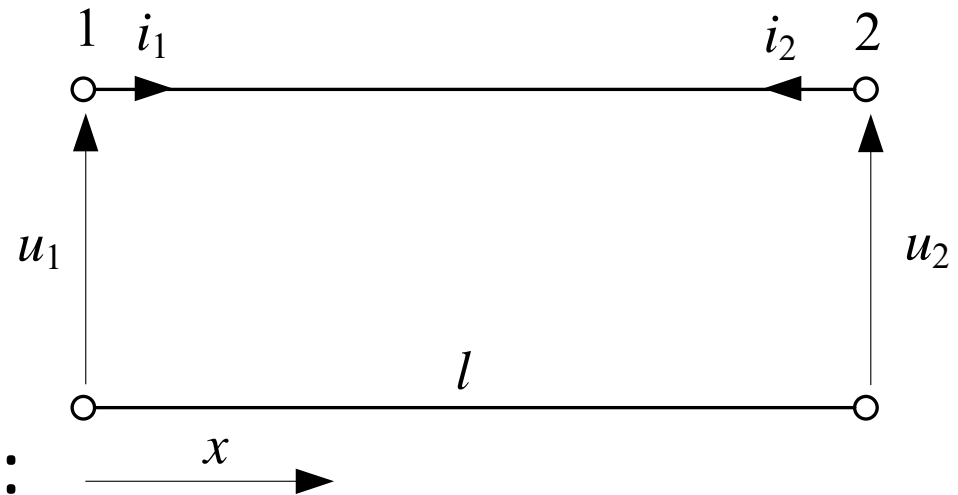
gdzie:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

## Model linii długiej

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = l$$



Superpozycja fal napięcia:

$$u(x, t) = u_a(x - vt) + u_b(x + vt)$$

oraz prądu:

$$i(x, t) = i_a(x - vt) - i_b(x + vt) = \frac{1}{Z_f} (u_a(x - vt) - u_b(x + vt))$$

gdzie:

$$Z_f = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

## Model linii długiej

Na podstawie tych równań możemy napisać:

$$u_a(x - vt) = \frac{1}{2} \left( u(x, t) + Z_f i(x, t) \right)$$

skąd, dla obu końców linii otrzymamy:

$$u_a(0 - v(t - \tau)) = \frac{1}{2} \left( u_1(x, t - \tau) + Z_f i_1(x, t - \tau) \right)$$

$$u_a(l - vt) = \frac{1}{2} \left( u_2(x, t) + Z_f i_2(x, t) \right), \quad \tau = l/v$$

a ponieważ:

$$u_a(-v(t - t)) = u_a(l - vt),$$

więc:

## Model linii długiej

$$i_1(t) = \frac{1}{Z_f} u_1(t) - \frac{1}{Z_f} u_2(t - \tau) - i_2(t - \tau),$$

$$i_2(t) = \frac{1}{Z_f} u_2(t) - \frac{1}{Z_f} u_1(t - \tau) - i_1(t - \tau),$$

lub w postaci dyskretnej:

$$i_1(k) = \frac{1}{Z_f} u_1(k) - \frac{1}{Z_f} u_2(k - m) - i_2(k - m),$$

$$i_2(k) = \frac{1}{Z_f} u_2(k) - \frac{1}{Z_f} u_1(k - m) - i_1(k - m)$$

Podstawiając:

$$j_1(k - m) = -\frac{1}{Z_f} u_2(k - m) - i_2(k - m),$$

$$j_2(k - m) = -\frac{1}{Z_f} u_1(k - m) - i_1(k - m),$$

## Model linii długiej

otrzymamy ostateczny model dyskretny linii:

$$i_1(k) = G_f u_1(k) + j_1(k - m),$$

$$i_2(k) = G_f u_2(k) + j_2(k - m),$$

gdzie:

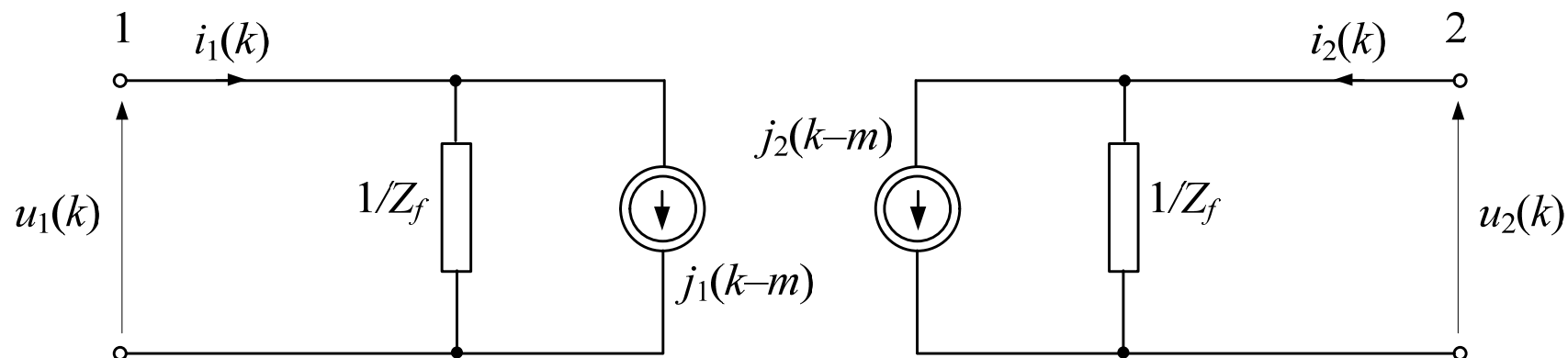
$$j_1(k - m) = -G_f u_2(k - m) - h_f i_2(k - m),$$

$$j_2(k - m) = -G_f u_1(k - m) - h_f i_1(k - m),$$

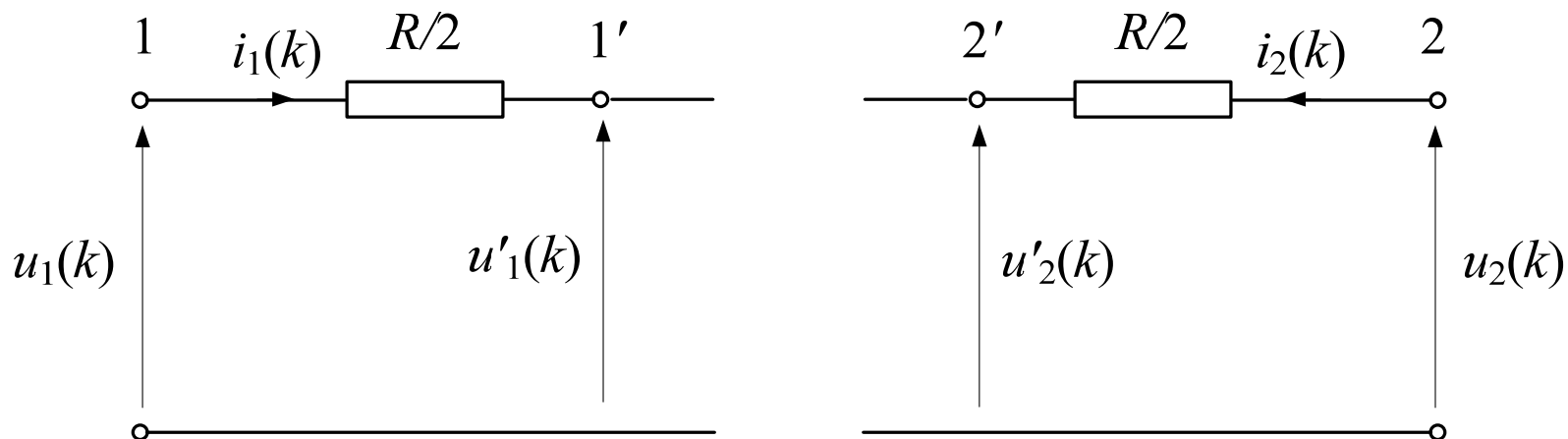
$$G_f = \frac{1}{Z_f + R/2} \quad h_f = \frac{2Z_f - R}{2Z_f + R}$$

## Model linii długiej

Równaniom tym odpowiada schemat zastępczy:



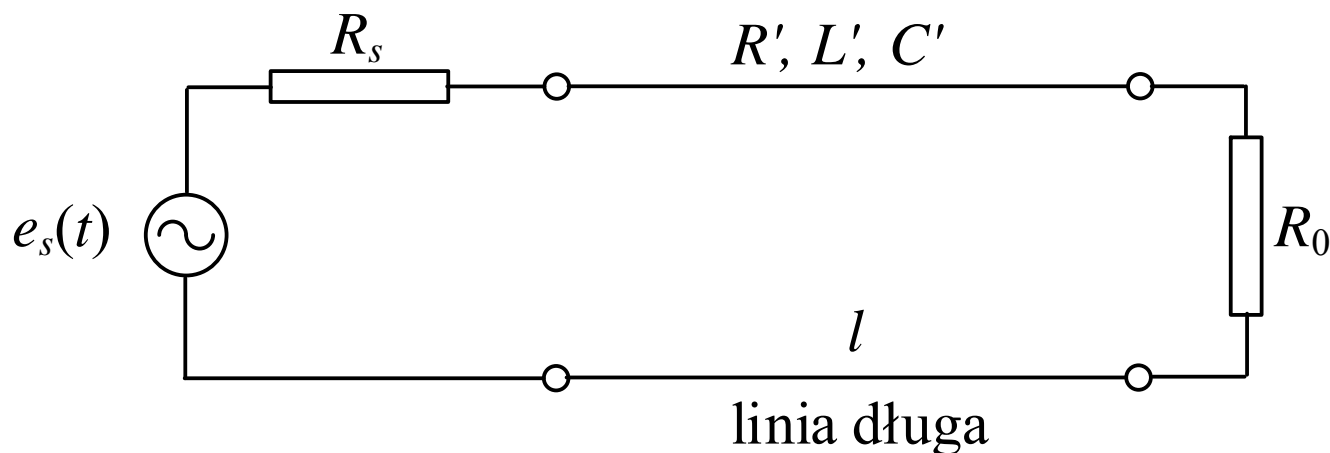
W celu częściowego uwzględnienia rezystancji można uzupełnić model przez dodanie skupionej rezystancji:





## Model linii długiej

Przykład 1: linia z obciążeniem rezystancyjnym  $R_0$



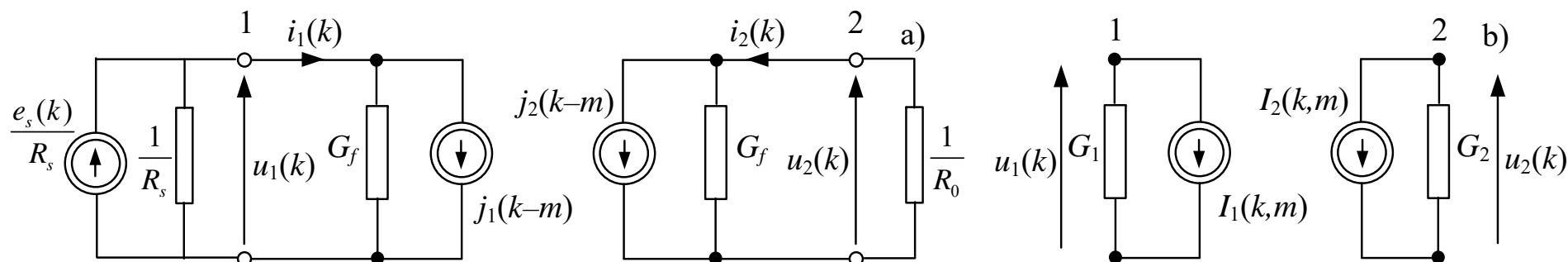
$$e_s(t) = 180\sin(100\pi t + \pi/3)\text{kV}, \quad R_s = 2,5\Omega, \quad R_0 = 250\Omega,$$

$$R' = 0,04\Omega/\text{km}, \quad L' = 1,6 \cdot 10^{-3}\text{H}/\text{km},$$

$$C' = 1,05 \cdot 10^{-8}\text{F}/\text{km}, \quad l = 160\text{km}, \quad T = 4,0 \cdot 10^{-5}\text{s}$$

## Model linii długiej

Model cyfrowy obwodu:

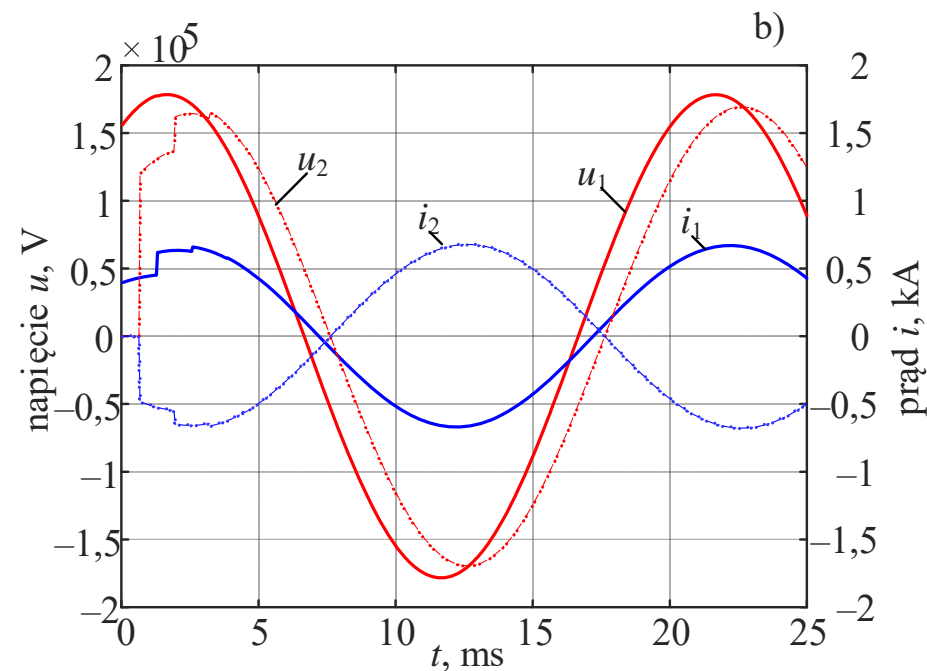
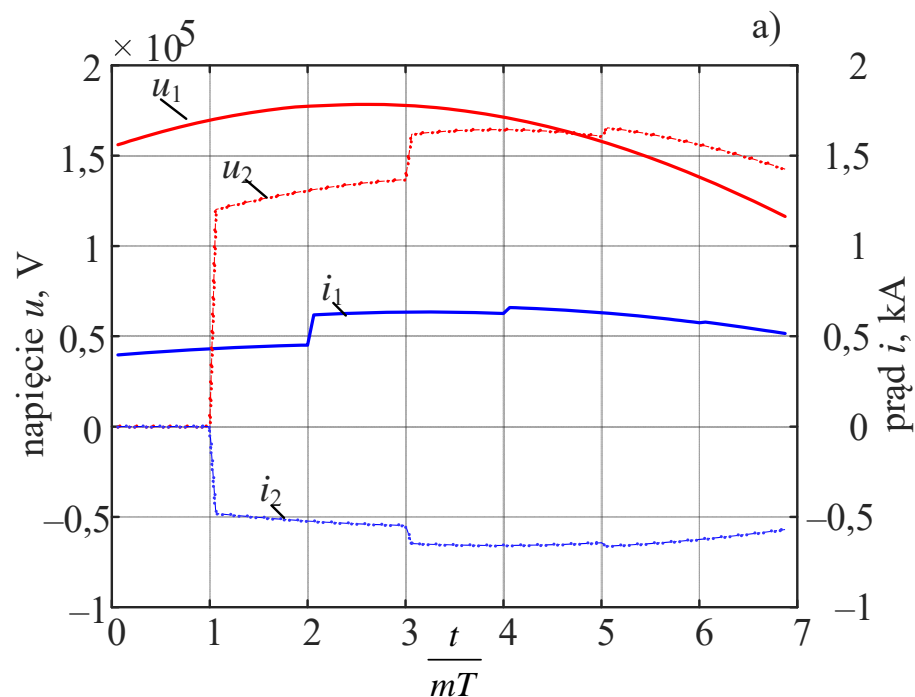


Schemat obwodu z linią długą (a), po uproszczeniu (b)

$$G_1 = G_f + \frac{1}{R_s} \quad G_2 = G_f + \frac{1}{R_0}$$

$$I_1(k, m) = j_1(k - m) - \frac{e_s(k)}{R_s} \quad I_2(k, m) = j_2(k - m)$$

## Model linii długiej



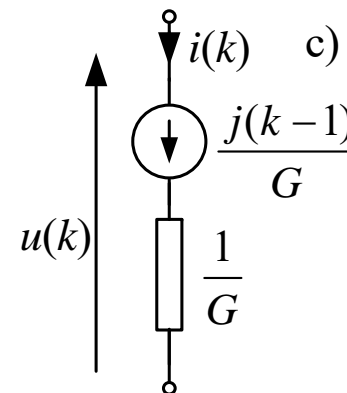
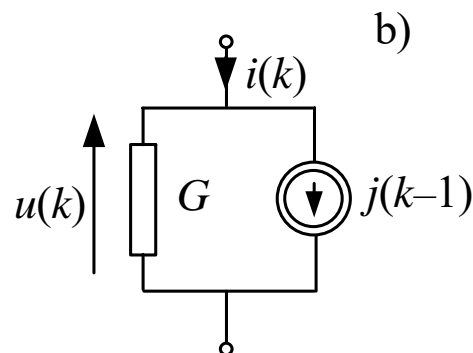
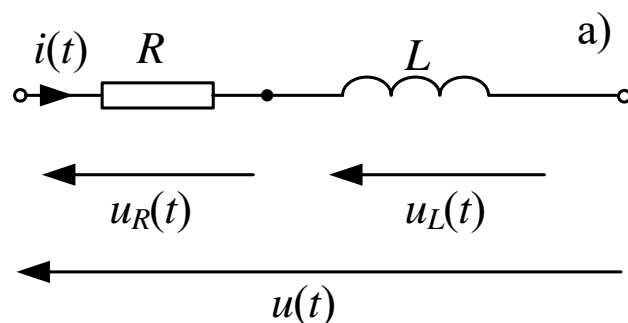
Przebiegi prądów i napięć w modelu symulacyjnym

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = 2,4398 \cdot 10^5 \text{ m/s},$$

$$Z_f = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 390,36 \Omega$$

# Model linii długiej

Model gałęzi RL:



Model ciągły:

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Model dyskretny (metoda trapezów):

$$i(k) = Gu(k) + j(k-1)$$

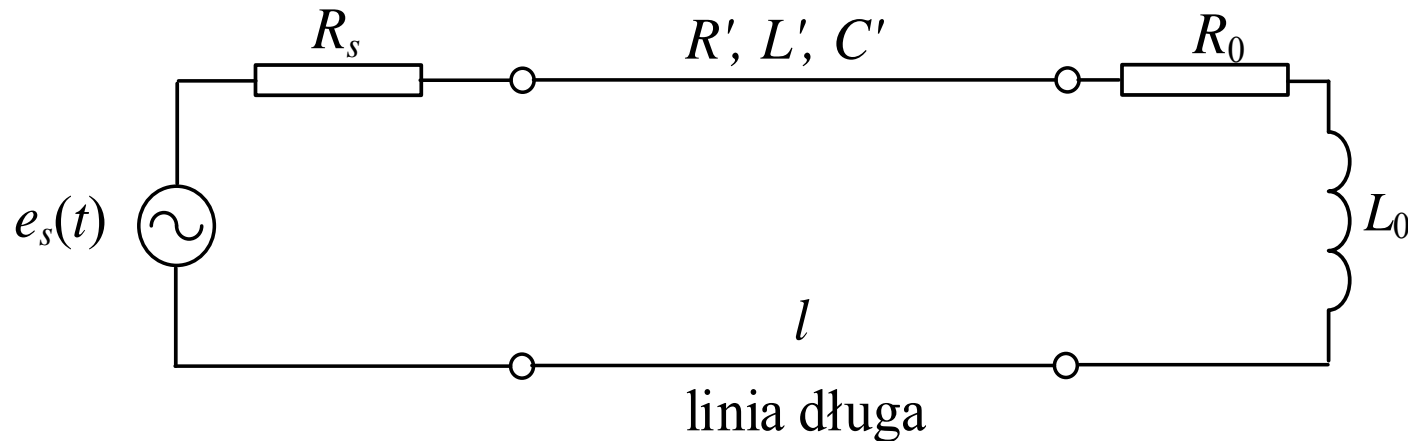
$$G = \frac{T}{2L + RT}$$

$$j(k-1) = h_{RL} i(k-1) + Gu(k-1)$$

$$h_{RL} = \frac{2L - RT}{2L + RT}$$

## Model linii długiej

Przykład 2: model linii z obciążeniem RL:

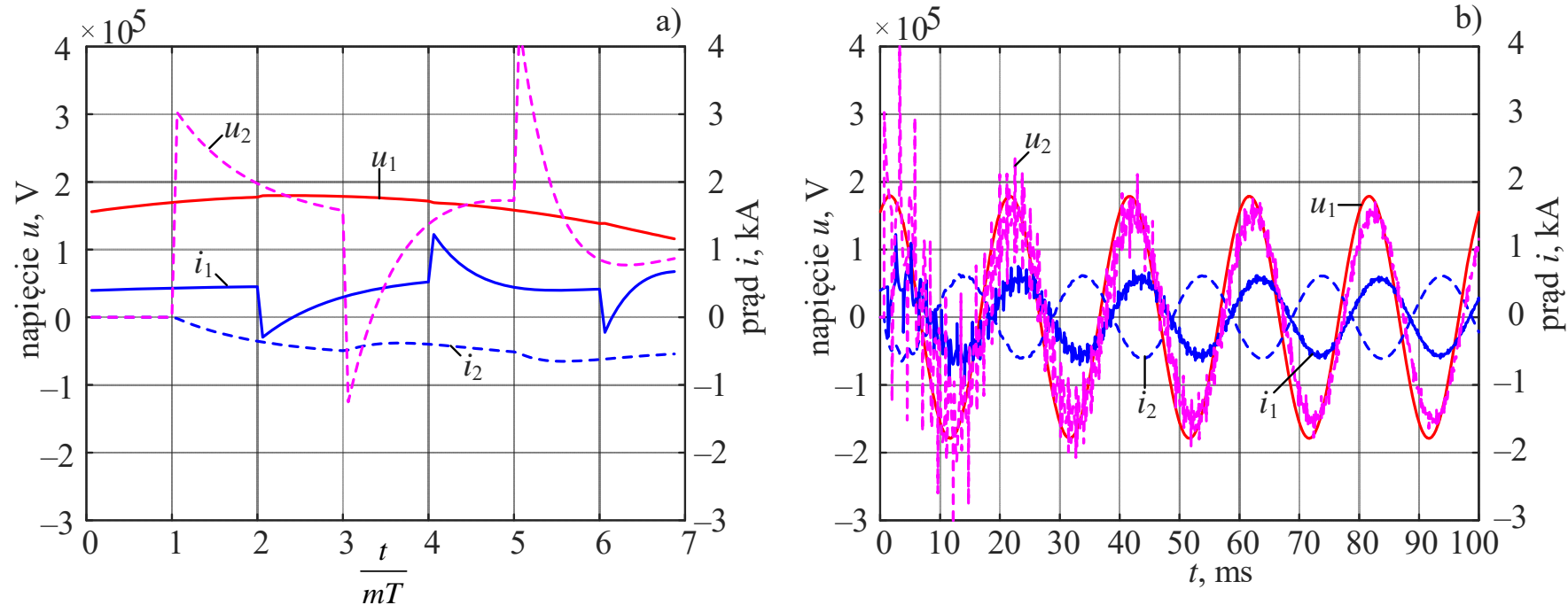


Parametry obwodu, jak w poprzednim przykładzie, przy czym:  $R_0 = 225\Omega$ ,  $L_0 = 0,3469\text{H}$ .

Model gałęzi obciążenia należy przygotować zgodnie z procedurą pokazaną na poprzednim slajdzie.

# Model linii długiej

Przebiegi uzyskane po załączeniu linii:



Widać, że w przebiegach prądów i napięć występują gwałtowne odkształcenia, co jest wynikiem obecności indukcyjności w obwodzie, w którym następują szybkie zmiany prądu.

