

PODSTAWY MODELOWANIA SYSTEMÓW

(notatki do wykładu)

eugeniusz.rosolowski@pwr.edu.pl

<http://www.rose.pwr.wroc.pl/PMS/PMS.pdf>

Wrocław, marzec 2020

Spis Treści

OD AUTORA	7
1. WSTĘP	11
2. MODELE KLASYCZNEJ MECHANIKI	17
2.1. Wprowadzenie	17
2.2. Równoważność modeli	19
2.2.1. Podstawowy układ mechaniczny	20
2.2.2. Układ mechaniczny wirujący	25
2.3. Równania Lagrange'a	33
2.3.1. Pojęcia podstawowe	33
2.3.2. Formalizm Lagrange'a	36
2.4. Modele Hamiltona	40
2.5. Równania Lagrange'a w odniesieniu do obwodów elektrycznych	43
2.5.1. Metoda oczkowa	43
2.5.2. Metoda węzłowa	53
2.5.3. Przykład: silnik dwufazowy	57
2.6. Zadania	70
3. MODELE DRGAŃ	71
3.1. Wprowadzenie	71
3.2. Matematyczne modele drgań	72
3.2.1. Równania różniczkowe pierwszego rzędu	72
3.2.2. Układy drugiego rzędu	74
3.3. Modele dynamicznych systemów nieliniowych	76
3.4. Równanie Van der Pola	83
3.5. Równanie różniczkowe Duffinga	85
3.6. Zadania	88
4. MODELE PROCESÓW FIZYCZNYCH	91
4.1. Wprowadzenie	91
4.2. Zjawisko tarcia	91
4.2.1. Tarcie suche	92
4.2.2. Tarcie lepkie	96
4.2.3. Modele tarcia z luzem	104
4.3. Ruch falowy	111
4.3.1. Fale mechaniczne	111
4.3.2. Fale elektromagnetyczne	117
4.4. Przepływ ciepła	129
4.4.1. A	129
4.4.2. B	129
4.5. Przepływ płynu	130
4.5.1. A	130
4.5.2. B	130
4.6. Zadania	130

5. MODELOWANIE NIELINIOWYCH SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH	131
5.1. Wprowadzenie.....	131
5.2. Systemy chaotyczne	131
5.2.1. Równania Lorenza.....	132
5.2.2. Nieliniowy model Duffinga.....	134
5.2.3. Obwód Chua	139
5.3. Modelowanie nieliniowych układów dyskretnych	142
5.4. Identyfikacja systemów chaotycznych	145
5.5. Chaos w układach elektroenergetycznych	152
5.5.1. Prosty układ ze sztywną siecią	153
5.5.2. Stabilność napięciowa	156
5.5.3. Chaos w układzie napędowym	156
5.5.4. Ferorezonans	156
5.5.5. Łuk elektryczny.....	166
5.5.6. Elektryczny łuk spawalniczy	179
5.6. Zadania	182
6. MODELE PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH	185
6.1. Wprowadzenie.....	185
6.2. Elementy rachunku prawdopodobieństwa	186
6.3. Generowanie liczb losowych.....	194
6.4. Metoda Monte Carlo.....	200
6.5. Modele deterministyczne czy stochastyczne?	208
6.6. Zadania	210
7. MODELE ZALEŻNE OD ZDARZEŃ	213
7.1. Wprowadzenie.....	213
7.2. Klasyfikacja systemów kolejkowych	216
7.3. Przykłady systemów kolejkowych	217
7.3.1. System M/M/1.....	217
7.3.2. System M/M/s.....	222
7.3.3. System M/M/1/b.....	224
7.4. Zadania	229
DODATEK	231
1. Model układu mechanicznego wirującego	231
2. Model obwodu elektrycznego zgodnie z formalizmem Lagrange’a – metoda węzłowa	232
3. Model silnika 2-fazowego	234
4. Równanie Duffinga	236
5. Model Lorenza.....	237
6. Równania Rösslera	238
7. Program lyapunov	239
8. Model sieci elektrycznej z wyłącznikiem na bazie modelu Mayra.....	243
9. Model elektrycznego łuku spawalniczego	245
10. Model kolejki M/M/1	247
LITERATURA	253

Spis treści	5
SKOROWIDZ	257

OD AUTORA

Modelowanie w nauce i technice stało się w ostatnich latach bardzo ważnym zagadnieniem, jako narzędzie do formułowania i weryfikacji nowych koncepcji, jak również wygodnym środkiem do badania nowych konstrukcji i ich sprawdzania w różnych warunkach. Użyte w tytule określenie ‘system’ ma bardzo szerokie znaczenie i zazwyczaj łączy się ze zbiorem wzajemnie połączonych elementów wraz z zachodzącymi między nimi relacjami. Można je więc odnieść niemal do wszystkich zjawisk występujących w przyrodzie lub zainicjowanych przez działalność człowieka. Próba opisu tak rozumianych systemów musi więc zakładać ograniczenie zarówno pola omawianych zagadnień, jak i ich głębokości. Głównym celem niniejszego opracowania jest prezentacja podstawowych metod i środków – przede wszystkich komputerowych - stosowanych w analizie wybranych procesów fizycznych, systemów dynamicznych oraz badań operacyjnych, które są ważne w technice. Prezentacja ta jest prowadzona z uwzględnieniem historii rozwoju klasycznej fizyki i techniki, co daje także pewną perspektywę postępu w zakresie tworzenia modeli systemów.

W tym ujęciu, po rozdziale wstępnym, prezentowane są modele klasycznej mechaniki, które stały się kręgosłupem nowoczesnej techniki. Jednocześnie, sekwencja genialnych pomysłów głównych twórców tych modeli: I. Newtona, J. Lagrange’a oraz W. Hamiltona i skupionych wokół tych idei fizyków, a także matematyków pokazują, jak różne pomysły zapładniają wyobraźnię uzdolnionych twórców, niekiedy z odległych dziedzin.

Wspólnym zjawiskiem, które łączy obszerny zbiór modeli dynamiki systemów jest fenomen drgań, które objawiają się w postaci mniej lub bardziej regularnie powtarzających się przebiegów. Analiza drgań stała się główną osią opisu właściwości systemów dynamicznych. Z biegiem czasu powstały różne analityczne narzędzia do opisu tych właściwości. Równoległe z rozwojem modeli klasycznej mechaniki, a także w ślad za doskonaleniem rachunku różniczkowego i całkowego, uczeni otrzymali narzędzia pozwalające w sposób rygorystyczny opisywać podstawowe zjawiska dynamiczne w różnych środowiskach. Kolejny rozdział przedstawia matematyczną bazę do opisu drgań, w postaci równań różniczkowych drugiego i wyższych rzędów, odnoszących się do układów liniowych i nieliniowych. Przybliżone są podstawowe pojęcia, zależności i sposoby analizy drgań. Modele niektórych rodzajów drgań i związanych z nimi procesów stały się swego rodzaju wzorcami, charakteryzującymi podstawowe

cechy analizowanych procesów w bardzo różnych dziedzinach: w technice, biologii, czy w socjologii.

Na bazie modeli układów drgających powstały opisy różnych procesów fizycznych. Odnosi się to przede wszystkim do ruchu falowego, transferu ciepła, czy też przepływu gazów i cieczy. Z czasem przyjęto nazywać ten zbiór modeli dynamiki w przestrzeniach wielowymiarowych, równaniami fizyki matematycznej. Bardzo elementarny przegląd modeli wybranych zjawisk z tego zakresu, głównie z punktu widzenia późniejszych zastosowań w technice, jest przedstawiony w rozdziale 4.

W praktyce, każdy realnie istniejący proces fizyczny jest zjawiskiem nieliniowym, co oznacza, że jego analityczny model jest nieliniowy. Zakres pracy liniowej jest często ograniczony do wąskiego przedziału zmian parametrów modelu. Analiza układów nieliniowych jest często trudnym do realizacji wyzwaniem, gdyż nie istnieje uniwersalna metoda, którą z powodzeniem można zastosować w dowolnym przypadku. Niemniej jednak, w nauce długi czas panowało przekonanie, że nawet w nieliniowych układach deterministycznych, przyszłość badanego systemu może być dokładnie opisana, jeśli znany jest jego model oraz zestaw wymaganych warunków początkowych. Ten paradygmat został nieoczekiwanie obalony w ostatnich dziesięcioleciach, w rezultacie wielu eksperymentów obliczeniowych i postępów w matematyce, który doprowadził do uprawomocnienia się – na pierwszy rzut oka, nieracjonalnego - pojęcia ‘chaos deterministyczny’. Ten, nie w pełni jeszcze uświadomiony przewrót w filozofii nauk ścisłych, stał się powodem rozwoju wielu nowych gałęzi matematyki, fizyki – i w konsekwencji, techniki. Krótka historia i przegląd wybranych procesów związanych z chaosem deterministycznym, jest zamieszczony w rozdziale 5. Zagadnienie to jest szeroko ilustrowane licznymi przykładami, szczególnie z zakresu elektrotechniki.

Druga część książki odnosi się do systemów inicjowanych przez zdarzenia. W odróżnieniu od systemów dynamicznych, w tego typu systemach zarówno inicjalizacja procesu, jak i jego przebieg jest warunkowany zdarzeniami, w odniesieniu do których zazwyczaj się zakłada, że występują w sposób losowy. Jako wprowadzenie do tych zagadnień, w rozdziale 6. przypomniano podstawowe pojęcia związane z probabilistyką i statystyką matematyczną. Podsumowaniem tych rozważań jest krótki opis metody Monte Carlo, która ma zastosowanie w modelach szczególnie złożonych procesów lub gdy parametry tych procesów nie są do końca znane, można je natomiast opisać za pomocą charakterystyk probabilistycznych.

W charakterze przykładu systemu inicjowanego przez zdarzenia, w rozdziale 7. krótko przedstawiono podstawowe pojęcia związane z układami kolejkowymi. Jest to przykład szerokiej klasy modeli, które zazwyczaj obejmuje się nazwą: badania operacyjne.

Prowadzone w książce rozważania są bogato ilustrowane praktycznymi przykładami, które zostały opracowane z wykorzystaniem pakietu programowego Matlab/Simulink (wersja R2017b). Krótkie procedury zostały bezpośrednio zamieszczone w tekście, natomiast bardziej rozbudowane przykłady umieszczono w Dodatku (str. 231). Programy symulacyjne związane z większością prezentowanych w skrypcie

przykładów są dostępne w formie plików *.m lub *.slx (w wersji skompresowanej) pod adresem: <http://zas.ie.pwr.wroc.pl/ER/PMS/Przyklady/index.html>. W spisie literatury znajduje się także zbiór odnośników do stron internetowych, gdzie Czytelnik może znaleźć bardzo pomocne ilustracje i przykłady rozszerzające prezentowane zagadnienia – zarówno o charakterze teoretycznym, jak i w formie przykładowych ilustracji. Wszystkie tego typu odnośniki były aktualne na 20 marca 2020 r.

W warstwie podstawowej, niniejszy skrypt zawiera opis głównych zagadnień prezentowanych na wykładzie *Podstawy modelowania systemów*, który jest przeznaczony dla studentów II stopnia na kierunku *Automatyka Przemysłowa* na Wydziale Elektrycznym Politechniki Wrocławskiej. Zdaję sobie sprawę z pobieżności w prezentacji niektórych omawianych zagadnień. Będę wdzięczny za wszelkie uwagi dotyczące zarówno układu pracy, jak i wszelkich błędów. Można je przesyłać na mój adres e-mailowy: eugeniusz.rosolowski@pwr.edu.pl

Wrocław, marzec 2020

Autor

1. WSTĘP

Modelowanie, jako przejaw intelektualnej aktywności człowieka jest znane od zarania ludzkości. Nietrudno dostrzec, że na co dzień posługujemy się modelami nawet tego nie zauważając – modele stały się częścią języka. Na przykład, gdy używamy pojęcia ‘most’, to zazwyczaj mamy na myśli konstrukcję, która łączy dwa brzegi (rzeki, strumienia), za pomocą której można przejść lub przejechać na drugą stronę. Jeśli używamy tego pojęcia do wyjaśnienia komuś sposobu dojścia do określonego miejsca leżącego za mostem, to wydobywamy z niego tylko najistotniejsze cechy służące do jego identyfikacji, a pomijamy wiele innych przymiotów tego akurat obiektu, aby nie zaciemniać pytającemu obrazu drogi.

Pomimo trywialności tego przykładu, podobną funkcję pełnią także modele w nauce i technice. Czym zatem jest model? Jest wiele odpowiedzi na to pytanie, które zależą od kontekstu jego użycia. Najczęściej mówi się, że model jest uproszczoną reprezentacją rzeczywistego obiektu (układu) utworzoną w celu zrozumienia (wydobywania, naświetlenia) określonych jego cech. Tworzenie modelu jest modelowaniem.

W przedstawionej definicji ujęta jest oczywista informacja, że modelowanie ma na celu utworzenie takiego opisu (formuły lub urządzenia), na podstawie którego można najlepiej odpowiedzieć na pytanie dotyczące oryginału w rozważanym kontekście. Ponieważ ten sam rzeczywisty obiekt może być przedmiotem różnego zainteresowania (różne jego cechy mogą być badane), więc także różne modele mogą go reprezentować. Modelowanie prowadzi, zatem do wyostrenia tych cech rzeczywistego obiektu/układu, które są istotne dla modelującego lub posługującego się modelem. Pomija się jednocześnie te właściwości/cechy obiektu, które są w danym oglądzie nieistotne. Widać stąd, że może być wiele modeli tego samego rzeczywistego obiektu (procesu), które mogą służyć do demonstracji różnych jego cech.

Bardzo ważną rolę odgrywają modele w nauce. Można zaryzykować tezę, że nauka zaczęła swój wielki rozwój od momentu, gdy w sposób świadomy zaczęto w niej stosować modele, które w sposób jednoznaczny i ścisły opisują zachowanie się badanego obiektu. Takie cechy mają modele matematyczne. W tym kontekście model jest matematyczną reprezentacją systemu¹ fizycznego, biologicznego, informatycznego, ekonomicznego i innego. Model matematyczny pozwala zapisać w formie analitycznej sposób działania systemu. W bardziej użytkowej formie można powiedzieć, że model

¹ Przez system rozumie się zbiór elementów z określonymi relacjami między nimi.

matematyczny pozwala w jednoznaczny analityczny sposób opisać działanie procesu, stwarzając możliwość jego symulacji (imitacji). Właściwie cała fizyka, a za nią technika, jest oparta na modelowaniu matematycznym.

W wielu przypadkach modelowanie dotyczy zjawisk, których występowanie jest powszechnie znane, jednak dopiero ich wyszczególnienie (separacja) i analityczne ujęcie, włącza je do nauki, czy ogólnie, do obiegu kulturowego. W historii znanych jest wiele takich przypadków. Przecież pływanie na wodzie niektórych ciał i zatapianie innych było obserwowane ‘od zawsze’. Dopiero genialny Archimedes podczas kąpieli doznał olśnienia, które pozwoliło mu sformułować prawo wyporności². Jeśli wierzyć legendzie, to podobnie, jabłko spadające na leżącego pod jabłonią Newtona³ stało się przyczynkiem do sformułowania prawa powszechnego ciążenia.

Zbiór modeli matematycznych odnoszących się do jakiejś dziedziny fizyki tworzy jej teorię. W stanie tworzenia, modele powstają na zasadzie budowy koncepcji, które są nie do końca zweryfikowanymi modelami badanego zjawiska/systemu. Weryfikacja (walidacja⁴) jest dokonywana na zasadzie odwołania się do rzeczywistego obiektu. Weryfikacja zamkniętego zbioru modeli odnoszących się do badanego zjawiska/systemu prowadzi do powstania obowiązującej teorii. Procedurę tę można przedstawić za pomocą znanego schematu:

Teoria (koncepcja) \leftrightarrow eksperyment (weryfikacja)

W powyższym schemacie model (matematyczny) jest elementem tworzącej się teorii. Z chwilą pojawienia się narzędzi umożliwiających symulację, a więc ‘ożywienie’ modeli, pojawiła się sposobność do obserwacji zachowania się modelu w zdefiniowanych warunkach. Symulacja polega więc, na odtworzeniu ‘na niby’ - za pomocą modelu - warunków, jakie występują w rzeczywistym systemie. Odbywa się to zgodnie z ograniczeniami narzuconymi przez model.

Rozwój techniki komputerowej doprowadził do powstania bardzo wygodnych i elastycznych narzędzi służących do symulacji funkcjonowania modeli. W tym kontekście używa się pojęcia modelu komputerowego, przez co należy rozumieć odpowiedni algorytm funkcjonowania modelu. Na podstawie tego algorytmu tworzone są komputerowe programy do wirtualnej realizacji modelu (w środowisku komputerowym).

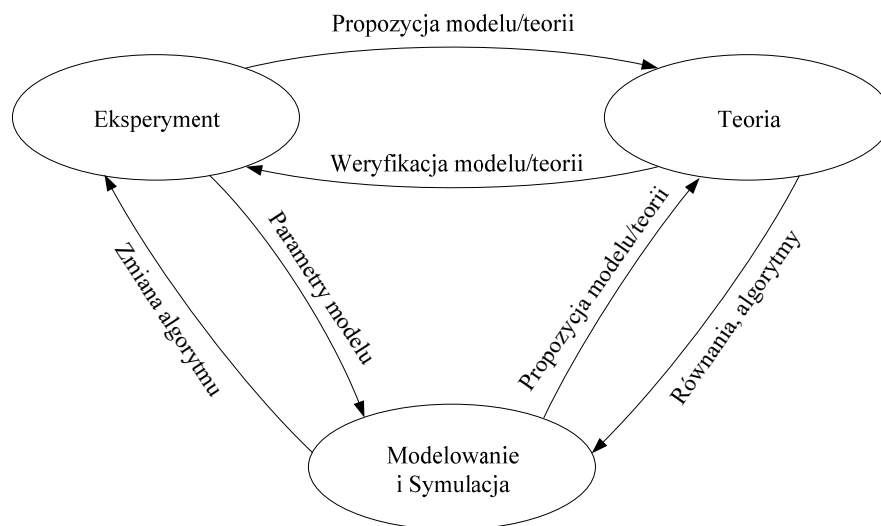
Symulacja komputerowa umożliwia tworzenie wirtualnego świata procesów i systemów, które w rzeczywistości nie mogą być dostępne naszym zmysłom w tak plastyczny sposób. Dotyczy to zwłaszcza procesów, których obserwacja jest niemożliwa

² Archimedes z Syrakuz (ok. 287 – 212 p.n.e.) podekscytowany swoim odkryciem wyskoczył z wanny i z okrzykiem ‘Eureka’ nago biegał po ulicach Syrakuz.

³ Izaak (Isaac) Newton (1642 – 1727) – angielski matematyk i fizyk; najważniejsze jego osiągnięcia dotyczą sformułowania zasad rachunku różniczkowego, trzech podstawowych praw dynamiki oraz prawa powszechnego ciążenia.

⁴ ang. *validate* – zatwierdzać, potwierdzać ważność.

ze względu na niedostępność pomiarową, panujące warunki fizyczne, odległość lub koszt (procesy zachodzące w odległych galaktykach, wewnątrz struktur materiałowych, wewnątrz urządzeń). Symulacja komputerowa jest wykorzystywana nie tylko w technice, do badania właściwości nowych konstrukcji, ale stała się ważnym narzędziem w rozumieniu rzeczywistości. W tym sensie mówi się o włączeniu modelowania i symulacji w krąg procedury tworzenia teorii rzeczywistości. Ilustruje to znany schemat pokazany na rys. 0.1⁵. Blok związany z modelowaniem i symulacją odgrywa w tym schemacie istotną funkcję: tworzy on dopełnienie rzeczywistego systemu. Jest to jakby rozjaśnienie tej części rzeczywistości, która jest przedmiotem selektywnej analizy. Reprezentacja rzeczywistości w tym bloku jest udoskonalana w rekurencyjnej procedurze poprawiania modelu/teorii.



Rys. 1.1. Ilustracja zależności: Teoria – Eksperyment - Symulacja

Główny podział modeli przebiega w zależności od sposobu ich inicjacji (pobudzenia) i natury zachodzących procesów:

- modele procesów zachodzących względem czasu (ciągłego lub dyskretnego);
- modele procesów rozpatrywanych względem inicjujących ich zdarzeń.

Procesy opisywane względem czasu są zazwyczaj dobrze uporządkowane i 'przewidywalne'. Kolejne ich stany zazwyczaj łączą się ze stanami poprzednimi. Ich opis analityczny może bazować na podejściu deterministycznym (matematyczny model

⁵ KLEIBER M., *Modelowanie i Symulacja Komputerowa. Moda czy Naturalny Trend Rozwoju Nauki*. Nauka 4 (1999) 29–41.

deterministyczny) lub probabilistycznym, gdy zakłada się losowy charakter opisujących je funkcji lub ich parametrów.

Procesy inicjowane zdarzeniami są z natury losowe (jeśli pominąć przypadek, gdy zdarzenia zachodzą w sposób uporządkowany względem czasu). Zarówno liczba zdarzeń wejściowych w określonej jednostce czasu, jak i długość okresu upływającego pomiędzy kolejnymi zdarzeniami są najczęściej rozpatrywane jako wielkości losowe.

W przypadku procesów opisywanych względem czasu, mamy do czynienia ze zjawiskami dynamicznymi, które określają relacje wejście-wyjście elementów systemu w czasie, pokazując także związane z nimi przebiegi, jako funkcje względem czasu.

System dynamiczny charakteryzuje się tym, że jego odpowiedź na dane wymuszenie ma charakter zmienny w czasie. Ponadto, odpowiedź jest funkcją zarówno bieżącego wymuszenia, jak również historii procesu. *Model analityczny* (matematyczny) jest określony za pomocą odpowiednich równań lub innych adekwatnych relacji, jak wykresy, czy tabele, które opisują system z pewnym przyjętym przybliżeniem. Jeśli relacje te są zapisane w formie programów komputerowych, to mówimy o *komputerowym modelu* systemu.

Model matematyczny systemu jest bardzo często zapisany w formie funkcji, w których zmienną niezależną jest czas ciągły, co oznacza, że może on przejmować dowolne wartości w określonym przedziale zmienności. Jest to zatem, *model ciągły* względem czasu. Zapis tych zależności w formie nadającej się do obliczeń (realizacji, symulacji) najczęściej wymaga zapisu tych równań w formie funkcji względem czasu dyskretnego. Mówimy wówczas o *dyskretnym modelu* systemu. Implementacja takiego modelu w komputerze o określonej dokładności reprezentacji wielkości rzeczywistych (co zazwyczaj jest związane z 'arytmetyką komputera') wiąże się także z dyskretyzacją parametrów i zmiennych procesu względem amplitudy. Tak zredukowany model jest nazywany *modelem cyfrowym* systemu. Widać stąd, że dynamiczny model komputerowy jest zawsze modelem cyfrowym: z dyskretnym czasem i określoną dokładnością reprezentacji zmiennych procesu i jego parametrów.

Rozwój metod numerycznych, a także technicznych środków cyfrowego przetwarzania, gromadzenia oraz przesyłania informacji sprawił, że modelowanie procesów stało się bardzo ważną dziedziną nauki i ogólnie, współczesnej kultury. W tej perspektywie, modelowanie komputerowe jest nową, bardzo młodą dziedziną wiedzy, której błyskawiczny rozwój właśnie zachodzi na naszych oczach. Dzięki znacznemu rozszerzeniu możliwości narzędzi związanych z modelowaniem komputerowym w zakresie: szybkości przetwarzania danych, elastyczności i plastyczności prezentowania wyników oraz możliwości odtwarzania dowolnych aspektów rozważanych zagadnień, dziedzina ta weszła do podstawowego zbioru współczesnej filozofii nauki. Tradycyjny łańcuch następstw prowadzący do zrozumienia otaczającej nas rzeczywistości: idea → eksperyment → idea → ... Został niemal całkowicie zastąpiony przez sekwencję: idea → model → eksperyment → idea → ..

Ważną grupą systemów i związanych z nimi modeli, która zaczęła się przebijać do świadomości badaczy w ostatnich dziesięcioleciach są zjawiska obejmowane ogólną nazwą chaosu. Szczególnie intrygujące i, z perspektywy uporządkowanego świata, zaskakujące, są zjawiska chaotyczne występujące w warunkach deterministycznych. Te procesy, związane z analizą dynamicznych systemów nieliniowych, zostały zaledwie zasygnalizowane w rozdziale 5.

Na zakończenie tych rozważań można się pokusić o ocenę najbliższych perspektyw rozwoju omawianych tu zagadnień. Przede wszystkim łatwo można zauważyć, że problematyka ta daleka jest od wyczerpania – zarówno w zakresie metodologii modelowania, jak i praktycznych realizacji odpowiednich symulatorów. Rozwojowi tej dziedziny sprzyja w dalszym ciągu burzliwy rozwój techniki komputerowej: zarówno w zakresie sprzętu, jak oprogramowania. Z drugiej strony poszerza się także rynek wykorzystania technik symulacyjnych w projektowaniu urządzeń, weryfikacji pomysłów, czy też w odniesieniu do pomiaru niedostępnych wielkości. Proces projektowania nowych urządzeń w elektroenergetyce, przemyśle chemicznym, samochodowym i w innych dziedzinach, staje się coraz bardziej pracochłonny ze względu na rosnące wymagania w zakresie ich niezawodności i szybkości działania. Koszty te można obniżyć przez przeniesienie części badań z rzeczywistych obiektów na odpowiednie symulatory. Dotyczy to zresztą także innych dziedzin techniki. W odpowiedzi rosną także wymagania, co do głębokości odtwarzania procesów dynamicznych w analizowanych obiektach. Odnosi się to zwłaszcza do:

- Konieczności pełniejszego uwzględniania zjawisk w analizowanych obiektach. Pomocne tu może być łączenie metod odpowiednich dla analizy obwodów elektrycznych z technikami obliczania zjawisk przestrzennych w materiałach, jak na przykład Metoda Elementów Skończonych (MES) (ang. *Finite Element Method* – FEM). Jest to szczególnie ważne w przypadku analizy maszyn elektrycznych wirujących i transformatorów, układów izolacyjnych lub, ogólnie, badań materiałowych.
- Poszerzenia zakresu wykorzystania wyników symulacji. Łączy się to z koniecznością rozbudowy sprzętowej i programowej omawianych symulatorów w kierunku łatwej generacji zbiorów z wynikami symulacji na zasadzie zmiany określonych parametrów badanego modelu.
- Elastyczności w zakresie przygotowania danych do symulacji oraz tworzenia struktury modelu. Podobne wymagania dotyczą także ułatwienia wykorzystania wyników symulacji.

2. MODELE KLASYCZNEJ MECHANIKI

2.1. Wprowadzenie

Model dynamiczny może reprezentować różnego typu procesy, nie tylko techniczne. Jego podstawy matematyczne zostały sformułowane przez Izaaka Newtona w postaci drugiej zasady dynamiki, zgodnie z którą, siła f działająca na ciało o masie punktowej m , powoduje jego przyspieszenie o wartości a :

$$f = m \cdot a = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad (2.1)$$

co łączy się ze zmianą jego prędkości chwilowej $v(t)$ na drodze $x(t)$. Siła, przyspieszenie, prędkość oraz droga w (2.1) są wektorami, co jest ważne w przypadku wielowymiarowym (z wieloma współrzędnymi).

Genialnym odkryciem twórców rachunku różniczkowego i całkowego (niezależnie od Newtona, sprawą tą zajmował się także G. Leibniz⁶ - co było powodem znanego sporu pomiędzy środowiskami naukowymi Anglii i kontynentu) jest analityczne powiązanie wartości siły ze zmianą prędkości poruszania się ciała i z przebytą w tym czasie drogą. Dalsze rozwinięcie tego odkrycia stało się podstawą tworzenia modeli dynamiki w formie równań różniczkowych i całkowych. Szybko zauważono, że regułę (2.1), która odnosi się do układu mechanicznego, można także stosować do innych układów fizycznych (elektrycznych, chemicznych, biologicznych), czy też systemów z zupełnie innych dziedzin, jak socjologia lub ekonomia. Wspólnym wyróżnikiem takich systemów jest obecność w nich jakiejś formy energii, która pod wpływem wymuszenia zmienia się w inną jej postać. Przykłady układu mechanicznego i elektrycznego są pokazane na rys. 2.1.

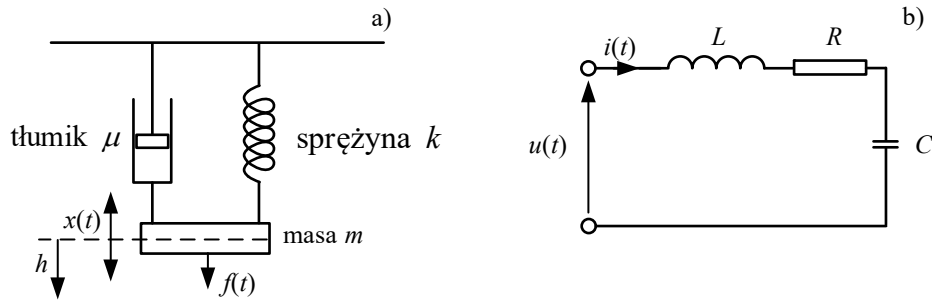
W odniesieniu do układu mechanicznego (rys. 2.1a), można sformułować następującą zależność:

$$f_{\mu}(t) = \mu v(t) = \mu \frac{dx(t)}{dt} \quad - \text{ siła działająca na tłumik o współczynniku tłumienia } \mu,$$

⁶ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) – niemiecki matematyk i filozof; niezależnie od Newtona sformułował zasady rachunku różniczkowego.

$$f_m(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = mg \quad - \text{ siła działająca na masę } m \text{ w związku z przyspieszeniem ziemskim } g,$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df_k(t)}{dt} \quad - \text{ prędkość przesuwania się końca sprężyny o stałej } k.$$



Rys. 2.1. Przykład układu mechanicznego (a) i elektrycznego (b)

W ostatnim przypadku, siła związana z ugięciem sprężyny jest proporcjonalna do wartości tego ugięcia: $f_k(t) = k \cdot x(t) = k \int v(t) dt$. Zakłada się, że w początkowym stanie ustalonym $x = 0$, a masa jest podwieszona na wysokości h .

Sumując trzy siły działające na układ, otrzymamy:

$$f(t) = \mu v(t) + m \frac{dv(t)}{dt} + k \int v(t) dt, \quad (2.2)$$

co także (po obustronnym zrózniczkowaniu) można przedstawić w postaci:

$$m \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \mu \frac{dv(t)}{dt} + k v(t) = 0 \quad (2.3)$$

Jeśli uwzględnić zależność pomiędzy przesunięciem $x(t)$ oraz prędkością $v(t)$, to powyższe równanie można także zapisać w następującej formie:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{\mu}{m} \frac{dx(t)}{dt} - \frac{k}{m} x(t) \quad (2.4)$$

W odniesieniu do elementów układu elektrycznego (rys. 2.1 b) występują następujące zależności (modele):

$$u_R(t) = R i(t) = R \frac{dQ(t)}{dt} \quad - \text{ spadek napięcia na oporniku,}$$

$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ – spadek napięcia na cewce,

$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}$ – prąd przepływający przez kondensator,

$Q(t)$ – ładunek elektryczny.

Na podstawie prawa Kirchhoffa, otrzymamy zatem następujący model matematyczny tego obwodu:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.5)$$

Równanie to można także zapisać w następującej formie:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0 \quad (2.6)$$

lub:
$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{LC} i(t) \quad (2.7)$$

Widać, że w obu przypadkach mamy do czynienia z układami drugiego rzędu, które charakteryzują się możliwością wystąpienia drgań. Przy braku tłumienia ($\mu = 0$ lub $R = 0$), pulsacja tych drgań jest zależna od parametrów charakteryzujących sprężystość k oraz bezwładność m układu: $(\omega_0)^2 = k/m$ (w układzie elektrycznym: $(\omega_0)^2 = 1/LC$).

Charakterystyczną cechą powyższych modeli jest powiązanie dynamiki analizowanego układu z działającą na niego siłą. W przypadku układu elektrycznego, siła jest reprezentowana przez napięcie elektryczne. Przyjęto nazywać je modelami (równaniami) Newtona.

2.2. Równoważność modeli

Analiza układów z rys. 2.1 potwierdza znaną obserwację, że często systemy o bardzo różnej naturze mogą być opisane za pomocą tych samych lub bardzo zbliżonych modeli matematycznych. Ta cecha układów dynamicznych jest szeroko wykorzystywana w teorii systemów i różnych pochodnych dziedzinach, jak teoria sterowania. W odniesieniu do modelowania, ta właściwość pozwala niekiedy na lepsze rozeznanie zachodzących relacji oraz ich zrozumienie. Ważna jest także możliwość stosowania tych samych narzędzi sprzętowych lub programowych do symulacji różnych systemów.

2.2.1. Podstawowy układ mechaniczny

Przykład z rys. 2.1 pozwala sformułować zasady równoważności podstawowego układu mechanicznego o ruchu posuwistym z układem elektrycznym. Ekwiwalenty odpowiednich wielkości i zachodzących między nimi relacji są zebrane w Tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Równoważność układu mechanicznego posuwistego z układem elektrycznym

Układ mechaniczny	Układ elektryczny
siła f (N)	napięcie u (V)
prędkość v (m/s)	prąd i (A)
przesunięcie x (m)	ładunek elektryczny Q ($1C = 1V \cdot 1F$)
masa m (kg)	indukcyjność L (H)
współczynnik sprężystości k (N/m)	odwrotność pojemności $1/C$ (1/F)
współczynnik tłumienia μ (N·s/m)	rezystancja R (Ω)
Podstawowe relacje: masa: $f = m \frac{dv}{dt}$, $f = \frac{dp}{dt}$, $p = mv$ sprężyna: $v = \frac{1}{k} \frac{df}{dt}$, $v = \frac{dx}{dt}$, $f = kx$ tłumik: $f = \mu v$	Podstawowe relacje: cewka: $u = L \frac{di}{dt}$, $u = \frac{d\psi}{dt}$, $\psi = Li$ kondensator: $i = C \frac{du}{dt}$, $i = \frac{dQ}{dt}$, $u = \frac{1}{C} Q$ opornik: $u = Ri$

Należy zauważyć, że wyszczególnione w Tabeli 2.1 relacje są związane z oddzielnymi elementami. Na przykład: w odniesieniu do cewki, prąd i oznacza inną wielkość niż tak samo oznaczony prąd płynący przez kondensator. Niekiedy istnieje pewna swoboda w wyborze sposobu reprezentowania odpowiednich zależności, co jest związane z tym, że energia może być gromadzona w różny sposób. Na przykład, energia mechaniczna sprężyny:

$$E = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{k} f^2, \quad (2.8)$$

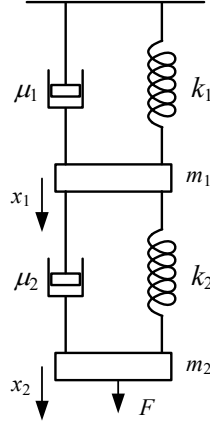
energia elektryczna zgromadzona w kondensatorze lub w cewce:

$$E = \frac{1}{2} Li^2, \quad E = \frac{1}{2} Cu^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 \quad (2.9)$$

Symetria powyższych zależności pozwala tworzyć wzajemnie wymienne modele systemów elektrycznych i mechanicznych, co ilustruje następujący przykład.

Przykład 2.1. Dany jest układ mechaniczny, jak na rys. 2.2. Określić jego model dynamiczny w postaci równań stanu. Przeprowadzić symulację dynamiki układu po wymuszeniu w postaci skoku jednostkowego reprezentującego siłę f . Opracować i zbadać ekwiwalentny obwód elektryczny.

W układzie znajdują się cztery elementy gromadzące energię (dwie sprężyny oraz dwie masy, wobec czego można założyć, że do opisanego jego dynamiki należy sformułować cztery równania stanu.



Rys. 2.2. Analizowany układ mechaniczny

Występują tu cztery elementy gromadzące energię, dla których napiszemy następujące równania różniczkowe:

$$f_{m1} = m_1 \frac{dv_1}{dt}, \quad v_1 = \frac{dx_1}{dt} \quad (\text{w odniesieniu do } m_1, \mu_1 \text{ oraz } k_1),$$

$$f_{m2} = m_2 \frac{dv_{m2}}{dt}, \quad v_2 = \frac{d(x_2 - x_1)}{dt} \quad (\text{w odniesieniu do } \mu_2 \text{ oraz } k_2),$$

gdzie: f_{m1}, f_{m2} – siły związane z ruchem mas m_1 oraz m_2 , v_1 – prędkość przemieszczania x_1 , v_2 – prędkość ruchu μ_2, k_2 , natomiast v_{m2} – prędkość związana z ruchem masy m_2 .

Ponadto:

$$f_{s1} = k_1 x_1, \quad f_{s2} = k_2 (x_2 - x_1), \quad f = f_{m2} + f_{b2} + f_{s2},$$

$$f_{b1} = \mu_1 v_1, \quad f_{b2} = \mu_2 v_2, \quad f_{b2} + f_{s2} = f_{m1} + f_{b1} + f_{s1},$$

gdzie: $f_{s1}, f_{s2}, f_{b1}, f_{b2}$ – siły działające na poszczególne elementy z rys. 2.2; zakłada się, że elementy rozmieszczone równolegle do siebie, przesuwają się na tę samą odległość.

Prowadzi to do następującego układu równań:

$$\frac{dx_2}{dt} = v_{m2}$$

$$\frac{dv_{m2}}{dt} = -\frac{1}{m_2} k_2 (x_2 - x_1) - \frac{1}{m_2} \mu_2 (v_{m2} - v_1) + \frac{1}{m_2} f$$

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{k_2}{m_1} x_2 + \frac{\mu_2}{m_1} v_2 - \frac{k_2}{m_1} x_1 - \frac{\mu_2}{m_1} v_1 - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{\mu_1}{m_1} v_1$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy następujące równania stanu:

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= v_{m2}, \\ \frac{dv_{m2}}{dt} &= -\frac{k_2}{m_2}x_2 - \frac{\mu_2}{m_2}v_{m2} + \frac{k_2}{m_2}x_1 + \frac{\mu_2}{m_2}v_1 + \frac{1}{m_2}f, \\ \frac{dx_1}{dt} &= v_1, \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{k_2}{m_1}x_2 + \frac{\mu_2}{m_1}v_{m2} - \frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 - \frac{\mu_1+\mu_2}{m_1}v_1,\end{aligned}$$

co można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{u},$$

gdzie: $\mathbf{x} = [x_2 \quad v_{m2} \quad x_1 \quad v_1]^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_2/m_2 & -\mu_2/m_2 & k_2/m_2 & \mu_2/m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2/m_1 & \mu_2/m_1 & -(k_1+k_2)/m_1 & -(\mu_1+\mu_2)/m_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [0 \quad 1/M_2 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{u} = f.$$

Równanie stanu w powyższym zapisie może być rozwiązywane numerycznie za pomocą całkowania według metody prostokątów:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k-1) + d\mathbf{x} \cdot T,$$

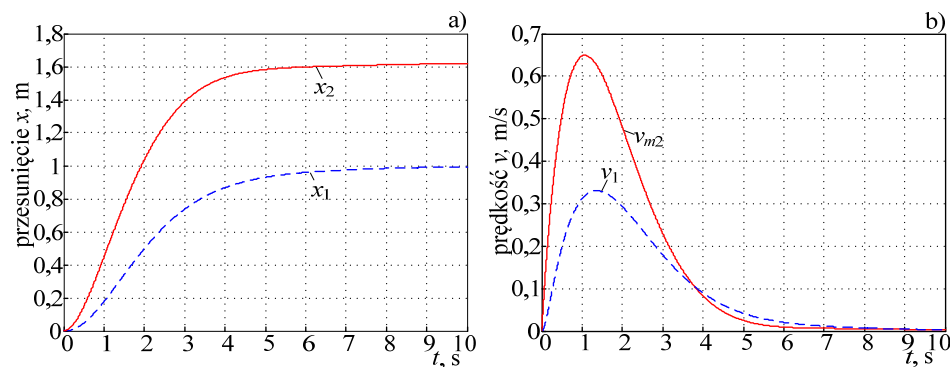
gdzie $d\mathbf{x}$ oznacza wektor pochodnych zmiennych stanu, natomiast T jest krokiem całkowania.

Do rozpoczęcia obliczeń należy określić warunki początkowe w postaci wektora $\mathbf{x}(0)$.

Do obliczeń przyjmujemy następujące parametry układu:

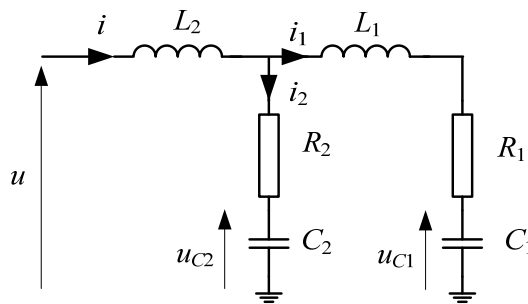
$$m_2 = 3 \text{ kg}, \quad m_1 = 2 \text{ kg}, \quad k_2 = 8 \text{ N/m}, \quad k_1 = 5 \text{ N/m}, \quad \mu_2 = 8 \text{ Ns/m}, \quad \mu_1 = 12 \text{ Ns/m}.$$

Przy zerowych warunkach początkowych oraz wymuszeniu $f = 5 \text{ N}$, dla $T = 0,01 \text{ s}$ otrzymujemy przebieg poszczególnych zmiennych stanu, jak na rys. 2.3.



Rys. 2.3. Wyniki symulacji układu mechanicznego

Widać, że prędkości przemieszczania się mas m_1 oraz m_2 maleją z czasem do zera, podczas gdy przesunięcia x_1 i x_2 dążą do odpowiednich wartości ustalonych. Zważywszy na to, że sprężyna k_1 rozciąga się na długość ok. 1 m, mamy w tym wypadku do czynienia ze sprężynami miękkimi. Elektryczny ekwiwalent układu z rys. 2.2 jest pokazany na rys. 2.4. Uzasadnienie dla takiej postaci schematu można także uzyskać przez porównanie go z układami z rys. 2.1. Pojedynczemu układowi z rys. 2.1 b odpowiada szeregowe połączenie elementów RLC na schemacie elektrycznym. W tym przypadku mamy dwa takie człony mechaniczne, którym na schemacie elektrycznym odpowiadają dwa obwody RLC, połączone, jak na rys. 2.4, gdyż mechaniczemu układowi sprężyna – tłumik odpowiada szeregowe połączenie RC.



Rys. 2.4. Model elektryczny

Zauważmy, że w stanie ustalonym, przy stałej wartości wymuszenia w postaci napięcia u (= siła f), wszystkie prądy przyjmują zerowe wartości (podobnie, jak prędkości v w układzie mechanicznym).

Dla obwodu z rys. 2.4 można napisać następujące równania:

$$u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i_2 + u_{C2}$$

$$R_2 i_2 + u_{C2} = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + u_{C1}$$

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}, \quad i_1 = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}, \quad i = i_1 + i_2$$

W charakterze zmiennych stanu można przyjąć: u_{C2} , i , u_{C1} , i_1 . Po uporządkowaniu powyższych równań, otrzymamy:

$$\frac{du_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i - \frac{1}{C_2} i_1,$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i + \frac{R_2}{L_2} i_1 - \frac{1}{L_2} u_{C2} + \frac{1}{L_2} u,$$

$$\frac{du_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} i_1,$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{R_2}{L_1}i - \frac{R_1 + R_2}{L_1}i_1 + \frac{1}{L_1}u_{C2} - \frac{1}{L_1}u_{C1},$$

co można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

gdzie:

$$\mathbf{x} = [u_{C2} \quad i \quad u_{C1} \quad i_1]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C_2 & 0 & -1/C_2 \\ -1/L_2 & -R_2/L_2 & 0 & R_2/L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/C_1 \\ 1/L_1 & R_2/L_1 & -1/L_1 & -(R_1 + R_2)/L_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [0 \quad 1/L_2 \quad 0 \quad 0]^T, \quad u = u.$$

Do obliczeń przyjmujemy parametry obwodu, odpowiadające wielkościom mechanicznym (Tabela 0.1):

$$\begin{aligned} L_2 = m_2 &= 3 \text{ H}, & L_1 = m_1 &= 2 \text{ H}, \\ C_2 = 1/k_2 &= 0,125 \text{ F}, & C_1 = 1/k_1 &= 0,2 \text{ F}, \\ R_2 = b_2 &= 8 \Omega, & R_1 = b_1 &= 12 \Omega, \\ u = f &= 5 \text{ V}. \end{aligned}$$

W takim przypadku, przy zerowych warunkach początkowych oraz wymuszenia $u = f = 5 \text{ V}$, dla $T = 0,01 \text{ s}$ powinniśmy otrzymać przebiegi analogiczne, jak na rys. 0.3. Tak jest istotnie w przypadku zmiennych i , i_1 , które odwzorowują w układzie mechanicznym prędkości v_{m2} , v_1 przemieszczania się mas m_2 , m_1 (rys. 2.3b). Przesunięcia x są reprezentowane w obwodzie elektrycznym przez ładunki zgromadzone na kondensatorach C_2 oraz C_1 . Obliczenie tych ładunków wymaga pomnożenia napięć u_{C2} , u_{C1} przez pojemności kondensatorów, odpowiednio C_2 oraz C_1 :

$$Q_2 = C_2 u_{C2}, \quad Q_1 = C_1 u_{C1}.$$

Zachodzą tu następujące zależności w odniesieniu do przesunięć:

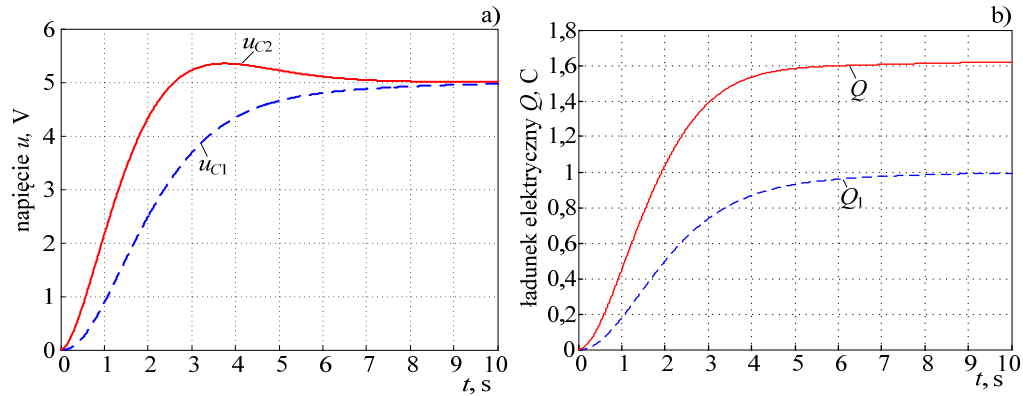
$x_1 \leftrightarrow Q_1$, natomiast $x_2 \leftrightarrow Q = Q_1 + Q_2$. Ostatecznie, wyniki symulacji powyższego obwodu elektrycznego, mogą być przeliczone na odpowiadające im wielkości w układzie mechanicznym, na podstawie następującego równania wyjść:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

gdzie:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} Q \\ i \\ Q_1 \\ i_1 \end{bmatrix}.$$

Wyniki przeprowadzonych obliczeń są pokazane na rys. 2.5. Napięcia u_{C2} , u_{C1} (rys. 2.5a) są współrzędnymi wektora stanu \mathbf{x} , natomiast ładunki Q , Q_1 (rys. 2.5b) są elementami wektora \mathbf{y} . Łatwo zauważyć, że przebiegi tych ostatnich odpowiadają przesunięciom z rys. 2.3a.



Rys. 2.5. Wyniki symulacji układu elektrycznego

Analizując równania obu układów: mechanicznego i elektrycznego z przykładu 2.1 widać, że prowadzą one do takich samych modeli matematycznych. Ich wspólną cechą, poza równoważnymi zapisami dynamiki poszczególnych elementów, jest także równoważność praw sieciowych (związanych z odpowiednimi grafami sieci). Na schemacie elektrycznym bez trudu znajdziemy oczka, dla których musi być spełniona równowaga napięć i podobnie węzły, w których musi zachodzić równowaga prądów. Podobne zależności obowiązują w odniesieniu do układów mechanicznych. Zasady te widać wyraźnie, jeśli zauważymy, że zgodnie z Tabelą 2.1, zachodzą następujące równoważności: napięcie \leftrightarrow siła, prąd \leftrightarrow szybkość przemieszczenia. Zgodnie z tym, równoległemu połączeniu sprężyny z tłumikiem, na schemacie elektrycznym odpowiada szeregowe połączenie opornika z kondensatorem. Z kolei, siła f_1 przekazywana do masy m_1 pełni tę samą funkcję, co siła f działająca na masę m_2 .

2.2.2. Układ mechaniczny wirujący

Podobne relacje podobieństwa można wyprowadzić także pomiędzy układem mechanicznym obrotowym i obwodem elektrycznym [40]. Podstawowe równanie równowagi mechanicznej obracającego się wirnika jest następujące:

$$J \frac{d\omega}{dt} + \mu\omega = M_e - M_m, \quad (2.10)$$

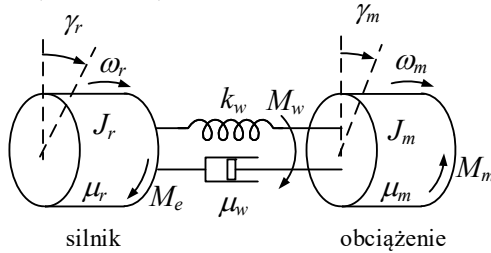
gdzie: J – moment bezwładności obracającego się układu ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$), μ – współczynnik tłumienia obrotów ($\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$), ω – prędkość kątowa (rad/s), M_e – moment napędowy ($\text{N}\cdot\text{m}$), M_m – moment obciążenia ($\text{N}\cdot\text{m}$).

W napędach elektrycznych, moment napędowy M_e pochodzi od silnika elektrycznego i można go określić za pomocą wielkości elektrycznych (moment elektromagnetyczny), natomiast moment obciążenia M_m jest związany z obciążeniem mechanicznym napędzanego układu. Połączenie dwóch obracających się układów za pomocą

sprężła elastycznego z tłumieniem, przez które jest przekazywany moment M_w , jest pokazane na rys. 2.6. Równanie odwzorowujące dynamikę sprężła ma następującą postać:

$$\mu_w \frac{d(\gamma_r - \gamma_m)}{dt} + k_w (\gamma_r - \gamma_m) = M_w, \quad (2.11)$$

gdzie: k_w – współczynnik sprężystości skrętu ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$), μ_w – współczynnik tłumienia skrętu ($\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$).



Rys. 2.6. Schemat układu obrotowego ze sprężem elastycznym z tłumieniem

Na podstawie podobnych równań dynamiki ruchu obrotowego i ich odwzorowania w układzie elektrycznym, można utworzyć zbiór równoważnych relacji, które są zebrane w Tabeli 2.2. Zakładając, że znane są momenty M_e , M_m oraz pozostałe parametry układu z rys 2.6, jego dynamika może być opisana za pomocą następujących równań:

$$\begin{aligned} J_r \frac{d^2 \gamma_r}{dt^2} + \mu_r \frac{d\gamma_r}{dt} &= M_e - M_w, \\ J_m \frac{d^2 \gamma_m}{dt^2} + \mu_m \frac{d\gamma_m}{dt} &= M_w - M_m, \end{aligned} \quad (2.12)$$

gdzie M_w – jak w (2.11).

Tabela 2.2. Równoważność modeli układu obrotowego z układem elektrycznym

Układ mechaniczny obrotowy	Układ elektryczny
moment inercji J ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)	pojemność C (F)
moment obrotowy M ($\text{N}\cdot\text{m}$)	prąd i (A)
prędkość kątowa ω (rad/s)	napięcie u (V)
przesunięcie kątowe γ (rad)	strumień magnetyczny ψ (Vs)
współczynnik sprężystości k ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$)	odwrotność indukcyjności $1/L$ (1/H)
współczynnik tłumienia skrętu μ ($\text{N}\cdot\text{m s}/\text{rad}$)	przewodność $1/R$ ($\text{S} = 1/\Omega$)
Podstawowe relacje:	Podstawowe relacje:
moment inercji: $M = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2 \gamma}{dt^2}$, $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$	kondensator: $i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d^2 \psi}{dt^2}$, $u = \frac{d\psi}{dt}$
sprężyna skrętna $M = k\gamma$	cewka: $i = \frac{1}{L} \psi$
tłumik skrętu: $M = \mu\omega = \mu \frac{d\gamma}{dt}$	przewodność $i = \frac{1}{R} u = \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt}$

Pierwsze równanie odzwierciedla równowagę momentów: napędowego (M_e) z momentami: inercji, oporów ruchu, a także momentem przekazywanym do obciążenia poprzez sprzęgło elastyczne (M_w). W drugim równaniu zapisana jest równowaga momentów inercji i oporów ruchu napędzanego układu (lewa strona równania) z momentem przekazywanym przez sprzęgło (M_w) i momentem obciążenia (M_m).

Równania (2.12), po uporządkowaniu i uwzględnieniu niektórych zależności z Tabeli 2.2, można zapisać w postaci równań stanu, co sprowadza się do ich przedstawienia w postaci układu równań pierwszego rzędu w następującej formie:

$$\begin{aligned} J_r \frac{d\omega_r}{dt} + \mu_r \omega_r + \mu_w (\omega_r - \omega_m) + k_w (\gamma_r - \gamma_m) &= M_e \\ \frac{d\gamma_r}{dt} &= \omega_r \\ J_m \frac{d\omega_m}{dt} + \mu_m \omega_m - \mu_w (\omega_r - \omega_m) - k_w (\gamma_r - \gamma_m) &= -M_m \\ \frac{d\gamma_m}{dt} &= \omega_m \end{aligned} \quad (2.13)$$

co można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

gdzie: $\mathbf{x} = [\omega_r \quad \gamma_r \quad \omega_m \quad \gamma_m]^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_r + \mu_w}{J_r} & -\frac{k_w}{J_r} & \frac{\mu_w}{J_r} & \frac{k_w}{J_r} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_w}{J_m} & \frac{k_w}{J_m} & -\frac{\mu_m + \mu_w}{J_m} & -\frac{k_w}{J_m} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = [M_e / J_r \quad 0 \quad -M_m / J_m \quad 0]^T.$$

Istotną cechą modelu (2.12) jest, w ogólnym przypadku, nieliniowa zależność jego parametrów od zmiennych procesu (stanu). W uproszczonym podejściu zakłada się tylko nieliniowe zależności dla momentu silnika M_e oraz momentu obciążenia M_m :

$$\begin{aligned} M_e &= M_e(\omega_r, \gamma_r, p_r), \\ M_m &= M_m(\omega_m, \gamma_m, p_m), \end{aligned} \quad (2.15)$$

gdzie: p_r, p_m – zmienne zewnętrzne, związane z układem sterowania całym napędem.

Wspomniane nieliniowości rodzą dodatkowe problemy związane z rozwiązywaniem równań (2.12), jak również ze stabilnością całego modelu. Szczegółowa analiza tych zagadnień jest przedmiotem zainteresowania teorii układów napędowych [16, 32]. W celu ilustracji powyższych zależności, rozważmy następujący przykład obliczeniowy.

Przykład 2.2.

Przeprowadzić analizę układu napędowego, jak na rys. 2.6 z następującymi parametrami: stała inercji silnika $H_r = 0,84$ s, moment bezwładności obciążenia $J_m = 28$ kg·m², moc znamionowa silnika $P_n = 420$ KM przy znamionowej prędkości obrotowej $n = 1465$ obr/min oraz $\cos\varphi = 0,86$, współczynniki tłumienia: $\mu_r = 0,05$ N·m s/rad, $\mu_m = 0,045$ N·m s/rad, współczynnik sprężystości sprzęgła: $k_w = 3000$ N·m/rad, współczynnik tłumienia sprzęgła przy skręcaniu: $\mu_w = 3500$ N·m s/rad.

Przyjąć zerowe warunki początkowe. Założyć, że moment napędowy silnika może być przybliżony za pomocą wzoru Klossa [16]:

$$M_e = \frac{2 p_M M_{en}}{s / s_k + s_k / s}, \text{ gdzie: } M_{en} - \text{moment znamionowy, } s = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1} - \text{po-}$$

ślizg, s_k – poślizg przy największej wartości momentu $M_e = M_{ek}$:

$$s_k = s_n \left(p_M + \sqrt{p_M^2 - 1} \right), s_n - \text{poślizg przy znamionowym obciążeniu, } p_M -$$

przeciążalność momentem: $p_M = M_{ek} / M_{en} = 2,14$.

Założyć, że moment obciążenia jest określony za pomocą następującej zależności: $M_m = M_{m0} \left((\omega / \omega_1) (1 + k_M (\omega / \omega_1)^2) \right)$, $M_{m0} = 720,0$ N·m,

$$k_M = 1,564.$$

W celu stosowania wzoru Klossa, należy wyznaczyć podstawowe parametry silnika. Zauważmy, że zarówno moc silnika, jak i jego bezwładność została podana w jednostkach różnych od tych, stosowanych w Tabeli 2.2 (jednostki SI). Jednostki te są bardzo często stosowane w odniesieniu do napędów elektrycznych. Należy je zatem przeliczyć do jednostek SI. W odniesieniu do mocy silnika, zachodzi następująca relacja [40]:

$$1 \text{ KM} = 0,73549875 \text{ kW (dla } g = 9,80665 \text{ m/s}^2\text{)}.$$

Na tej podstawie możemy obliczyć znamionowy moment napędowy:

$$M_{en} = \frac{P_n}{\omega_r} = \frac{7023,4 P_n (\text{KM})}{n} = \frac{9549,3 P_n (\text{kW})}{n} = \frac{7023,4 \cdot 420}{1465} = 2013,5 \text{ N·m},$$

n – znamionowa prędkość obrotowa (obr/min).

$$\text{Wartość poślizgu znamionowego wynika z prędkości znamionowej: } s_n = \frac{1500 - 1465}{1500} = 0,0233.$$

Poślizg odpowiadający maksymalnemu (krytycznemu) momentowi wynosi:

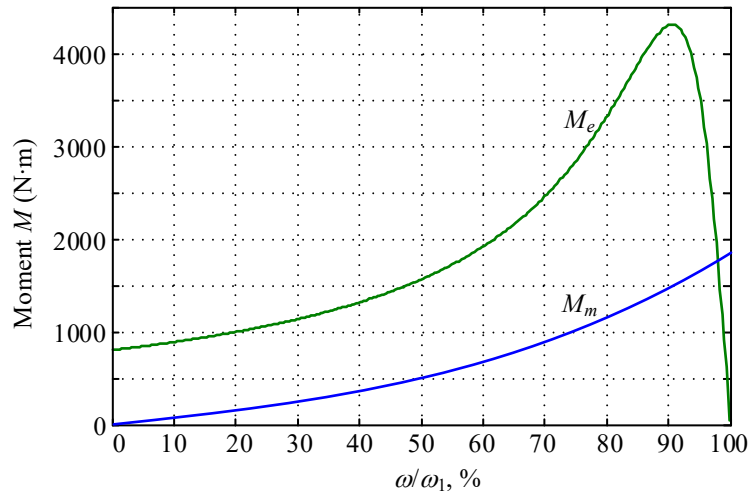
$$s_k = s_n \left(p_M + \sqrt{p_M^2 - 1} \right) = 0,0941.$$

Korzystając z podanych wzorów, można określić charakterystyki momentów silnika i obciążenia (rys. 2.7). Punkt przecięcia obu charakterystyk określa równowagę tego układu napędowego (na wykresie nie uwzględniono tłumienia w obracających się elementach układu).

Występująca w danych stała inercji H jest często stosowana w napędach elektrycznych (zwłaszcza w przypadku dużych generatorów elektroenergetycznych). Jest ona związana z czasem rozruchu (wybiegu) τ_m maszyny od zera do prędkości znamionowej przy znamionowej mocy jednostki:

$$\tau_m = 2H,$$

a więc stała H jest połową czasu rozruchu w warunkach znamionowych.



Rys. 2.7. Przebiegi momentów: silnika M_e oraz obciążenia M_m .

Stała inercji (bezwładności) H łączy się, więc z wielkościami określonymi w jednostkach układu SI za pomocą następującej relacji:

$$H_r = \frac{E_n}{S_r} \left(\frac{\text{MW} \cdot \text{s}}{\text{MVA}} \right) = \frac{5,4831 J_r n^2}{S_r} \times 10^{-9} \left(\frac{\text{MW} \cdot \text{s}}{\text{MVA}} \right), \text{ gdzie: } E_n = \frac{1}{2} J_r \omega_r^2 \times 10^{-6} (\text{MW} \cdot \text{s}) \text{ jest}$$

energiją potencjalną zgromadzoną w wirującej masie o momencie bezwładności J_r i prędkości kątowej ω_r , $S_n = \frac{P_n(\text{kM})}{\cos \varphi} \times 1,3596 \times 10^{-3} (\text{MVA})$ jest znamionową mocą pozorną silnika ($S_n = S_r$).

Wynika stąd następująca zależność:

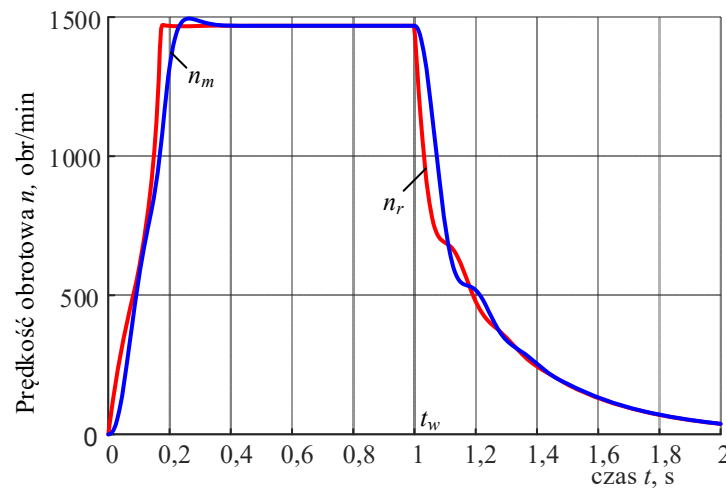
$$J_r = \frac{2,47966 \cdot H_r \cdot P_n(\text{kM})}{n^2 \cos \varphi} \times 10^5 = \frac{2,47966 \cdot 0,84 \cdot 420}{1460^2 \cdot 0,86} \times 10^5 = 47,72 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Pozostałe wielkości są znane, więc można przystąpić do symulacji układu na podstawie równania (2.14). Tym razem mamy do czynienia z układem równań różniczkowych ze zmiennym wymuszeniem, więc należy zastosować bardziej dokładną procedurę, w miejsce tej, stosowanej w przykładzie 2.1. Skorzystamy z procedury `ode45` w pakiecie Matlab (program `Przykład_2_2.m`). Macierz \mathbf{A} w (2.12) ma stałe parametry, natomiast zmienne są elementy wek-

tora \mathbf{u} , które zależą od wartości momentów: silnika M_e oraz obciążenia M_m . Prawa strona równania różniczkowego (pochodne) jest obliczana w funkcji $f(t, \mathbf{x})$, umieszczonej wewnątrz głównej procedury. Wywołanie głównej procedury rozwiązywania macierzowego równania różniczkowego znajduje się w wierszu:

```
[t x] = ode45(@f,tspan,x0,options); % rozwiązanie równania
```

Wyniki symulacji są umieszczone w zmiennej macierzowej \mathbf{x} . W zamieszczonym programie symulowany jest proces rozruchu układu silnik – obciążenie (w czasie 0 – 80 s) oraz wybieg, po wyzerowaniu momentu napędowego silnika w czasie $t_w = 80$ s. Przebieg zmiany prędkości obrotowej w obu połączonych elementach wirujących jest pokazany na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Przebiegi rozruchu i wybiegu układu

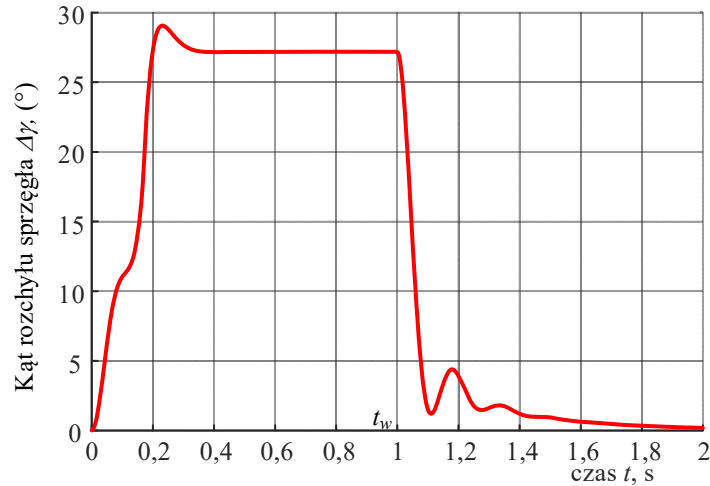
Można zauważyć pewne różnice w przebiegu tych prędkości w stanach przejściowych związanych ze startem lub wybiegiem silnika. Zachowanie się sprzęgła łączącego oba wirujące elementy może być ilustrowane za pomocą przebiegu kąta rozchyłu:

$$\Delta\gamma = \gamma_r - \gamma_m$$

Przebieg zmian tego kąta dla rozważanych parametrów jest pokazany na rys. 2.9. Widać, że skręt sprzęgła osiąga wartość ok. 27 stopni. Sprzęgło wraca do wyjściowej pozycji po zatrzymaniu się napędu. Warto zauważyć, że w pokazanych przebiegach odnoszących się do rozruchu silnika, po czasie ok. 0,4 s napęd uzyskuje prędkość znamionową, która jest bliska prędkości synchronicznej $n_1 = 1500 \text{ obr/min} = 25 \text{ obr/s}$. Oznacza to, że do czasu wyłączenia zasilania $t_w = 1 \text{ s}$, wał napędu wykonuje ok. 20 obrotów.

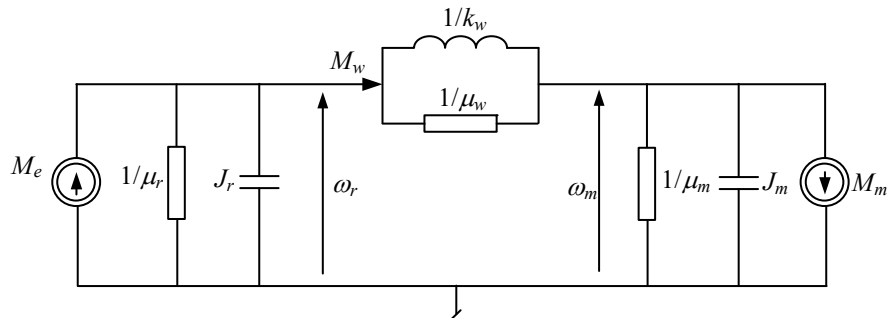
Ilustrowana na rys. 2.9 dynamika sprzęgła zależy od obu parametrów jego modelu (rys. 2.6): współczynnika sztywności sprężyny obrotowej k_w oraz współczynnika tłumienia skrętu μ_w . Należy zwrócić uwagę na istotną różnicę w wartości współczynników, odzwierciedlających opory ruchu silnika i obciążenia (tarcie, opory wentylacyjne) oraz właśnie oporów ruchu elementów sprzęgła. Odtwarzają one odmienne zjawiska w analizowanym obiekcie.

Należy zauważyć, że w rzeczywistym układzie z napędem w postaci silnika elektrycznego, rozruch odnosi się także do stanu przejściowego w sieci zasilającej wraz z silnikiem. W celu odtworzenia takich zjawisk, należy posługiwać się modelem symulacyjnym z bardziej dokładnymi modelami poszczególnych elementów układu, łącznie z siecią zasilającą.



Rys. 2.9. Przebiegi zmian kąta rozchyłu sprzęgła $\Delta\gamma$

Zgodnie z zasadą równoważności, układ z rys. 2.6 może być przedstawiony w postaci obwodu elektrycznego, jak na rys. 2.10. Łatwo dostrzec elektryczne odpowiedniki elementów układu mechanicznego. Wartości poszczególnych elementów należy określić zgodnie z Tabelą 2.2.



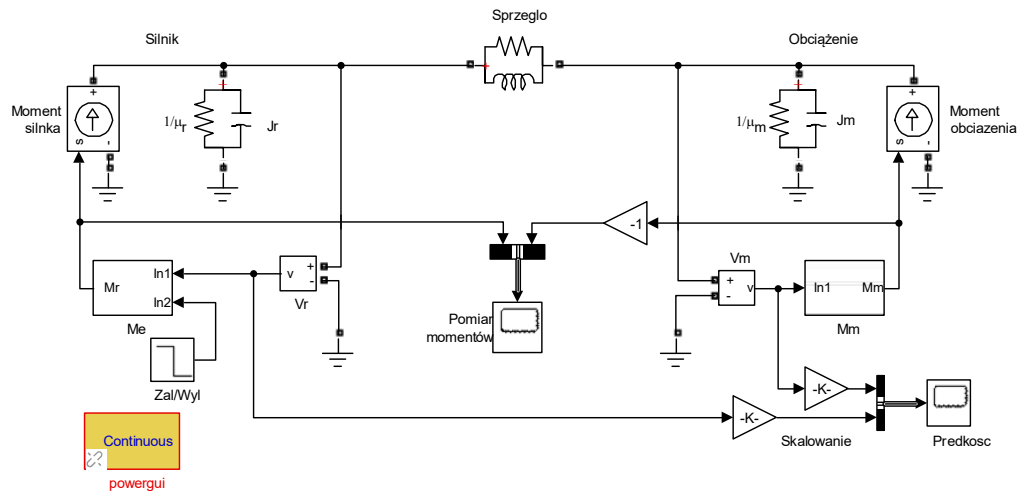
Rys. 2.10. Obwód elektryczny ekwiwalentny układowi z rys. 2.6

Źródła prądowe reprezentują momenty związane z silnikiem i obciążeniem. Należy je przedstawić w postaci źródeł sterowanych zgodnie z funkcjami, jak w przykładzie 2.2. W sumie mamy do czynienia z prostym modelem obwodu prądu stałego ze sterowanymi źródłami prądowymi, które zależą odpowiednio od napięć ω_r oraz ω_m , które reprezentują

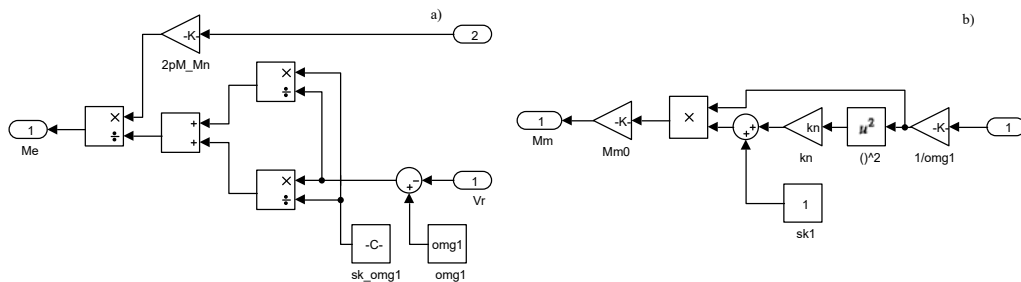
prędkości kątowe silnika i obciążenia. Taka reprezentacja układu mechanicznego jest łatwa do zastosowania w modelach układów elektrycznych, w których rozpatruje się układy napędowe [16]. Kolejny przykład ilustruje zastosowanie do tego celu narzędzia *SimPowerSystems* w programie *Matlab/Simulink*.

Przykład 2.3. Na podstawie danych z przykładu 2.2 opracować model układu napędowego, korzystając z narzędzi *SimPowerSystems* w programie *Matlab/Simulink*. Przyjąć te same dane, jak w przykładzie 2.2.

Schemat modelu jest pokazany na rys. 2.11. Sterowanie źródłami prądowymi, które odwzorowują momenty: silnika oraz obciążenia odbywa się za pośrednictwem bloków *Me* oraz *Mm*. Odbywa się to zgodnie z zależnościami określonymi w przykładzie 2.2 na podstawie zmierzonych wartości prędkości kątowej wirników silnika (ω) oraz obciążenia (ω_m). Wielkości te są w modelu odzwierciedlone za pomocą napięć po obu stronach modelu sprzęgła łączącego oba elementy. Schematy tych bloków są pokazane na rys. 2.12.



Rys. 2.11. Schemat modelu układu napędowego w programie SimPowerSystems



Rys. 2.12. Schematy bloków sterowania źródłami prądowymi do odwzorowania: a) - momentu silnika, b) - momentu obciążenia

Niezbędnym elementem modelu opracowanego w ramach SimPowerSystems jest blok ‘powergui’, w którym określone są warunki początkowe. W górnej części modelu umieszczone są bloki do symulacji wyłączenia silnika (wybieg).

Obliczenia wykonano ze zwiększoną dokładnością: `Relative tolerance = 1.0e-6` (podobnie, jak w przykładzie 2.2). Przedstawiony model jest umieszczony w pliku `Przyklad_2_3_mod.slx`. Model należy uruchamiać z pliku `Przyklad_2_3_start.m`, gdzie zadawane są odpowiednie wartości parametrów modelu oraz symulacji. Uzyskane przebiegi pokrywają się z rezultatami, otrzymanymi w przykładzie 2.2.

2.3. Równania Lagrange’a

W przypadku bardziej złożonych układów, niż te omawiane powyżej, tworzenie i rozwiązywanie ich modeli matematycznych (modeli dynamiki) staje się utrudnione. Problem ten był dostrzeżony jeszcze w XVIII wieku przez czołowych matematyków tamtych czasów (L. Euler⁷, J. d’Alembert⁸, J. Lagrange⁹), szczególnie w odniesieniu do układów mechanicznych. W wyniku ich badań powstała nowa obszerna dziedzina fizyki klasycznej, którą przyjęto nazywać mechaniką analityczną. Z czasem poszerzył się obszar jej stosowania. Opracowany został zestaw narzędzi teoretycznych do opisu i analizy złożonych układów dynamicznych, składających się na tzw. *formalizm Lagrange’a*. Poniżej prezentowane są podstawowe założenia teoretyczne i niektóre środki praktyczne związane z tworzeniem modeli Lagrange’a w odniesieniu do układów mechanicznych i obwodów elektrycznych. Czytelnik może łatwo uzupełnić tę wiedzę na podstawie dostępnej literatury [2], [3], [35], [42].

2.3.1. Pojęcia podstawowe

Równania Lagrange’a były wyprowadzane i pierwotnie stosowane w odniesieniu do układów mechanicznych. Niezależnie więc od obszaru zastosowań tych równań, związana z nimi zasadnicza terminologia odnosi się do układów mechanicznych. Poniżej podane są podstawowe określenia stosowane w tym kontekście.

Przestrzeń konfiguracyjna układu utworzonego przez n punktów materialnych jest określona przez $3n$ współrzędnych przestrzeni trójwymiarowej, określających położenie tych punktów, co można przedstawić następującym wektorem: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{3n}]^T$.

⁷ Leonhard Euler (1707 – 1783) – wybitny matematyk szwajcarski; osiągnięcia w zakresie analizy matematycznej, mechaniki, optyki i astronomii.

⁸ Jean le Rond d’Alembert (1717 – 1783) – matematyk, fizyk i filozof francuski; prace z zakresu mechaniki; sformułował rachunek pochodnych cząstkowych.

⁹ Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) – matematyk i astronom włosko-francuski; prace z zakresu mechaniki (mechanika analityczna), rachunku prawdopodobieństwa, analizy matematycznej.

Na przykład, równania ruchu układu złożonego z n punktów w przestrzeni konfiguracyjnej przyjmą następującą postać:

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = f_j, j = 3i - l, i = 1, 2, \dots, n, l = 2, 1, 0, \quad (2.16)$$

gdzie: m_j, f_j reprezentują, odpowiednio, masę i -tego punktu oraz działającą na niego siłę, przy czym: $m_i = m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i}, i = 1, 2, \dots, n$; indeks l odnosi się do wymiaru przestrzeni 3-wymiarowej, tradycyjnie oznaczanej współrzędnymi (x, y, z) .

W ten sposób, położenie każdego z n punktów układu jest opisane przez 3 współrzędne przestrzenne, co w efekcie tworzy przestrzeń konfiguracyjną o $3n$ współrzędnych.

W ogólnym przypadku, równanie dynamiki układu, może być ograniczone więzami o liczbie p , które są zdefiniowane przez następujące funkcje:

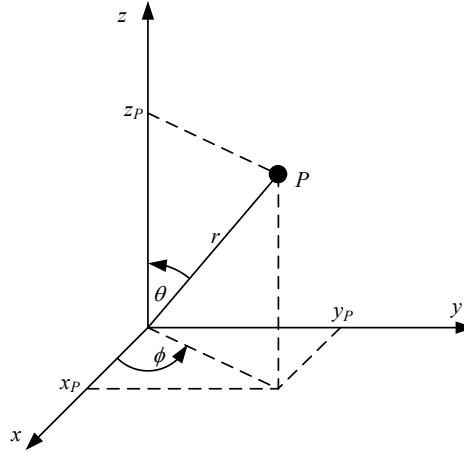
$$f_k(\mathbf{x}, t) = f_k(x_1, x_2, \dots, x_{3n}, t) = 0, k = 1, 2, \dots, p \quad (2.17)$$

Więzy określone przez (2.17) ograniczają ruch poszczególnych punktów układu, redukując swobodę ruchu do s stopni swobody:

$$s = 3n - p \quad (2.18)$$

Widać, że liczba *stopni swobody* analizowanego systemu zależy od liczby współrzędnych użytych do jego opisu oraz od liczby ograniczeń (więzów) definiujących sposób poruszania się opisywanych obiektów w tym układzie współrzędnych. Równania więzów w formie (2.17) tworzą tzw. *więzy holonomiczne*; inne formy tych równań (gdy np. znak '=' jest zamieniony na znak '≥') prowadzą do tzw. *więzów nie-holonomicznych*. Zauważmy, że znak równości oznacza, że więzy są 'sztywne'.

Współrzędne użyte w (2.16) są nazywane współrzędnymi kartezjańskimi, które są definiowane w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. W praktyce, używane są różne układy współrzędnych, które łączą się za pomocą odpowiedniej procedury transformacji układów współrzędnych. Rysunek 2.13 ilustruje sferyczny układ współrzędnych i jego powiązanie z układem kartezjańskim: $P(x, y, z) \leftrightarrow P(r, \theta, \phi)$.



Rys. 2.13. Współrzędne punktu w kartezjańskim i sferycznym układzie współrzędnych

Przejście z układu współrzędnych sferycznych do współrzędnych kartezjańskich odbywa się za pomocą następującej transformacji:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.19)$$

Łatwo sprawdzić, że odwrotna transformacja ma następującą postać:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arccos \frac{z}{r} \\ \phi &= \arctg \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Zauważmy, że przy eliminacji współrzędnej z ($z = 0$, punkt porusza się po płaszczyźnie xy), układ współrzędnych sferycznych redukuje się do układu współrzędnych biegunowych (r, ϕ) .

Pojęcie stopni swobody systemu ma bardzo praktyczne znaczenie, gdyż, jak widać z (2.18), przy istnieniu ograniczeń, liczba stopni swobody jest mniejsza od liczby współrzędnych, za pomocą których opisywana jest dynamika systemu. W rzeczywistości, bez utraty jakichkolwiek szczegółów, dynamika systemu może być zapisana w układzie współrzędnych zredukowanych do liczby stopni swobody. Jest to równoważne określeniu, że liczba stopni swobody jest równa liczbie równań koniecznych do

opisania ruchu układu. W ten sposób tworzy się układ *współrzędnych uogólnionych* $(q_1, q_2, \dots, q_s) = (q_j), j = 1, 2, \dots, s$, który można traktować jako podzbiór układu współrzędnych początkowych (nie-uogólnionych, np. współrzędnych przestrzeni konfiguracyjnej $(x_1, x_2, \dots, x_{3n})$). Zachodzi przy tym następująca relacja:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_s), i = 1, 2, \dots, s \quad (2.21)$$

Pozostałe współrzędne $(x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{3n})$ przyjmują wówczas stałe wartości. Na przykład, w przypadku rozważanego powyżej układu współrzędnych sferycznych, ograniczonego do współrzędnych biegunowych, otrzymamy: $q_1 = x, q_2 = y, z = 0$. W ogólnym przypadku, zestaw współrzędnych uogólnionych można wybrać według dowolnej zasady, pod warunkiem, że będzie on w sposób jednoznaczny opisywał stan układu – nie jest to zatem wybór jednoznaczny. Z tych rozważań wynika wniosek, że liczba współrzędnych wymaganych do opisu systemu zależy od jego właściwości, a nie od sposobu jego opisu. Niestety, ujemną stroną tego spostrzeżenia jest brak jednoznacznej procedury wyboru układu współrzędnych uogólnionych, które zapewniałyby ‘lepszy’ opis układu [35].

Podobnie do pojęcia współrzędnych uogólnionych, mogą być także definiowane inne wielkości; np. zapis: $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s) = (\dot{q}_j), j = 1, 2, \dots, s$, oznacza zbiór uogólnionych prędkości.

2.3.2. Formalizm Lagrange’a

Równania Lagrange’a mają postać układu równań różniczkowych II rzędu, opisujących ruch systemu dynamicznego swobodnego (bez wymuszenia) lub z więzami (wymuszeniami), które określają warunki ograniczające przestrzeń poruszania się układu (jego współrzędne lub ich pochodne względem czasu (prędkości)). Równania systemu swobodnego mają następującą postać¹⁰:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.22)$$

gdzie \mathcal{L} oznacza różnicę energii kinetycznej E_k i potencjalnej E_p :

$$\mathcal{L} = E_k - E_p, \quad (2.23)$$

przy czym: $E_k = E_k(q_j, \dot{q}_j, t)$, $E_p = E_p(q_j, t)$ i w konsekwencji otrzymujemy funkcję: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, która jest znana, jako funkcja Lagrange’a (lagrangian). W przypadku więzów ustalonych (niezależnych od czasu), lagrangian także nie zależy od czasu.

¹⁰ Niekiedy mówi się o równaniach Eulera-Lagrange’a, jednak pierwszy sformułował je w takiej formie J. Lagrange.

Zależności (2.22) opisują ruch systemu zachowawczego (konserwatywnego), który charakteryzuje się tym, że wykonana praca nie zależy od drogi, a działanie to jest w pełni odwracalne. Wynika stąd, że praca wykonana na drodze zamkniętej pod wpływem sił zachowawczych, jest równa zeru, na przykład, praca wykonana w polu grawitacyjnym lub elektrycznym. W układzie nie występują elementy rozpraszające (pochłaniające) energię.

Równania Lagrange'a (2.22) odnoszą się do energii kinetycznej i potencjalnej rozpatrywanego punktu (układu) materialnego. Zależność ta została wyprowadzona przez odpowiednie przekształcenie równań odnoszących się do siły (równań Newtona). Pokazuje to kolejny przykład.

Przykład 2.4. Rozpatruje się przestrzeń jednowymiarową w ziemskim polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g . Korzystając z zasady zachowania energii i drugiej zasady dynamiki Newtona wyprowadzić funkcję Lagrange'a dla punktu materialnego o masie m .

Założmy, że rozpatrywany punkt zmienia położenie (wysokość) x pod wpływem grawitacji ze stałą g , powodując zmianę prędkości v , z przyspieszeniem a . Równowaga działających tu sił określona jest zgodnie z następującym równaniem:

$$-mg = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (2.24)$$

co prowadzi do następującego związku:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + mg = 0 \quad (2.25)$$

W rozpatrywanym procesie następuje zamiana energii potencjalnej E_p na energię kinetyczną E_k spadającego ciała, przy czym:

$$\begin{aligned} E_p &= E_p(x) = mgx, \\ E_k &= E_k(v) = \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Zauważmy, że energia potencjalna E_p nie zależy od prędkości, więc: $\partial E_p / \partial v = 0$. Podobnie, energia kinetyczna E_k nie zależy od przesunięcia (wysokości), skąd: $\partial E_k / \partial x = 0$.

Na podstawie (2.26) można określić lagrangian:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, v) = E_k(v) - E_p(x) = \frac{1}{2}mv^2 - mgx \quad (2.27)$$

Równanie Lagrange'a (2.22) przyjmuje w tym przypadku następującą postać ($s = 1$):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dv} \left(\frac{1}{2}mv^2 - mgx \right) \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}mv^2 - mgx \right) = 0 \quad (2.28)$$

Po wyznaczeniu poszczególnych pochodnych, otrzymujemy zależność (2.25), co potwierdza poprawność wywodu. Ostatecznie, lagrangian rozpatrywanego układu dynamicznego ma postać, jak w (2.27).

Istotna różnica pomiędzy klasycznymi równaniami różniczkowymi opisującymi ruch układu dynamicznego (równaniami Newtona), a równaniami Lagrange'a polega na tym, że w tych ostatnich nie występuje siła i związane z nią pojęcia, jak równowaga sił, siły reakcji. Jej miejsce zajmuje energia w postaci kinetycznej i potencjalnej, których różnica definiuje funkcję Lagrange'a $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$. Takie ujęcie dynamiki układu jest nazywane formalizmem Lagrange'a. Często przytacza się powody stosowania reprezentacji dynamiki systemu w postaci równań Lagrange'a, w miejsce bezpośrednich równań Newtona, wśród których można wymienić: - pozbycie się zapisu wektorowego (który jest związany z siłami) i zastąpienie go reprezentacją skalarną; - bezpośrednie użycie notacji, która jest charakterystyczna dla robotyki; - formalizm Lagrange'a pozwala zazwyczaj tworzyć prostszy zapis dynamiki złożonych systemów.

Równanie Lagrange'a w postaci (2.22) odnosi się do układów zachowawczych bezstratnych (bez 'tarcia'). Jeśli rozpatruje się działanie zewnętrznych sił na układ, a także występowanie elementów rozpraszających nieodwracalnie energię (tarcie, grzanie, promieniowanie itp.), to otrzymamy następującą postać równań (2.22):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.29)$$

gdzie f_j oznacza siłę związaną z rozpraszaniem energii oraz wymuszeniem zewnętrznym; zazwyczaj przyjmuje się, że siła związana z rozpraszaniem energii jest proporcjonalna do prędkości układu (liniowej lub kątowej):

$$f_j = f_{zj} - \mu_j \dot{q}_j, \quad (2.30)$$

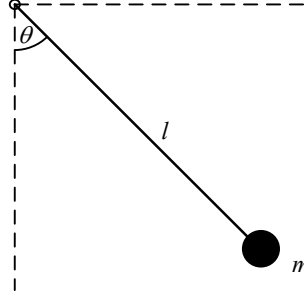
gdzie: f_{zj} jest zewnętrzną siłą wymuszającą, a μ jest współczynnikiem rozpraszania energii (tarcia). W miejsce siły związanej z rozpraszaniem energii można operować energią strat (rozpraszania), E_μ :

$$\frac{\partial E_\mu}{\partial \dot{q}_j} = \mu_j \dot{q}_j, \quad (2.31)$$

skąd:

$$E_\mu = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 \quad (2.32)$$

Przykład 2.5. Wyprowadzić równanie Lagrange'a ruchu wahadła (rys. 2.14). Przyjąć, że ruch wahadła jest tłumiony zgodnie z (2.31) ze współczynnikiem μ .



Rys. 2.14. Ruch płaski wahadła

Przy założonej stałej długości wahadła l , rozpatrywany układ ma jeden stopień swobody związany ze współrzędną określającą kąt położenia θ . Energie składające się na funkcję Lagrange'a są określone podobnie, jak w Przykładzie 2.4 (2.26), gdzie x oznacz wysokość punktu materialnego ponad jego dolne położenie. Zatem, otrzymamy:

$$E_p = E_p(x) = -mgx, \text{ skąd: } E_p(\theta) = -mgl \cos \theta$$

$$E_k = E_k(v) = \frac{1}{2}mv^2, \text{ skąd: } E_k(\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \text{ przy czym: } v = \omega l, \omega = \dot{\theta}.$$

Funkcja Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = E_k(\dot{\theta}) - E_p(\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta,$$

skąd można określić pochodne:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta$$

Ostatecznie, równanie ruchu wahadła zgodnie z formalizmem Lagrange'a przyjmuje następującą postać (po uwzględnieniu (2.31)):

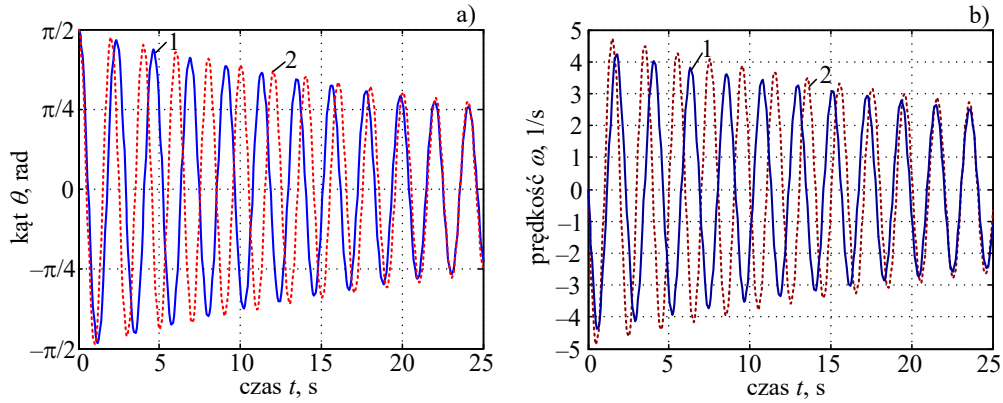
$$ml^2\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0,$$

co można zapisać za pomocą równań stanu:

$$\dot{x}_2 = -\frac{\mu}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

W tym ostatnim zapisie zmienna x_1 oznacza kąt wychylenia wahadła θ , natomiast x_2 reprezentuje prędkość kątową ω . Przy małych wychyleniach wahadła można założyć, że $x_1 \approx \sin x_1$, co prowadzi do liniowego modelu. Łączące się z tym rozbieżności można prześledzić na rys. 2.15. gdzie pokazano przebiegi kąta wychylenia wahadła (rys. 2.15a) oraz zmianę prędkości kątowej (rys. 2.15b). Krzywe 1 odpowiadają pełnemu modelowi nieliniowemu, natomiast przebiegi 2 pokazują dynamikę uproszczonego modelu liniowego. Widać, że wyniki symulacji znacznie się różnią przy dużych wychyleniach wahadła, natomiast są bardzo podobne dla kąta wychylenia mniejszego od wartości $\pi/4$.



Rys. 2.15. Zmiana kąta położenia (a) oraz prędkości kątowej (b) wahadła; 1 – obliczenia dla wahadła nieliniowego, 2 – rezultaty dla modelu liniowego

Obliczenia zostały przeprowadzone przy następujących parametrach modelu wahadła: $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $g = 9,8067$ m/s², $\mu = 0,1$ N·m·s/rad.

2.4. Modele Hamiltona

Pojęcie współrzędnych uogólnionych w postaci położenia (q_j) oraz prędkości (\dot{q}_j) może być rozszerzone na pędy uogólnione (p_j)¹¹: $(p_1, p_2, \dots, p_m) = (p_j)$, $j = 1, 2, \dots, s$. Opis dynamiki układu w odniesieniu do pędu poszczególnych jego elementów, łączy się więc z użyciem $2s$ współrzędnych uogólnionych: s współrzędnych położenia oraz s uogólnionych współrzędnych pędu: $(q_1, q_2, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_s)$, przy czym, te grupy współrzędnych łączą się poprzez następujący związek [2], [42]:

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.33)$$

Równania Lagrange'a mogą być zastąpione przez następujący układ równań różniczkowych pierwszego rzędu o $2s$ współrzędnych uogólnionych, przedstawiających równania Hamiltona [42]:

¹¹ Dla przesunięcia określonego przez współrzędną uogólnioną q , pęd jest wektorem o wartości: $p = mv = m\dot{q}$, natomiast dla obrotu o kąt q , uogólniony pęd ma wymiar momentu pędu: $p = J\omega$, gdzie J – moment bezwładności, ω – prędkość kątowa.

$$\begin{aligned}\dot{p}_j &= -\frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\ \dot{q}_j &= \frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s,\end{aligned}\tag{2.34}$$

gdzie funkcja $\mathcal{H}(p, q) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q}(p, q) - \mathcal{L}(\dot{q}(p, q), q)$ jest nazywana hamiltonianem (funkcją Hamiltona¹²).

Jeśli w układzie odwzorowuje się także straty związane z tarcie, to należy to uwzględnić w pierwszym z rozpatrywanych równań:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial q_j} + f_j, \quad j = 1, 2, \dots, s,\tag{2.35}$$

gdzie f_j , jak w (2.29).

Opis układu za pomocą równań Hamiltona jest równoważny równaniom Lagrange'a, a w konsekwencji, także równaniom Newtona. Ilustruje to następujący przykład.

Przykład 2.6. Opisać dynamikę wahadła z Przykładu 2.5 za pomocą równań Hamiltona. Wyprowadzić odpowiednie zależności i wykonać symulację ruchu wahadła, przyjmując parametry, jak w Przykładzie 2.5, przy założeniu, że długość wahadła wynosi $l = 2$ m.

Funkcja Lagrange'a płaskiego wahadła została określona w Przykładzie 2.5:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

Na podstawie (2.33), pęd punktowej masy m w ruchu obrotowym (moment pędu) można określić następująco:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}$$

Funkcja Hamiltona ma w tym przypadku następującą postać:

$$\mathcal{H}(p, q) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q}(p, q) - \mathcal{L}(\dot{q}(p, q), q) = ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\mathcal{H}(p, q) = \mathcal{H}(p, \theta) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta$$

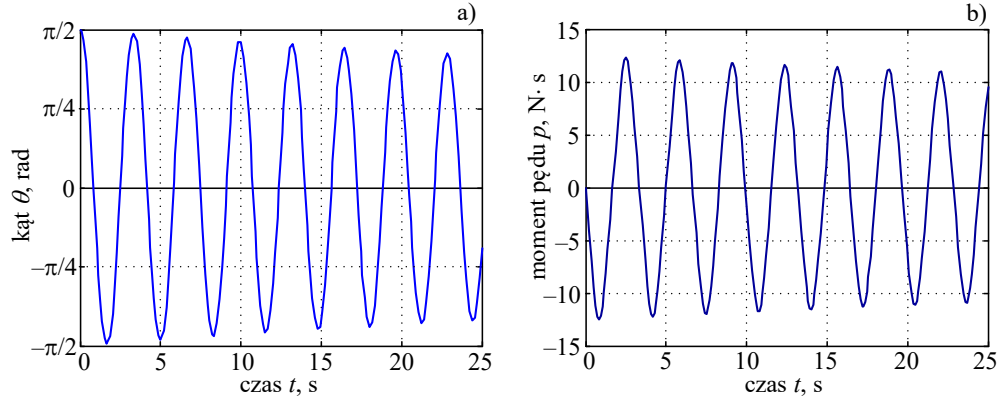
Równania Hamiltona są więc następujące:

¹² William Rowan Hamilton (1805 - 1865) – irlandzki fizyk, matematyk i astronom; podstawy mechaniki klasycznej, opis dynamiki systemów.

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}(p, \theta)}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta - \frac{p}{ml^2} \mu,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}(p, \theta)}{\partial p} = \frac{p}{ml^2}$$

Przebiegi uzyskanych stąd wielkości: prędkości kątowej oraz pędu są pokazane na rys. 2.16.



Rys. 2.16. Zmiana kąta położenia (a) oraz momentu pędu (b) wahadła

Porównując powyższe przebiegi z rezultatami otrzymanymi w Przykładzie 2.5, widać, że tym razem pulsacja drgań jest mniejsza, co jest wynikiem dwukrotnego wydłużenia ramienia wahadła. Również efekt tłumienia ruchu jest tym razem mniejszy, gdyż mniejszy jest udział siły związanej z tarcie (2.31) w stosunku do siły wynikającej ze zwiększonej amplitudy pędu.

Porównując końcowe wzory, reprezentujące w obu powyższych przykładach modele wahadła w postaci równań różniczkowych pierwszego rzędu (Przykład 2.5 oraz Przykład 2.6) widać, że różnią się one wyborem zmiennych stanu. Postępowanie związane z formalizmem Lagrange'a prowadzi do równania różniczkowego drugiego rzędu (2.29), które może być następnie w bardzo różny sposób wyrażone w postaci równań stanu. Formalizm Hamiltona wymaga, aby model dynamiki rozpatrywanego układu był zapisany w postaci ściśle określonych równań stanu (2.34), w których zmiennymi są: przesunięcie oraz pęd.

Równania Hamiltona, opisujące dynamikę układu, są równoważne równaniom Lagrange'a. Należy zauważyć, że bazą równań Hamiltona jest pęd układu, który jest wielkością wektorową, co porządkuje analizę składającą się na 'formalizm Hamiltona'. Równania Lagrange'a oparte są na pojęciu energii (potencjalnej i kinetycznej), natomiast równoważne im równania Newtona bazują na pojęciu siły.

Formalizm Hamiltona stał się podstawą do tworzenia modeli układów dynamicznych zarówno w mechanice klasycznej, jak i w mechanice kwantowej. W jego obrębie powstało wiele twierdzeń, które stały się podstawą współczesnej fizyki, jak słynne

twierdzenie Emmy Noether¹³, które wiąże symetrie (niezmienniczości) praw ruchu z zachowaniem określonych wielkości fizycznych (prawa zachowania) [2], [42]. Na przykład, zasada zachowania energii w systemie izolowanym wynika z niezmienniczości praw fizyki względem przesunięcia w czasie. Podobnie, zasada zachowania pędu jest konsekwencją niezmienniczości względem przesunięcia w przestrzeni.

2.5. Równania Lagrange’a w odniesieniu do obwodów elektrycznych

Obwód elektryczny jest przykładem typowego układu dynamicznego, w którym elektromagnetyczny stan przejściowy jest reprezentowany za pomocą układu równań różniczkowych. Jeśli ograniczymy rozważania do modelu obwodu o stałych skupionych, to zauważymy bezpośrednie odniesienie do omówionych powyżej metod, stosowanych w mechanice analitycznej. Nawiązanie do formalizmu Lagrange’a wymaga określenia w stosunku do obwodu elektrycznego pojęć, stosowanych na gruncie mechaniki, jak: współrzędne, w tym współrzędne uogólnione, stopień swobody, energia kinetyczna, czy też potencjalna. Zagadnienia te były przedmiotem badań w teorii obwodów elektrycznych¹⁴. Analiza ta pokazuje, że w równaniach Lagrange’a wygodnie jest przyjąć w charakterze współrzędnych obwodu elektrycznego ładunki elektryczne związane z prądami płynącymi w poszczególnych gałęziach obwodu lub strumienie elektromagnetyczne odpowiadające napięciom w poszczególnych węzłach sieci, przy czym, liczba takich współrzędnych w obwodzie wynika z ograniczeń nakładanych przez prawa Kirchhoffa [50]. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z analogią do metody prądów oczkowych (metoda oczkowa), a w drugim – do metody potencjałów węzłowych (metoda węzłowa).

2.5.1. Metoda oczkowa

W charakterze współrzędnych w równaniach Lagrange’a przyjmuje się ładunki elektryczne, jakie są związane z prądami oczkowymi w obwodzie elektrycznym: (q_1, q_2, \dots, q_s). W ogólnym przypadku zmienna q_j reprezentuje całkę z prądu względem czasu (ładunek elektryczny) w zdefiniowanym j -tym elemencie sieci, chociaż indeks ten może także oznaczać bardziej uogólniony ładunek. Przy tym założeniu, energia kinetyczna w układzie elektrycznym może być reprezentowana przez energię zgromadzoną w elementach indukcyjnych. Prąd i płynący przez element o indukcyjności L gromadzi w nim energię o wartości $E_k(i) = L i^2/2$, przy czym $i = dq/dt = \dot{q}$, co jest nawią-

¹³ Amalie Emmy Noether (1882 - 1935) – niemiecka matematyk i fizyk; po wyjeździe z hitlerowskich Niemiec pracowała w USA; „najważniejsza kobieta w historii matematyki” (A. Einstein).

¹⁴ WELLS D.A., *Application of the Lagrangian Equations to Electrical Circuits*. Journal of Applied Physics 9, 312 (1938); doi: 10.1063/1.1710422.

zaniem do energii kinetycznej w mechanice: $E_k(v) = mv^2/2$. Indukcyjność wzajemna L_{12} obwodów, w których płyną prądy, odpowiednio i_1 oraz i_2 , gromadzi energię: $E_k(i_1 i_2) = L_{12} i_1 i_2 = L_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2$.

Podobnie, energia potencjalna może być reprezentowana przez energię zgromadzoną w kondensatorze: $E_p(q) = q^2/2C$. Energia potencjalna jest także reprezentowana w obwodzie elektrycznym przez źródło: siła elektromotoryczna e źródła dostarczającego ładunek q jest określona przez energię potencjalną $E_p(q) = e q$. Dodatni znak tej energii odpowiada przepływowi ładunku q w kierunku przeciwnym do siły elektromotorycznej e .

Energia tracona w oporniku R jest związana z mocą wydzielaną w tym elemencie przy przepływie prądu i : $E_\mu = E_R = R i^2/2$. Oporność R reprezentuje tu współczynnik rozproszenia μ (2.29), natomiast spadek napięcia na oporności jest siłą związaną z rozproszeniem: $f = u_R = R i$.

W ten sposób, funkcja Lagrange'a, określająca dynamikę obwodu elektrycznego może być zapisana w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + R_j \dot{q}_j = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.36)$$

gdzie s oznacza liczbę współrzędnych, które zazwyczaj są przypisane do gałęzi obwodu, natomiast funkcja Lagrange'a $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$ jest określona przez energie elementów uczestniczących w rozpatrywanym obwodzie; w przypadku równania napięciowego, f_j jest wymuszeniem w postaci źródła napięciowego w oczku.

Zapisując funkcję Lagrange'a dla pojedynczego oczka RLC ze źródłem napięciowym (rys. 2.1 a), otrzymamy ($j = s = 1$, co pomijamy):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= E_k - E_p = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{q^2}{2C}, \\ E_R &= \frac{1}{2} R \dot{q}^2, \quad u_R = R \dot{q}, \quad f = u(t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

gdzie: $q = Cu_C$ – ładunek elektryczny w kondensatorze (u_C – spadek napięcia na kondensatorze), $\dot{q} = dq/dt$ – prąd, u_R – spadek napięcia na oporniku.

Po wstawieniu (2.37) do (2.36), otrzymamy oczywisty związek:

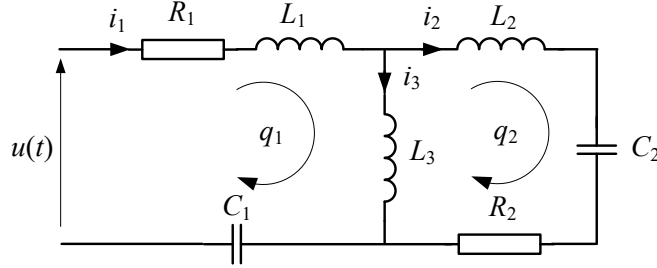
$$\frac{d}{dt} (L \dot{q}) + \frac{q}{C} + R \dot{q} = L \frac{di(t)}{dt} + u_C(t) + Ri(t) = u(t), \quad (2.38)$$

który przedstawia sumę napięć w oczku RLC, zasilanym napięciem $u(t)$.

Zauważmy, że elementy rozpraszające energię (oporniki) są tu reprezentowane w postaci zewnętrznych (do lagrangianu) funkcji f , więc zapis funkcji Lagrange'a obwodu elektrycznego jest często ograniczony do sieci elektrycznych LC, który jest następ-

nie rozszerzany o funkcje reprezentujące straty w obwodzie oraz zewnętrzne (niezależne) źródła. Zastosowanie powyższych relacji ilustruje kolejny przykład.

Przykład 2.7. Opisać dynamikę układu elektrycznego z rys. 2.17 zgodnie z formalizmem Lagrange'a i opracować odpowiadający mu model symulacyjny.



Rys. 2.17. Rozpatrywany obwód elektryczny

Budujemy równania Lagrange'a na bazie równań napięciowych, zgodnie z zaznaczonymi na schemacie oczkami. Wielkości q_1 oraz q_2 oznaczają tu ładunki elektryczne towarzyszące poszczególnym napięciom oczkowym. Konsekwentnie, prądy są określone następująco:

$$i_1 = \dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad i_2 = \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad i_3 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 = i_1 - i_2$$

Energia kinetyczna jest związana z energią gromadzoną w indukcyjnościach:

$$E_k = \frac{1}{2} L_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} L_3 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{q}_2^2,$$

natomiast energia potencjalna jest związana z energią zgromadzoną w kondensatorach:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C_2}$$

Energia wydzielana w opornikach jest następująca:

$$E_R = \frac{1}{2} R_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_2^2$$

Można przystąpić do tworzenia równań Lagrange'a dla obu współrzędnych q_1 oraz q_2 zgodnie z modelem (2.36):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} + \frac{\partial E_p}{\partial q_1} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_1} = u(t),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_2} + \frac{\partial E_p}{\partial q_2} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_2} = 0$$

gdzie wymuszenie w pętli q_1 jest reprezentowane przez źródło napięciowe $u(t)$.

Poszczególne składniki powyższych równań można obliczyć, uwzględniając wcześniejsze relacje:

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = (L_1 + L_3)\dot{q}_1 - L_3\dot{q}_2,$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = (L_1 + L_3)\dot{q}_2 - L_3\dot{q}_1,$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = \frac{q_1}{C_1}, \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = \frac{q_2}{C_2},$$

$$\frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_1} = R_1\dot{q}_1, \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_2} = R_2\dot{q}_2$$

Po podstawieniu do równań modelu Lagrange'a, otrzymamy ich nową postać:

$$(L_1 + L_3)\ddot{q}_1 - L_3\ddot{q}_2 + \frac{q_1}{C_1} + R_1\dot{q}_1 = u(t),$$

$$-L_3\ddot{q}_1 + (L_2 + L_3)\ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} + R_2\dot{q}_2 = 0$$

W celu utworzenia modelu symulacyjnego analizowanej sieci, wygodnie jest zapisać powyższe równania w postaci unormowanej, z pozostawieniem najwyższej pochodnej po lewej stronie, a pozostałe składniki – po prawej stronie równości. Po wykonaniu prostych przekształceń otrzymamy:

$$\ddot{q}_1 = b_1(-R_1\dot{q}_1 - p_2q_1 - b_3\dot{q}_2 - b_2q_2 + u(t)),$$

$$\ddot{q}_2 = b_4(-R_2\dot{q}_2 - p_4q_2 - b_6\dot{q}_1 - b_5q_1 + b_7u(t)),$$

gdzie:

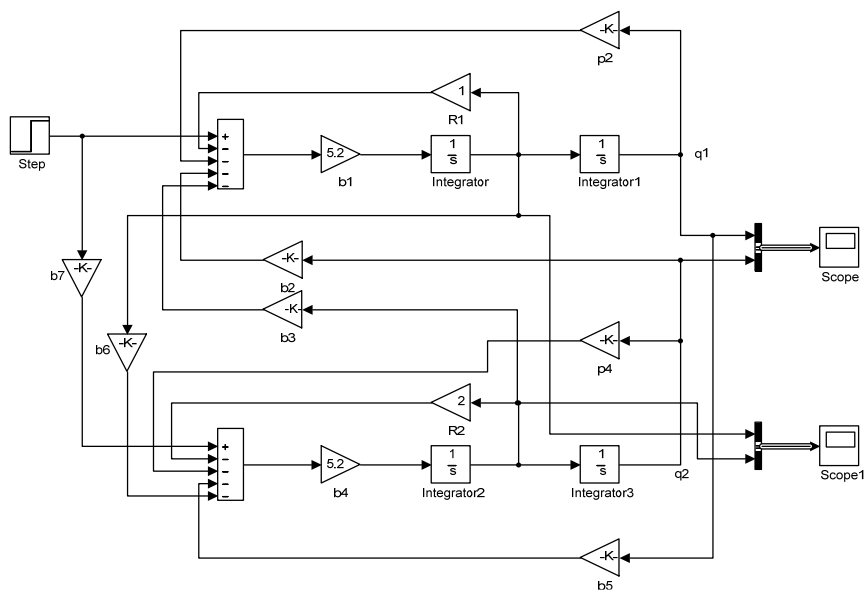
$$p_2 = \frac{1}{C_1}, \quad p_4 = \frac{1}{C_2},$$

$$b_1 = b_4 = \frac{1}{L_1 + \frac{L_2L_3}{L_2 + L_3}},$$

$$b_2 = \frac{L_3}{L_2 + L_3}p_4, \quad b_3 = \frac{L_3}{L_2 + L_3}R_2,$$

$$b_5 = \frac{L_3}{L_1 + L_3}p_2, \quad b_7 = \frac{L_3}{L_1 + L_3}, \quad b_6 = b_7R_1.$$

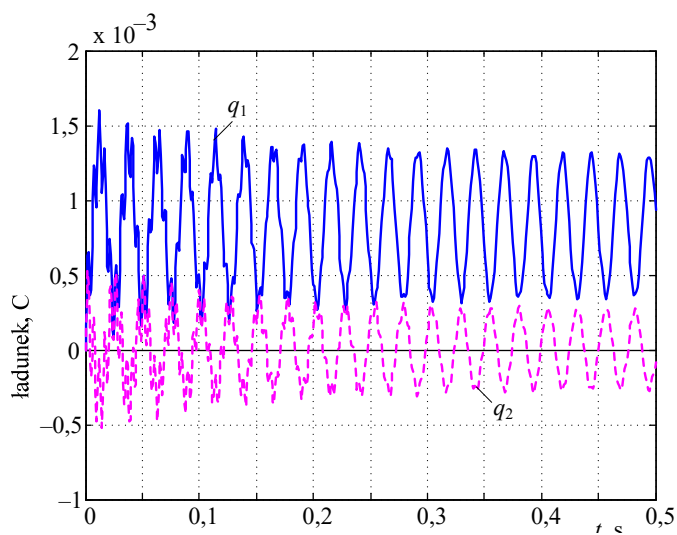
Zgodnie z powyższymi równaniami został utworzony model symulacyjny z zastosowaniem programu Matlab/Simulink (rys. 2.18), gdzie przy poszczególnych blokach zamieszczone zostały oznaczenia zgodnie z powyższym wykazem.



Rys. 2.18. Schemat modelu Matlab/Simulink rozpatrywanej sieci

Rezultaty wykonanych symulacji są pokazane na rys. 2.19 (przebiegi ładunków w obu oczkach sieci) oraz na rys. 2.20 (przebiegi zmian prądów). Symulację wykonano dla następujących parametrów sieci:

$R_1 = 1 \, \Omega$, $R_2 = 2 \, \Omega$, $L_1 = 0,1 \, \text{H}$, $L_2 = 0,1 \, \text{H}$, $L_3 = 1,2 \, \text{H}$, $C_1 = 8,3 \, \mu\text{F}$, $C_2 = 4,7 \, \mu\text{F}$, wymuszenie napięciowe w postaci skoku napięcia stałego $u(t) = 100 \, \text{V}$.



Rys. 2.19. Przebiegi zmian wartości ładunków elektrycznych w zaznaczonych oczkach rozpatrywanego obwodu

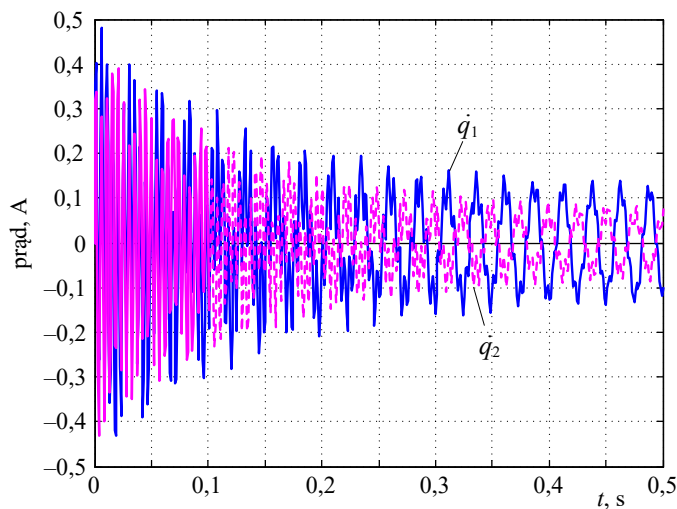
Zauważmy, że w stanie ustalonym napięcie na kondensatorze C_1 osiąga wartość równą napięciu zasilania: $u = 100$ V, skąd ładunek pierwszego oczka jest wówczas równy:

$$q_1 = u \cdot C_1 = 100 \cdot 8,3 \cdot 10^{-6} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ C},$$

co potwierdza przebieg tego ładunku na rys. 2.19.

Przebieg wartości q_2 (ładunek na kondensatorze C_2) zmierza do zera, co wynika stąd, że w stanie ustalonym, spadek napięcia na tym kondensatorze przyjmuje wartość zerową.

Przebiegi prądów (rys. 2.20) są konsekwencją dynamiki ładunków elektrycznych. Początkowe gwałtowne oscylacje prądów przechodzą w bardziej regularne przebiegi, które, przy wymuszeniu w postaci napięcia stałego, zmierzają do wartości zerowych.

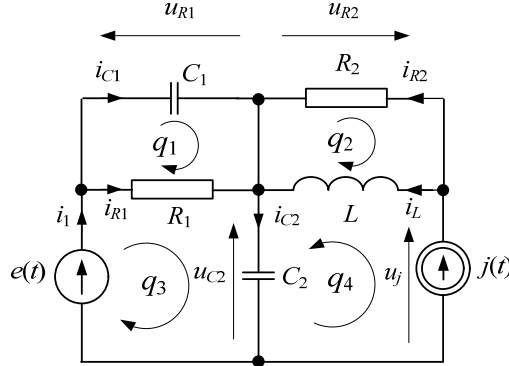


Rys. 2.20. Przebiegi prądów w zaznaczonych oczkach rozpatrywanego obwodu

Pliki z programami składającymi się na przedstawiony model są umieszczone w katalogu *Przykład_2_7*.

Kolejny przykład pokazuje sposób tworzenia modelu według procedury Lagrange'a w sieci ze źródłem prądowym i napięciowym.

Przykład 2.8. Opisać dynamikę układu elektrycznego z rys. 2.21 zgodnie z formalizmem Lagrange'a i opracować odpowiadający mu model symulacyjny.



Rys. 2.21. Rozpatrywany obwód elektryczny

Budujemy równania Lagrange'a zgodnie z zaznaczonymi na schemacie oczkami, przy tym, współrzędne związane z tymi oczkami: q_1 , q_2 , q_3 oraz q_4 oznaczają tu ładunki elektryczne. Konsekwentnie, prądy są określone jako pochodne tych ładunków:

$$i_{C1} = \dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad i_{R2} = \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad i_1 = \dot{q}_3 = \frac{dq_3}{dt}, \quad j(t) = \dot{q}_4 = \frac{dq_4}{dt}$$

Widać stąd, że źródło prądowe jest reprezentowane przez pochodną ładunku q_4 .

Energia kinetyczna jest związana z energią gromadzoną w indukcyjności:

$$E_k = \frac{1}{2} L (\dot{q}_2 + \dot{q}_4)^2,$$

natomiast energia potencjalna jest związana z energią zgromadzoną w kondensatorach:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{(q_3 + q_4)^2}{C_2}$$

Energia wydzielana w opornikach jest następująca:

$$E_R = \frac{1}{2} R_1 (\dot{q}_3 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_2^2$$

Można przystąpić do tworzenia równań Lagrange'a dla współrzędnych q_1 , q_2 oraz q_3 zgodnie z modelem (2.36). Fizycznie, są to równania napięciowe w poszczególnych oczkach:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} + \frac{\partial E_p}{\partial q_1} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_2} + \frac{\partial E_p}{\partial q_2} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_3} + \frac{\partial E_p}{\partial q_3} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_3} = e(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_4} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_4} + \frac{\partial E_p}{\partial q_4} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_4} = 0$$

gdzie wymuszenie w pętli q_3 jest reprezentowane przez źródło napięciowe $e(t)$.

Składniki powyższych równań można obliczyć, uwzględniając wcześniejsze relacje:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_k}{\partial q_1} &= 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = 0, \\ \frac{\partial E_k}{\partial q_2} &= 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = L(\dot{q}_2 + \dot{q}_4), \\ \frac{\partial E_k}{\partial q_3} &= 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_3} = 0, \\ \frac{\partial E_k}{\partial q_4} &= 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_4} = L(\dot{q}_2 + \dot{q}_4), \\ \frac{\partial E_p}{\partial q_1} &= \frac{q_1}{C_1}, \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_3} = \frac{q_3 + q_4}{C_2}, \quad \frac{\partial E_p}{\partial q_4} = \frac{q_3 + q_4}{C_2}, \\ \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_1} &= -R_1(\dot{q}_3 - \dot{q}_1), \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_2} = R_2\dot{q}_2, \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_3} = R_1(\dot{q}_3 - \dot{q}_1)\end{aligned}$$

Po podstawieniu do równań modelu Lagrange'a, otrzymamy ich nową postać:

$$\begin{aligned}\frac{q_1}{C_1} - R_1(\dot{q}_3 - \dot{q}_1) &= 0, \\ L(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_4) + R_2\dot{q}_2 &= 0, \\ \frac{q_3 + q_4}{C_2} + R_1(\dot{q}_3 - \dot{q}_1) &= e(t), \\ L(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_4) + \frac{q_3 + q_4}{C_2} &= u_j,\end{aligned}$$

gdzie u_j jest napięciem pomiędzy węzłami, do których przyłączone jest źródło prądowe $j(t)$.

Uzyskane równania można łatwo uzupełnić o następujące relacje:

$$\begin{aligned}u_{C1} + u_{C2} &= e(t) \\ i_{R1} = \dot{q}_3 - \dot{q}_1 &= i_1 - i_{C1}, \quad i_1 - i_{C2} + j(t) = 0, \quad i_L + i_{R2} - j(t) = 0\end{aligned}$$

Na podstawie drugiego równania powyższego modelu Lagrange'a otrzymamy pierwsze równanie różniczkowe modelu sieci:

$$\ddot{q}_2 + \ddot{q}_4 = -\frac{R_2}{L}\dot{q}_2,$$

które można zapisać w następującej formie:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_2}{L}(i_L - j(t))$$

Stosując notację z kropkami do oznaczania pochodnych, otrzymamy:

$$C_1\dot{u}_{C1} = i_{C1},$$

$$C_2\dot{u}_{C2} = i_{C2},$$

$$\text{skąd: } C_2\dot{u}_{C2} - C_1\dot{u}_{C1} = i_{C2} - i_{C1}$$

Oznaczając: $q_x = C_2u_{C2} - C_1u_{C1}$, otrzymamy:

$$\dot{q}_x = C_2\dot{u}_{C2} - C_1\dot{u}_{C1} = i_{C2} - i_{C1}$$

Na podstawie powyższych równań można wyznaczyć prąd i_{C2} :

$$i_{C2} - i_{C1} = \frac{u_{C1}}{R_1} + j(t)$$

$$\frac{C_1 i_{C2}}{C_2} + i_{C1} = C_1 \dot{e}(t)$$

skąd:

$$i_{C2} = \frac{C_2}{R_1(C_1 + C_2)} u_{C1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} j(t) + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \dot{e}(t) \text{ oraz:}$$

$$i_{C1} = \frac{-C_1}{R_1(C_1 + C_2)} u_{C1} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} j(t) + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \dot{e}(t)$$

Po prostych przekształceniach, otrzymamy:

$$i_{C2} - i_{C1} = \frac{-1}{R_1(C_1 + C_2)} (C_2 u_{C2} - C_1 u_{C1}) + \frac{C_2}{R_1(C_1 + C_2)} e(t) + j(t)$$

Uwzględniając poprzednie oznaczenie, otrzymamy:

$$\dot{q}_x = \frac{-1}{R_1(C_1 + C_2)} q_x + \frac{C_2}{R_1(C_1 + C_2)} e(t) + j(t),$$

które jest drugim równaniem różniczkowym opisującym dynamikę analizowanej sieci. Jak widać, pomimo tego, że w sieci występują trzy elementy reaktancyjne: C_1 , C_2 oraz L , (rys. 2.21), to jej dynamika jest opisana przez dwa równania różniczkowe, gdyż występuje tu oczko z kondensatorami i źródłem napięciowym $e(t)$, co redukuje liczbę niezależnych równań [40]. Do uzyskania prądów płynących w kondensatorach, niezbędne jest różniczkowanie wymuszającego napięcia $e(t)$.

Znając wielkości i_L oraz q_x , można obliczyć pozostałe wielkości w modelu sieci:

$$u_{C1} = \frac{-1}{C_1 + C_2} (q_x - C_2 e(t))$$

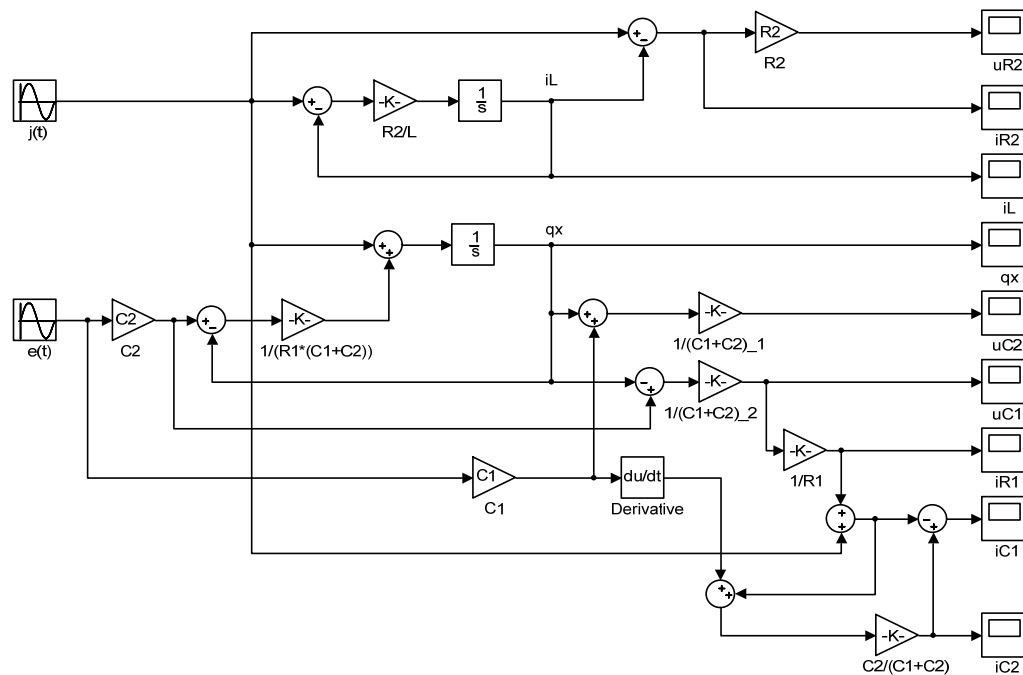
$$u_{C2} = \frac{1}{C_1 + C_2} (q_x + C_1 e(t))$$

Uzyskane wartości napięć można zastosować do obliczenia prądów i_{C1} oraz i_{C2} .

Zgodnie z powyższymi równaniami został utworzony model symulacyjny z zastosowaniem programu Matlab/Simulink (rys. 2.22). Pliki tworzące przedstawiony model są umieszczone w katalogu *Przykład_2_8*. Parametry modelu są definiowane w oddzielnym skrypcie *przykl_2_8_par.m*, który należy uruchomić przed rozpoczęciem symulacji (wartości odpowiednich parametrów są przekazywane do modelu poprzez blok *Workspace*). Poniższe rezultaty uzyskano przy następującej zawartości tego pliku:

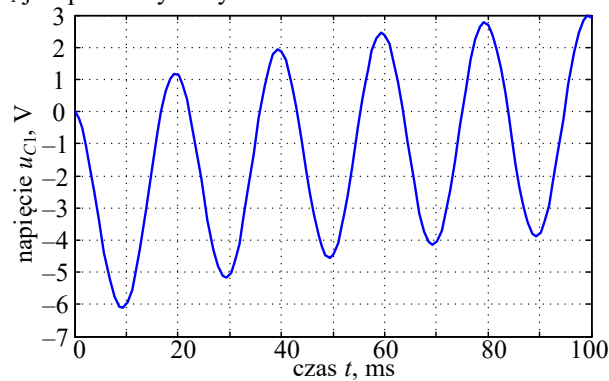
```
% parametry do Przykładu 2.8
clear all;
close all;
% Parametry źródeł:
f=50.0;           % częstotliwość
J=5.0;           % amplituda prądu j(t)
freq=2*pi*f;     % pulsacja
E=100.0;         % amplituda napięcia e(t)
```

```
% Parametry modelu:
R1=10.0;      % ohm
R2=500.0;    % ohm
L=2.5;       % henr
C1=4.7*1.E-3; % farad
C2=22.0*1.E-6; % farad
```



Rys. 2.22. Schemat modelu sieci w programie Matlab/Simulink

W modelu prowadzona jest rejestracja większości obliczanych wielkości. Przebieg napięcia u_{C1} na kondensatorze C_1 jest pokazany na rys. 2.23.



Rys. 2.23. Przebieg napięcia $u_{C1} = u_{R1}$

Analizując końcowe równania modelu widać, że dynamika sieci jest odwzorowana w postaci dwóch równań stanu oraz zbioru równań wyjść, które mogą być ostatecznie tworzone w zależności od celów modelowania. Można zauważyć, że w równaniach wyjść może wystąpić różniczkowanie wymuszeń.

2.5.2. Metoda węzłowa

W tym przypadku, w charakterze współrzędnych w równaniach Lagrange'a przyjmuje się strumienie elektromagnetyczne, które najczęściej są związane z napięciami w węzłach obwodu elektrycznego: $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. Zatem, zmienna λ_k oznacza wielkość strumienia elektromagnetycznego związanego z k -tym węzłem:

$$\lambda_k = \int_{t_0}^t u_k(\tau) d\tau, \quad u_k = \frac{d\lambda_k}{dt} = \dot{\lambda}_k \quad (2.39)$$

Jeśli napięcie u_k jest wyznaczone przez źródło napięciowe, to strumień λ_k jest ściśle zdefiniowany przez to napięcie na podstawie powyższego związku. W ogólnym przypadku, napięcie całkowane zgodnie z (2.39) może być spadkiem napięcia pomiędzy dowolnymi węzłami sieci, jeśli tylko zdefiniowany zbiór takich napięć w sieci nie narusza napięciowego prawa Kirchhoffa.

Energia kinetyczna w takim układzie może być reprezentowana przez energię zgromadzoną w elementach pojemnościowych. Napięcie u na kondensatorze C gromadzi w nim energię o wartości $E_k(u) = C u^2/2 = C \dot{\lambda}^2/2$, przy czym, napięcie $u = d\lambda/dt = \dot{\lambda}$ staje się źródłem dynamiki układu, jak prędkość v w układach mechanicznych: $E_k(v) = M v^2/2$. Podobnie, energia potencjalna może być reprezentowana przez energię zgromadzoną w indukcyjności: $E_p(\lambda) = \lambda^2/2L$. Energia potencjalna jest także reprezentowana w obwodzie elektrycznym przez źródło prądowe $j(t)$, które w powiązaniu ze strumieniem elektromagnetycznym daje energię potencjalną $E_p(\lambda) = j(t) \lambda/2$. Dodatni znak tej wielkości odpowiada strumieniowi λ skierowanemu w kierunku przeciwnym do przepływu prądu źródłowego $j(t)$.

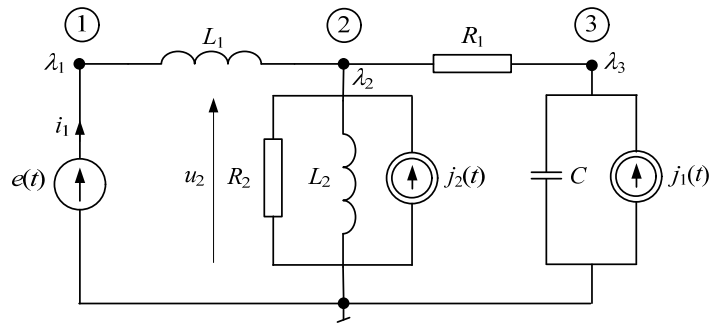
Energia tracona w oporniku R jest związana z mocą wydzielaną w tym elemencie jeśli spadek napięcia na nim wynosi $u = \dot{\lambda}$: $E_\mu = E_R = \dot{\lambda}^2/2R$. Przewodność $G = 1/R$ reprezentuje tu współczynnik rozproszenia μ (2.29), natomiast prąd płynący przez tę przewodność jest siłą związaną z rozproszeniem: $f = i_R = G \cdot u = \dot{\lambda}/R = u/R$.

W ten sposób, funkcja Lagrange'a, określająca dynamikę obwodu elektrycznego może być zapisana w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k} + \frac{\dot{\lambda}_k}{R_k} = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (2.40)$$

gdzie s jest liczbą współrzędnych, które zazwyczaj są przypisane do węzłów sieci, natomiast funkcja Lagrange'a $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\lambda}, \lambda)$ jest określona przez energie elementów uczestniczących w rozpatrywanym obwodzie; w przypadku równań węzłowych, f_k jest wymuszeniem w postaci źródła prądowego w k -tym węźle. Tym razem równania Lagrange'a mają charakter prądowy. Zastosowanie powyższych relacji ilustruje kolejny przykład.

Przykład 2.9. Opisać dynamikę układu elektrycznego z rys. 2.24 zgodnie z formalizmem Lagrange'a według metody węzłowej i opracować odpowiadający mu model symulacyjny. Wyznaczyć zaznaczone wielkości elektryczne: prąd i_1 oraz napięcie u_2 .



Rys. 2.24. Schemat rozpatrywanego obwodu elektrycznego

Na rysunku zaznaczone są numery trzech węzłów niezależnych, dla których oznaczone są także współrzędne równań Lagrange'a: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Energie: kinetyczna i potencjalna sieci są określone za pomocą następujących zależności:

$$E_k = \frac{1}{2} C \dot{\lambda}_3^2$$

$$E_p = \frac{1}{2L_1} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \frac{\lambda_2^2}{2L_2}$$

Funkcja Lagrange'a przyjmuje następującą formę:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{1}{2} C \dot{\lambda}_3^2 - \frac{1}{2L_1} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \frac{\lambda_2^2}{2L_2}$$

Energia rozproszenia jest wydzielana na obu opornikach:

$$E_R = \frac{\dot{\lambda}_2^2}{2R_2} + \frac{1}{2R_1} (\dot{\lambda}_3 - \dot{\lambda}_2)^2$$

Budujemy równania Lagrange'a dla trzech współrzędnych, zgodnie z zaznaczonymi na schemacie węzłami:

- dla współrzędnej λ_1 : $\dot{\lambda}_1 = e(t)$,

- dla współrzędnej λ_2 :
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_2} = j_2(t),$$

- dla współrzędnej λ_3 :
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_3} = j_1(t),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_2} &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = - \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \lambda_2 + \frac{1}{L_1} \lambda_1, \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_2} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \dot{\lambda}_2 - \frac{1}{R_1} \dot{\lambda}_3, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_3} &= C \dot{\lambda}_3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0, \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_3} = \frac{1}{R_1} \dot{\lambda}_3 - \frac{1}{R_1} \dot{\lambda}_2, \end{aligned}$$

Po wykonaniu różniczkowania pierwszych wyrazów względem czasu i odpowiednim uporządkowaniu, otrzymamy następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= e(t), \\ \dot{\lambda}_2 &= \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) L_1} \lambda_1 - \frac{R_1 R_2 (L_1 + L_2)}{L_1 L_2 (R_1 + R_2)} \lambda_2 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \dot{\lambda}_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} j_2(t), \\ \ddot{\lambda}_3 &= \frac{1}{R_1 C} \dot{\lambda}_2 - \frac{1}{R_1 C} \dot{\lambda}_3 + \frac{1}{C} j_1(t) \end{aligned}$$

Ponadto, w charakterze wielkości wyjściowych należy określić prąd i_1 oraz napięcie u_2 . Łatwo zauważyć, że wielkości te można wyznaczyć następująco:

$$i_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{L_1},$$

$$u_2 = \dot{\lambda}_2$$

Utworzony model symulacyjny z zastosowaniem programu Matlab/Simulink jest pokazany na rys. D.1, str. 233 (Dodatek), gdzie poszczególne współczynniki zostały obliczone na podstawie wyprowadzonych równań modelu. Przyjęte zostały następujące parametry obwodu:

$R_1 = 10 \, \Omega$, $R_2 = 20 \, \Omega$, $L_1 = 0,1 \, \text{H}$, $L_2 = 0,5 \, \text{H}$, $C = 4,7 \, \mu\text{F}$, wymuszenie napięciowe w postaci przebiegu sinusoidalnego: $e(t) = 100 \sin(100\pi t)$. Źródła prądowe są reprezentowane za pomocą następujących funkcji:

$$j_1(t) = \text{Amp}_1 \cdot (\exp(A_1 \cdot t) - \exp(B_1 \cdot t)),$$

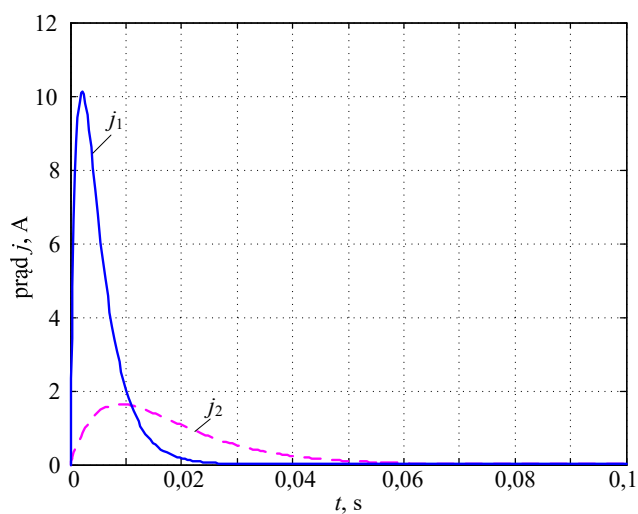
$$j_2(t) = \text{Amp}_2 \cdot (\exp(A_2 \cdot t) - \exp(B_2 \cdot t)),$$

przy czym:

$$\text{Amp}_1 = 25 \, \text{A}, \quad A_1 = -250 \, \text{s}^{-1}, \quad B_1 = -800 \, \text{s}^{-1},$$

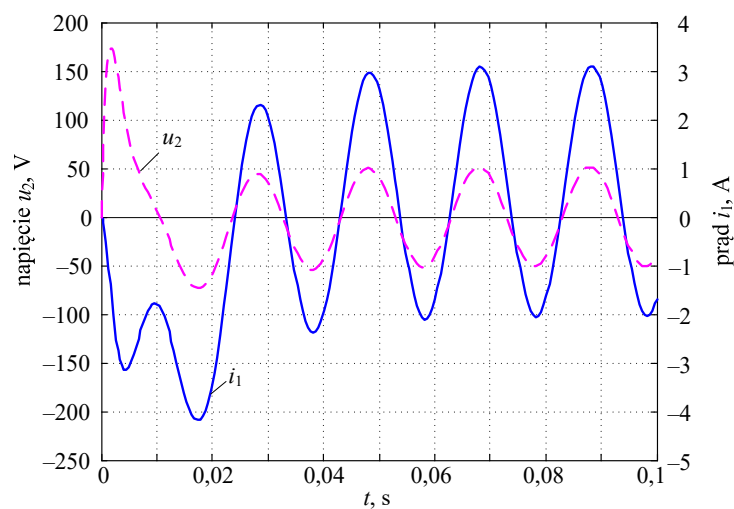
$$\text{Amp}_2 = 20 \, \text{A}, \quad A_2 = -100 \, \text{s}^{-1}, \quad B_2 = -125 \, \text{s}^{-1}.$$

Przebiegi tych prądów są pokazane na rys. 2.25. Rezultaty wykonanej symulacji są pokazane na rys. 2.26 (prąd i_1 oraz napięcie u_2).



Rys. 2.25. Przebiegi prądów źródłowych

Zauważmy, że stan przejściowy zanika po czasie $t = 0,06$ s, co łączy się z zanikaniem wymuszenia w postaci źródeł prądowych.



Rys. 2.26. Przebiegi zmiennych wyjściowych w analizowanej sieci

Pliki z programami składającymi się na przedstawiony model są umieszczone w katalogu *Przykład_2_9*.

2.5.3. Przykład: silnik dwufazowy

Na podstawie powyższego omówienia widać, że formalizm Lagrange’a, w zasadzie, nie wnosi nowych elementów do analizy obwodów elektrycznych. Niezależnie od tego podejścia, w elektrotechnice rozwinęły się różne metody analizy obwodów i ich modelowania, które są obecnie powszechnie akceptowane i stosowane w praktyce. Niekiedy jednak metody związane z formalizmem Lagrange’a mogą być atrakcyjne w elektrotechnice, w szczególności w odniesieniu do sieci nieliniowych, gdzie rachunek operacyjny nie jest stosowany lub w przypadku złożonych systemów elektromechanicznych [50].

Opisując dynamikę systemu zgodnie z równaniami Lagrange’a można w jednolity sposób, we wspólnym modelu ująć różne zjawiska fizyczne. Typowymi przykładami takich układów są napędy elektryczne lub ogólnie, przetworniki elektromechaniczne. Kolejny przykład ilustruje zastosowanie takiego podejścia.

Przykład 2.10. Na rys. 2.27 jest pokazany schemat układu napędowego z dwufazowym niesymetrycznym silnikiem indukcyjnym. Wyznaczyć jego model matematyczny zgodnie z formalizmem Lagrange’a według metody oczkowej i opracować model symulacyjny z zastosowaniem programu Matlab/Simulink. Przyjąć, że silnik wraz z obciążeniem jest reprezentowany wspólną masą o momencie bezwładności J_r . Opory ruchu są reprezentowane przez współczynnik D_r . Wielkość T_m reprezentuje moment obciążenia, natomiast T_e jest momentem elektromagnetycznym silnika. Zakłada się, że uzwojenia silnika w obu osiach α, β mogą mieć różne parametry (na rys. 2.27 odpowiadają im indeksy a, b). Podobnie, oba prostopadłe uzwojenia stojana mogą być zasilane napięciami o różnych amplitudach.

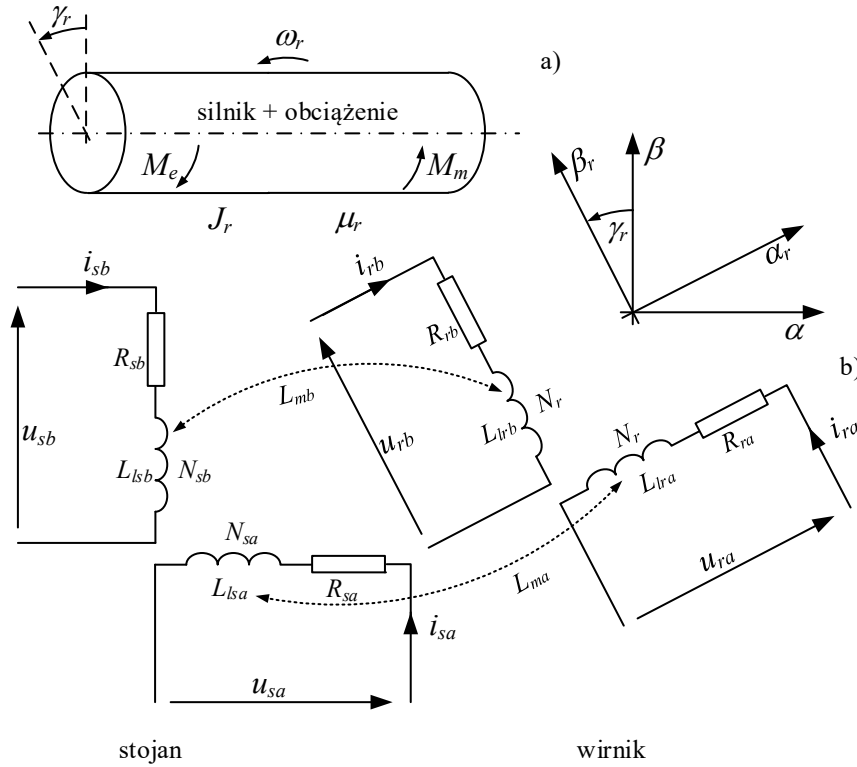
Zakładamy, że prądy, napięcia oraz parametry obwodów wirnika zostały sprowadzone do poziomu obwodów stojana, przy czym, uzwojenia stojana mają różną liczbę zwojów, odpowiednio N_{sa} i N_{sb} , natomiast ekwiwalentna liczba zwojów wirnika jest taka sama w obu osiach: N_r . W układzie występuje pięć obwodów z następującymi współrzędnymi: q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 , które łączą się z fizycznymi wielkościami występującymi w układzie:

$\dot{q}_1 = i_{sa}, \dot{q}_2 = i_{sb}, \dot{q}_3 = i_{ra}, \dot{q}_4 = i_{rb}, \dot{q}_5 = \omega, q_5 = \gamma_r$. Są to więc cztery obwody elektryczne oraz jeden mechaniczny. Zakładamy również ogólne przyjęte oznaczenia w odniesieniu do parametrów zastępczych obwodów z rys. 2.27: L_{ma}, L_{mb} – indukcyjności wzajemne pomiędzy uzwojeniami stojana i wirnika, odpowiednio w osiach a oraz b , a także:

$$L_{sa} = L_{lsa} + L_{ma}, \quad L_{sb} = L_{lsb} + L_{mb},$$

$$L_{ra} = L_{lra} + L_{ma}, \quad L_{rb} = L_{lrb} + L_{mb},$$

gdzie: $L_{lsa}, L_{lsb}, L_{lra}, L_{lrb}$ – indukcyjności rozproszenia poszczególnych uzwojeń (rys. 2.28).



Rys. 2.27. Schemat układu napędowego z dwufazowym silnikiem indukcyjnym: część mechaniczna a), część elektryczna b)

Postępując zgodnie z metodą oczkową (w odróżnieniu do metody węzłowej, gdzie współrzędne są formułowane w postaci strumieni elektromagnetycznych [50]), otrzymamy następującą postać równań Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, j = 1, 2, \dots, 5,$$

gdzie:

- wymuszenia: $Q_1 = u_{sa}, Q_2 = u_{sb}, Q_3 = u_{ra}, Q_4 = u_{rb}, Q_5 = T_e - T_m$;

- energia kinetyczna gromadzona w indukcyjnościach:

$$E_k = \frac{1}{2} L_{sa} \dot{q}_1^2 + L_{ma} \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos q_5 - L_{ma} \dot{q}_1 \dot{q}_4 \sin q_5 + \frac{1}{2} L_{sb} \dot{q}_2^2 + L_{mb} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin q_5 + L_{mb} \dot{q}_2 \dot{q}_4 \cos q_5 \\ + \frac{1}{2} L_{ra} \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} L_{rb} \dot{q}_4^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{q}_5^2$$

gdzie: L_{ma}, L_{mb} – indukcyjności wzajemne

- energia potencjalna: $E_p = 0$ (brak elementów pojemnościowych)

- energia strat: $E_R = \frac{1}{2} (R_{sa}\dot{q}_1^2 + R_{sb}\dot{q}_2^2 + R_{ra}\dot{q}_3^2 + R_{rb}\dot{q}_4^2 + \mu_r\dot{q}_5^2)$

Można stąd określić poszczególne składniki równań Lagrange'a:

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = L_{sa}\dot{q}_1 + L_{ma}\dot{q}_3 \cos q_5 - L_{ma}\dot{q}_4 \sin q_5$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_2} = 0; \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = L_{sb}\dot{q}_2 + L_{mb}\dot{q}_3 \sin q_5 + L_{mb}\dot{q}_4 \cos q_5$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_3} = 0; \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_3} = L_{ra}\dot{q}_3 + L_{ma}\dot{q}_1 \cos q_5 + L_{mb}\dot{q}_2 \sin q_5$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_4} = 0; \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_4} = L_{rb}\dot{q}_4 - L_{ma}\dot{q}_1 \sin q_5 + L_{mb}\dot{q}_2 \cos q_5$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial q_5} = & -L_{ma}\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin q_5 - L_{ma}\dot{q}_1\dot{q}_4 \cos q_5 + L_{mb}\dot{q}_2\dot{q}_3 \cos q_5 - L_{mb}\dot{q}_2\dot{q}_4 \sin q_5 = \\ & -((L_{ma}\dot{q}_1\dot{q}_4 - L_{mb}\dot{q}_2\dot{q}_3) \cos q_5 + (L_{ma}\dot{q}_1\dot{q}_3 + L_{mb}\dot{q}_2\dot{q}_4) \sin q_5) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_5} = J_r\dot{q}_5$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_j} = 0, j = 1, 2, \dots, 5$$

$$\frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_1} = R_{sa}\dot{q}_1, \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_2} = R_{sb}\dot{q}_2, \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_3} = R_{ra}\dot{q}_3, \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_4} = R_{rb}\dot{q}_4, \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_5} = \mu_r\dot{q}_5$$

Zauważmy, że równania:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j}, j = 1, 2, 3, 4, \text{ reprezentują strumienie elektromagnetyczne } (\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} = \psi_j), \text{ a więc równania}$$

Lagrange'a części elektrycznej, są równaniami napięciowymi rozpatrywanego silnika:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{q}_j} = u_{s(r)j}, \quad \text{gd}y\acute{z}: \quad \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0, j = 1, 2, 3, 4,$$

co można zapisać w następującej formie:

$$\frac{d\psi_{sa}}{dt} = u_{sa} - R_{sa}i_{sa}, \quad \frac{d\psi_{sb}}{dt} = u_{sb} - R_{sb}i_{sb},$$

$$\frac{d\psi_{ra}}{dt} = u_{ra} - R_{ra}i_{ra}, \quad \frac{d\psi_{rb}}{dt} = u_{rb} - R_{rb}i_{rb},$$

gdzie:

$$\psi_{sa} = L_{sa}i_{sa} + L_{ma} \cos \gamma_r i_{ra} - L_{ma} \sin \gamma_r i_{rb}, \quad \psi_{sb} = L_{sb}i_{sb} + L_{mb} \sin \gamma_r i_{ra} + L_{mb} \cos \gamma_r i_{rb},$$

$$\psi_{ra} = L_{ma} \cos \gamma_r i_{sa} + L_{mb} \sin \gamma_r i_{sb} + L_{ra}i_{ra}, \quad \psi_{rb} = -L_{ma} \sin \gamma_r i_{sa} + L_{mb} \cos \gamma_r i_{sb} + L_{rb}i_{rb}$$

Otrzymamy stąd następujący układ równań różniczkowych (równania Lagrange'a), które tworzą model matematyczny rozpatrywanego układu:

$$\begin{aligned}
L_{sa} \frac{di_{sa}}{dt} + L_{ma} \frac{d(i_{ra} \cos \gamma_r)}{dt} - L_{ma} \frac{d(i_{rb} \sin \gamma_r)}{dt} + R_{sa} i_{sa} &= u_{sa} \\
L_{sb} \frac{di_{sb}}{dt} + L_{mb} \frac{d(i_{ra} \sin \gamma_r)}{dt} + L_{mb} \frac{d(i_{rb} \cos \gamma_r)}{dt} + R_{sb} i_{sb} &= u_{sb} \\
L_{ma} \frac{d(i_{sa} \cos \gamma_r)}{dt} + L_{mb} \frac{d(i_{sb} \sin \gamma_r)}{dt} + L_{ra} \frac{di_{ra}}{dt} + R_{ra} i_{ra} &= u_{ra} \\
-L_{ma} \frac{d(i_{sa} \sin \gamma_r)}{dt} + L_{mb} \frac{d(i_{sb} \cos \gamma_r)}{dt} + L_{rb} \frac{di_{rb}}{dt} + R_{rb} i_{rb} &= u_{rb} \\
J_r \frac{d^2 \gamma_r}{dt^2} + \mu_r \frac{d\gamma_r}{dt} + ((L_{ma} i_{sa} i_{rb} - L_{mb} i_{sb} i_{ra}) \cos \gamma_r + (L_{ma} i_{sa} i_{ra} + L_{mb} i_{sb} i_{rb}) \sin \gamma_r) + M_m &= 0
\end{aligned} \tag{2.41}$$

przy czym: $M_e = -p((L_{ma} i_{sa} i_{rb} - L_{mb} i_{sb} i_{ra}) \cos \gamma_r + (L_{ma} i_{sa} i_{ra} + L_{mb} i_{sb} i_{rb}) \sin \gamma_r)$.

W pierwszych czterech równaniach (2.41) (część elektryczna modelu silnika) występują pochodne iloczynów funkcji, co prowadzi do złożonych wyrażeń. Przy założeniu kątowej symetrii maszyny, model ten można sprowadzić do prostopadłego układu współrzędnych, który jest reprezentowany w postaci dwóch oddzielnych elektrycznych schematów zastępczych [26]. Równania dynamiki takiego modelu mają znaną postać:

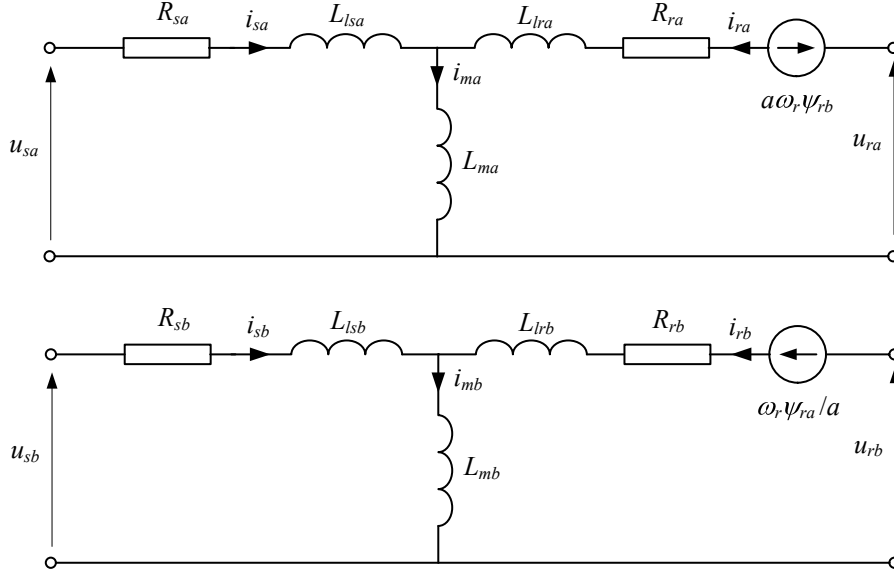
$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_{sa}}{dt} &= u_{sa} - R_{sa} i_{sa} + \omega \psi_{sb} \\
\frac{d\psi_{sb}}{dt} &= u_{sb} - R_{sb} i_{sb} - \omega \psi_{sa} \\
\frac{d\psi_{ra}}{dt} &= u_{ra} - R_{ra} i_{ra} + a(\omega - \omega_r) \psi_{rb} \\
\frac{d\psi_{rb}}{dt} &= u_{rb} - R_{rb} i_{rb} - \frac{1}{a}(\omega - \omega_r) \psi_{ra}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

przy czym, a jest współczynnikiem niesymetrii obu faz stojana: $N_{sa} = a \cdot N_{sb}$, gdzie N_{sa} – liczba zwojów uzwojenia fazy a , N_{sb} – liczba zwojów uzwojenia fazy b .

Dodatkowo, jeśli przyjąć, że bazowy układ współrzędnych jest związany ze stojanem (współrzędne stacjonarne, $\omega = 0$), to schemat zastępczy dwubiegunowej maszyny indukcyjnej przyjmie postać, jak na rys. 2.28, przy czym, w przypadku rozpatrywanego silnika: $u_{ra} = u_{rb} = 0$.

Równania części elektrycznej modelu silnika mają wówczas następującą postać:

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_{sa}}{dt} &= u_{sa} - R_{sa} i_{sa} \\
\frac{d\psi_{sb}}{dt} &= u_{sb} - R_{sb} i_{sb} \\
\frac{d\psi_{ra}}{dt} &= -R_{ra} i_{ra} - a\omega_r \psi_{rb} \\
\frac{d\psi_{rb}}{dt} &= -R_{rb} i_{rb} + \omega_r \psi_{ra} / a
\end{aligned} \tag{2.43}$$



Rys. 2.28. Schemat zastępczy niesymetrycznego silnika indukcyjnego

Przyjęcie takiego modelu maszyny odpowiada założeniu, że wielkości związane z wirnikiem są przeliczone do obwodu stojana, a w stanie ustalonym pulsacja tych wielkości jest równa pulsacji napięcia zasilającego ω_1 , natomiast kąt $\gamma_r = 0$. Jak widać, prowadzi to do znacznego uproszczenia równań (2.41), przy czym, strumienie elektromagnetyczne są określone następująco [26]:

$$\begin{aligned} \psi_{sa} &= L_{sa}i_{sa} + L_{ma}i_{ra}, & \psi_{sb} &= L_{sb}i_{sb} + L_{mb}i_{rb}, \\ \psi_{ra} &= L_{ma}i_{sa} + L_{ra}i_{ra}, & \psi_{rb} &= L_{mb}i_{sb} + L_{rb}i_{rb} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Znając strumienie magnetyczne, można określić prądy w poszczególnych obwodach maszyny:

$$\begin{aligned} i_{sa} &= \frac{L_{ra}\psi_{sa} - L_{ma}\psi_{ra}}{L_{sa}L_{ra} - L_{ma}^2}, & i_{sb} &= \frac{L_{rb}\psi_{sb} - L_{mb}\psi_{rb}}{L_{sb}L_{rb} - L_{mb}^2}, \\ i_{ra} &= \frac{L_{sa}\psi_{ra} - L_{ma}\psi_{sa}}{L_{sa}L_{ra} - L_{ma}^2}, & i_{rb} &= \frac{L_{sb}\psi_{rb} - L_{mb}\psi_{sb}}{L_{sb}L_{rb} - L_{mb}^2} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Zauważmy, że w uzyskanym modelu, parametry maszyny w obu prostopadłych osiach (indeksy a, b) mogą być różne, co daje możliwość badania silników niesymetrycznych. Istnieje także możliwość zasilania obu uzwojeń stojana napięciami o różnych amplitudach.

W celu określenia bieżących wartości wielkości związanych z wirnikiem, można posłużyć się następującą konwersją:

$$\begin{aligned} x_{ra} &:= x_{ra} \cos \gamma_r + x_{rb} \sin \gamma_r, \\ x_{rb} &:= -x_{ra} \sin \gamma_r + x_{rb} \cos \gamma_r, \end{aligned} \quad (2.46)$$

gdzie $\gamma_r = \int_{t_0}^t \omega_r d\tau + \gamma_0$, co łączy się z modelem mechanicznym maszyny (x może oznaczać

prąd, napięcie lub strumień elektromagnetyczny):

$$\frac{J_r}{p} \frac{d^2 \gamma_r}{dt^2} + \mu_r \frac{d\gamma_r}{dt} = M_e - M_m, \quad (2.47)$$

gdzie: $M_e = -p(L_{ma}i_{sa}i_{rb} - L_{mb}i_{sb}i_{ra})$, $\omega_r = \frac{d\gamma_r}{dt}$.

Proponuje się zastosowanie nieliniowego modelu obciążenia, w którym moment mechaniczny M_m jest określony według następującej zależności:

$$M_m = M_m(n) = M_{m0} + (M_{mn} - M_{m0}) \left(\frac{n}{n_n} \right)^w, \quad (2.48)$$

gdzie: M_{m0} – moment początkowy, przy zatrzymanym wale silnika, N·m;

M_{mn} – moment znamionowy, przy znamionowej prędkości obrotowej n_n (znamionowym poślizgu silnika $s = s_n$), N·m;

w – wykładnik nieliniowego modelu;

n – bieżąca prędkość obrotowa wirnika, obr/min:

$$n = \frac{30\omega_r}{\pi}$$

Równania (2.43) - (2.48) tworzą matematyczny model analizowanego silnika wraz z obciążeniem. Badania przeprowadzono z modelem silnika niesymetrycznego klatkowego ($u_{ra} = u_{rb} = 0$), przy czym, amplituda napięcia zasilania uzwojenia fazy a stojana (U_{sa}) jest także większa w stopniu $k_u = 1,25$ w stosunku do amplitudy napięcia uzwojenia fazy b (U_{sb}): ($k_u = U_{sa}/U_{sb}$). Model opracowany w programie Matlab/Simulink według powyższych procedur jest przedstawiony w Dodatku (str. 232). Jego realizacja programowa została zapisana w pliku: `silnik_2_fazowy_strumien.mdl`.

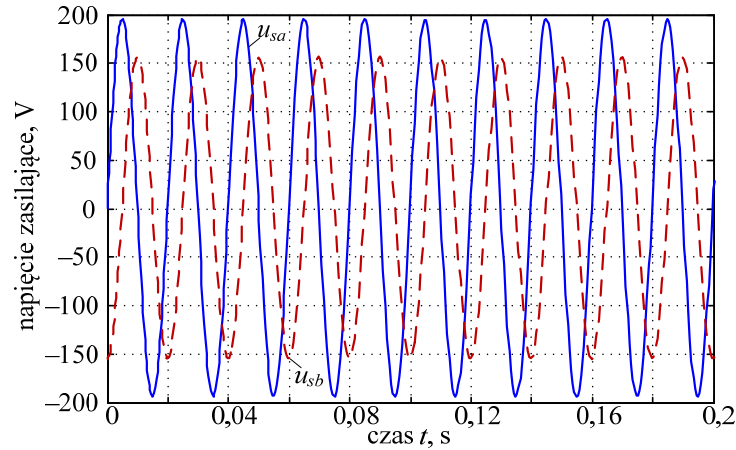
Przyjęto następujące parametry rozpatrywanego układu z modelem silnika dwufazowego¹⁵ (parametry te są zapisane w pliku `silnik_2_fazowy_f50.m`):

$U_n = 110 \text{ V}/50 \text{ Hz}$	wartość skuteczna napięcia u_{sb}
$k_u = 1,25$;	współczynnik niesymetrii zasilania: $k_u = U_{na}/U_{nb}$
$a = 1,18$;	współczynnik niesymetrii uzwojeń: $a = N_{sa}/N_{sb}$
$p = 2$;	liczba par biegunów maszyny
$n_0 = 1465$;	prędkość znamionowa przy znamionowym obciążeniu M_{mn} , obr/min
$R_{sa} = 7,14$;	resystancja uzwojenia 'a' stojana, Ω
$R_{sb} = 2,02$;	
$R_{ra} = 5,74$;	rezystancja uzwojenia 'a' wirnika, Ω
$R_{rb} = 4,12$;	
$L_{sa} = 0,2549$;	indukcyjność uzwojenia 'a' stojana, H

¹⁵ KUMSUWAN Y., SRIRATTANAWICHAIKUL W., PREMRUDEEPPREECHACHARN S., *Analysis of a two-phase induction motor using dynamic model based on Matlab/Simulink*. As. J. Energy Env. 2010, 11(01), 48-59.

$L_{sb} = 0,1846;$	
$L_{ra} = 0,2542;$	indukcyjność uzwojenia 'a' wirnika, H
$L_{rb} = 0,1828;$	
$L_{ma} = 0,2464;$	indukcyjność wzajemna uzwojenia 'a', H
$L_{mb} = 0,1772;$	
$J = 2,92E-3;$	moment bezwładności, $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$\mu_r = 2,5E-6;$	współczynnik oporów ruchu, $\text{N}\cdot\text{m s/rad}$
$M_{m0} = 0,1;$	wartość początkowa momentu obciążenia, $\text{N}\cdot\text{m}$
$M_{mn} = 0,95;$	wartość znamionowa momentu obciążenia, $\text{N}\cdot\text{m}$
$\exp T = 1,5;$	wykładnik w w modelu obciążenia

Rezultaty przeprowadzonych badań symulacyjnych są pokazane na kolejnych rysunkach. Przebiegi napięć zasilających uzwojenia obu faz stojana są pokazane na rys. 2.29. Widać, że amplitudy obu napięć są różne.



Rys. 2.29. Przebiegi napięć zasilających uzwojenia stojana silnika

Na kolejnych rysunkach są pokazane przebiegi prądów stojana (rys. 2.30) oraz prądów wirnika, odniesionych do układu współrzędnych, związanych ze stojanem (rys. 2.31). Widać, że w obu przypadkach częstotliwość przebiegów w stanie ustalonym jest jednakowa i pokrywa się z częstotliwością napięcia zasilającego.

Przebieg rzeczywisty prądu w uzwojeniach wirnika jest pokazany na rys. 2.32. Częstotliwość składowej podstawowej tego prądu w stanie ustalonym zależy od poślizgu s silnika:

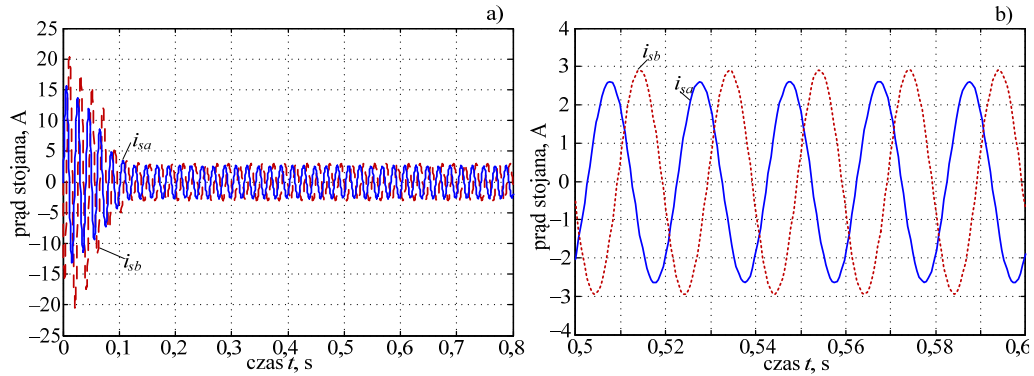
$$f = s \cdot f_1, \quad (2.49)$$

gdzie:

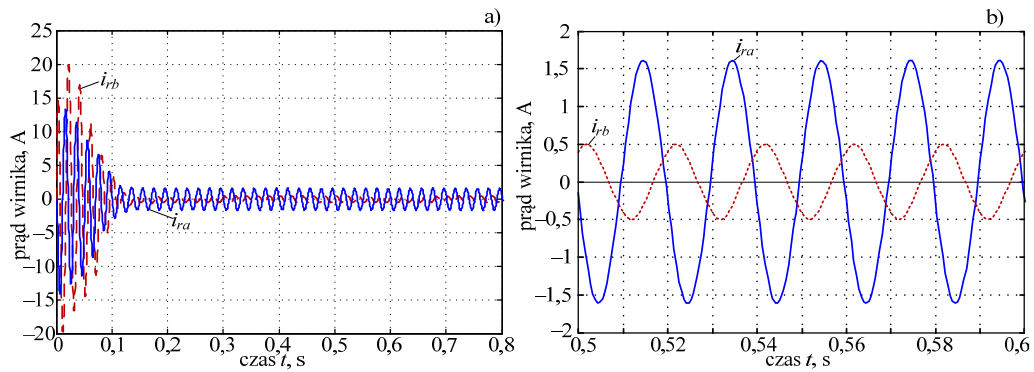
$$s = \frac{n_1 - n}{n_1}, \quad (2.50)$$

f_1 jest częstotliwością napięcia zasilającego, $n_1 = 60 \cdot f_1 / p$ – prędkość obrotowa synchroniczna.

Widoczna obecność składowej o wysokiej częstotliwości jest związana z niesymetrią silnika: zarówno niesymetrią obwodów, jak i różnicą amplitud zasilającego napięcia. Łatwo sprawdzić, że obserwowane zakłócenia znikają w przypadku silnika symetrycznego.



Rys. 2.30. Przebiegi prądów w uzwojeniu stojana silnika: pełny – a), fragment – b)

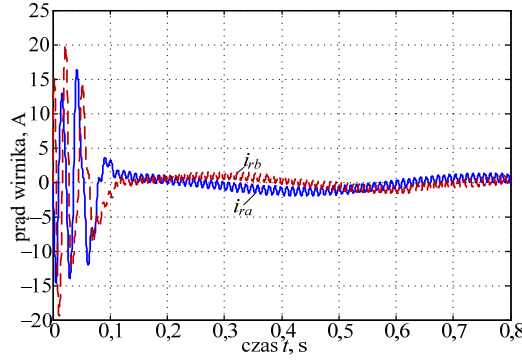


Rys. 2.31. Przebiegi prądów w uzwojeniu wirnika silnika: pełny – a), fragment – b)

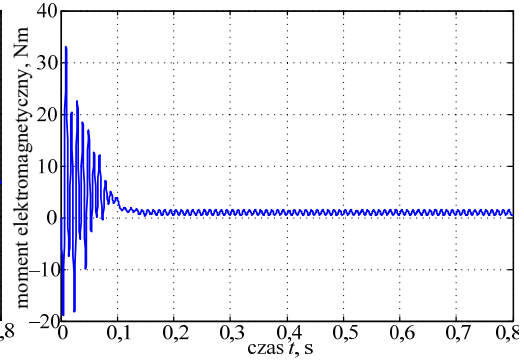
Wytwarzany przez silnik moment elektromagnetyczny jest pokazany na rys. 2.33. Widać, że w fazie rozruchu przebieg ten jest bardzo nieregularny, przyjmując duże wartości chwilowe. W stanie ustalonym widoczne są także zakłócenia w postaci składowej o charakterze drugiej harmonicznej częstotliwości sieciowej.

Zmiana momentu obciążenia silnika M_m jest pokazana na rys. 2.34. Zgodnie z przyjętym modelem obciążenia, wielkość ta jest nieliniową funkcją prędkości obrotowej, w której podstawowym parametrem jest wykładnik w . Zmiana prędkości obrotowej silnika w rozpatrywanym okresie jest pokazana na rys. 2.35. Można zauważyć, że ogólny kształt przebiegów momentu obciążenia oraz prędkości obrotowej, jest podobny.

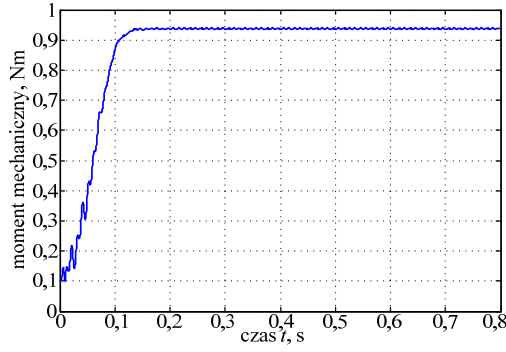
Model silnika określony zależnościami (2.43) może być zmodyfikowany w celu wyeliminowania strumieni magnetycznych. Jeśli zależności prądowe (2.45) podstawimy do (2.44) i wynik tego podstawienia zastosujemy do (2.43), to po prostych przekształceniach uzyskamy równania dynamiki rozważanego silnika względem prądów:



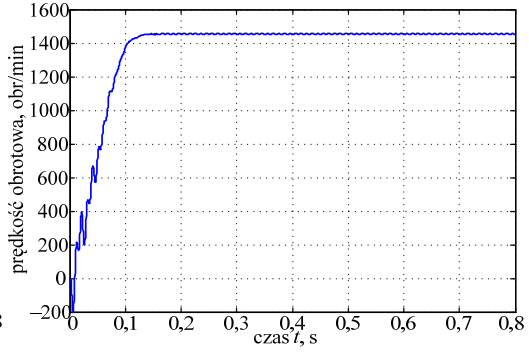
Rys. 2.32. Przebiegi prądów w uzwojeniu wirnika odniesione do wirnika silnika



Rys. 2.33. Moment elektromagnetyczny wytwarzany przez silnik



Rys. 2.34. Przebieg momentu obciążenia silnika



Rys. 2.35. Przebieg prędkości obrotowej wirnika silnika

$$\begin{aligned}
 \frac{di_{sa}}{dt} &= \frac{L_{ma}(R_{ra}i_{ra} + \omega_r(L_{rb}i_{rb} + L_{mb}i_{sb})a) + L_{ra}(u_{sa} - R_{sa}i_{sa})}{L_{sa}L_{ra} - L_{ma}^2} \\
 \frac{di_{sb}}{dt} &= \frac{L_{mb}(R_{rb}i_{rb} + \omega_r(L_{ra}i_{ra} + L_{ma}i_{sa})/a) + L_{rb}(u_{sb} - R_{sb}i_{sb})}{L_{sb}L_{rb} - L_{mb}^2} \\
 \frac{di_{ra}}{dt} &= \frac{L_{ma}(R_{sa}i_{sa} - u_{sa}) - L_{sa}(\omega_r(L_{rb}i_{rb} + L_{mb}i_{sb})a + R_{ra}i_{ra})}{L_{sa}L_{ra} - L_{ma}^2} \\
 \frac{di_{rb}}{dt} &= \frac{L_{mb}(R_{sb}i_{sb} - u_{sb}) + L_{sb}(\omega_r(L_{ra}i_{ra} + L_{ma}i_{sa})/a - R_{rb}i_{rb})}{L_{sb}L_{rb} - L_{mb}^2}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

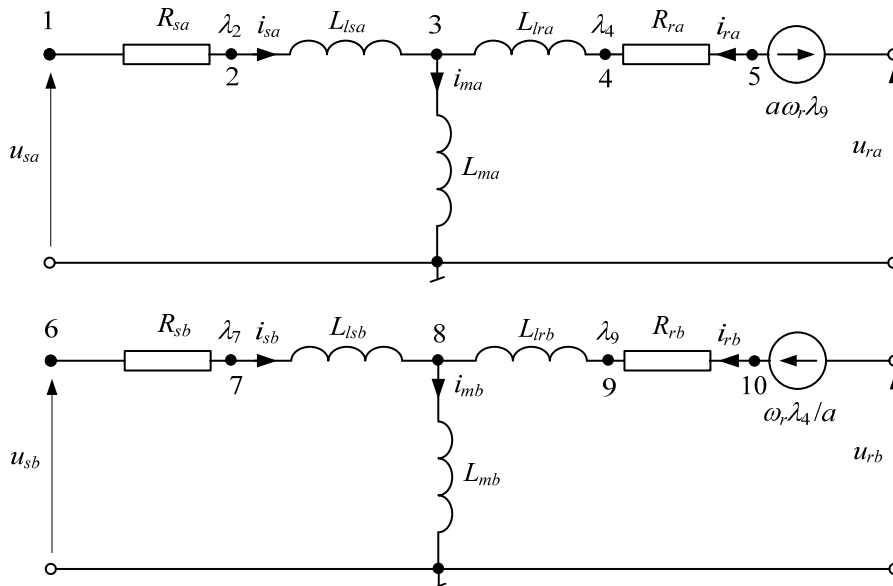
Łącznie z modelem części mechanicznej silnika (2.47), (2.48), równania (2.51) tworzą model dwufazowego silnika indukcyjnego, w którym część elektryczna jest określona względem prądów maszyny. Do wyznaczenia strumieni magnetycznych można skorzystać z zależności (2.44).

Na tej podstawie został opracowany model w programie Matlab/Simulink, który został umieszczony w pliku `silnik_2_fazowy_prad.mdl`.

Przed uruchomieniem modelu w programie Simulink, należy uruchomić skrypt zawierający parametry modelu: `silnik_2_fazowy_f50.m` – z danymi silnika niesymetrycznego lub: `silnik_2_fazowy_f50_sym.m` – z danymi silnika symetrycznego. Użytkownik może także przygotować własny program z parametrami symulacji.

Przykład 2.11. Korzystając z danych zawartych w przykładzie 2.10, określić model matematyczny silnika indukcyjnego dwufazowego zgodnie z formalizmem Lagrange’a według metody węzłowej i opracować model symulacyjny z zastosowaniem programu Matlab/Simulink. Przyjąć także te same parametry silnika, obciążenia i schematu zastępczego (rys. 2.27).

Skorzystamy z modelu części elektrycznej silnika, który został utworzony w stacjonarnym układzie współrzędnych, jak na rys. 2.28. W celu wyróżnienia poszczególnych węzłów schematu zastępczego, został on zmodyfikowany do postaci, jak na rys. 2.36, gdzie wyraźnymi kropkami zaznaczono węzły sieci. Pamiętajmy, że w tym przypadku, współrzędne w modelu obwodu elektrycznego są związane ze strumieniami elektromagnetycznymi, które są wyznaczane jako całki napięcia względem czasu. W celu nawiązania do opisu metody węzłowej (str. 53), te współrzędne będziemy również oznaczać literą λ z indeksem, wskazującym na numer węzła sieci. Na rys. 2.36 oznaczono strumienie związane z węzłami 2, 4, 7 oraz 9, które są charakterystyczne dla przyjętego układu współrzędnych stacjonarnych.



Rys. 2.36. Schemat zastępczy silnika dwufazowego z wyróżnionymi węzłami

W układzie elektrycznym występuje dziesięć węzłów, przy czym, analizując obie sieci z rys. 2.36 możemy zauważyć, że z punktu widzenia formułowania równań dynamiki, węzły: 3 oraz

8 nie są niezależne, gdyż wszystkie dochodzące do nich gałęzie zawierają indukcyjności [40]. Tymczasem jednak pominiemy tę uwagę i przystąpimy do tworzenia równań sieci zgodnie z metodą węzłową, przyjmując następujące współrzędne: λ_i , $i = 1 \dots 10$, które łączą się z fizycznymi wielkościami występującymi w układzie i reprezentują strumienie elektromagnetyczne, co wynika z przyjętej dalej metody węzłowej formułowania równań Lagrange'a sieci elektrycznej [50]. Ponadto, w części mechanicznej można wyróżnić jedną współrzędną: $\lambda_{11} = \gamma_r$, która, podobnie, jak w poprzednim modelu, reprezentuje kąt położenia wirnika. Mamy więc łącznie 11 współrzędnych, dla których można zapisać następujące równania modelu Lagrange'a, których elementy odnoszą się do energii kinetycznej, potencjalnej oraz energii strat:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\lambda}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial E_p}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_j} = F_j, j = 1, 2, \dots, 11 \quad (2.52)$$

Można zauważyć, że w części elektrycznej modelu nie występują kondensatory, więc:

$$E_k(\lambda_j) = 0, j = 1, 2, \dots, 10, \quad E_k(\lambda_{11}) = \frac{1}{2} J_r \dot{\lambda}_{11}^2$$

Energia potencjalna jest związana z energią zgromadzoną w indukcyjnościach:

$$E_p = \frac{1}{2L_{lsa}}(\lambda_2 - \lambda_3)^2 + \frac{1}{2L_{ma}}\lambda_3^2 + \frac{1}{2L_{lra}}(\lambda_4 - \lambda_3)^2 + \frac{1}{2L_{lsb}}(\lambda_7 - \lambda_8)^2 + \frac{1}{2L_{mb}}\lambda_8^2 + \frac{1}{2L_{lrb}}(\lambda_9 - \lambda_8)^2 = 0$$

Energia strat:

$$E_R = \frac{1}{2R_{sa}}(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2)^2 + \frac{1}{2R_{ra}}(\dot{\lambda}_5 - \dot{\lambda}_4)^2 + \frac{1}{2R_{sb}}(\dot{\lambda}_6 - \dot{\lambda}_7)^2 + \frac{1}{2R_{rb}}(\dot{\lambda}_{10} - \dot{\lambda}_9)^2 + \frac{1}{2}\mu_r \dot{\lambda}_{11}^2$$

W czterech węzłach sieci: 1, 5, 6 i 10 można bezpośrednio obliczyć strumień elektromagnetyczny na podstawie przyłączonych źródeł napięciowych (2.39). Ostatecznie, podstawiając powyższe zależności do (2.52), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\lambda}_{11}} &= J_r \dot{\lambda}_{11} = J_r \omega_r \\ \dot{\lambda}_1 &= u_{sa} \\ \frac{\partial E_p}{\partial \lambda_2} &= \frac{1}{L_{lsa}}(\lambda_2 - \lambda_3), \quad \frac{\partial E_p}{\partial \lambda_3} = -\frac{1}{L_{lsa}}(\lambda_2 - \lambda_3) + \frac{1}{L_{ma}}\lambda_3 - \frac{1}{L_{lra}}(\lambda_4 - \lambda_3), \quad \frac{\partial E_p}{\partial \lambda_4} = \frac{1}{L_{lra}}(\lambda_4 - \lambda_3), \\ \dot{\lambda}_5 &= -a\omega_r\lambda_9, \quad \dot{\lambda}_6 = u_{sb}, \\ \frac{\partial E_p}{\partial \lambda_7} &= \frac{1}{L_{lsb}}(\lambda_7 - \lambda_8), \quad \frac{\partial E_p}{\partial \lambda_8} = -\frac{1}{L_{lsb}}(\lambda_7 - \lambda_8) + \frac{1}{L_{mb}}\lambda_8 - \frac{1}{L_{lrb}}(\lambda_9 - \lambda_8), \quad \frac{\partial E_p}{\partial \lambda_9} = \frac{1}{L_{lrb}}(\lambda_9 - \lambda_8), \\ \dot{\lambda}_{10} &= \frac{1}{a}\omega_r\lambda_4 \\ \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_1} &= \frac{1}{R_{sa}}(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2), \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_2} = -\frac{1}{R_{sa}}(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2), \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_4} = -\frac{1}{R_{ra}}(\dot{\lambda}_5 - \dot{\lambda}_4), \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_5} = \frac{1}{R_{ra}}(\dot{\lambda}_5 - \dot{\lambda}_4), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_6} = \frac{1}{R_{sb}}(\dot{\lambda}_6 - \dot{\lambda}_7), \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_7} = -\frac{1}{R_{sb}}(\dot{\lambda}_6 - \dot{\lambda}_7), \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_9} = -\frac{1}{R_{rb}}(\dot{\lambda}_{10} - \dot{\lambda}_9), \quad \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_{10}} = \frac{1}{R_{rb}}(\dot{\lambda}_{10} - \dot{\lambda}_9),$$

$$\frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_{11}} = \mu_r \dot{\lambda}_{11} = \mu_r \omega_r,$$

skąd:

$$\dot{\lambda}_1 = u_{sa}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_2} = \frac{1}{L_{lsa}}(\lambda_2 - \lambda_3) - \frac{1}{R_{sa}}(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) = \frac{1}{L_{lsa}}(\lambda_2 - \lambda_3) - \frac{1}{R_{sa}}(u_{sa} - \dot{\lambda}_2) = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \lambda_3} = -\frac{1}{L_{lsa}}(\lambda_2 - \lambda_3) + \frac{1}{L_{ma}}\lambda_3 - \frac{1}{L_{lra}}(\lambda_4 - \lambda_3) = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \lambda_4} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_4} = \frac{1}{L_{lra}}(\lambda_4 - \lambda_3) - \frac{1}{R_{ra}}(\dot{\lambda}_5 - \dot{\lambda}_4) = 0$$

$$\dot{\lambda}_6 = u_{sb} \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \lambda_7} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_7} = \frac{1}{L_{lsb}}(\lambda_7 - \lambda_8) - \frac{1}{R_{sb}}(\dot{\lambda}_6 - \dot{\lambda}_7) = \frac{1}{L_{lsb}}(\lambda_7 - \lambda_8) - \frac{1}{R_{sb}}(u_{sb} - \dot{\lambda}_7) = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \lambda_8} = -\frac{1}{L_{lsb}}(\lambda_7 - \lambda_8) + \frac{1}{L_{mb}}\lambda_8 - \frac{1}{L_{lrb}}(\lambda_9 - \lambda_8) = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \lambda_9} + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_9} = \frac{1}{L_{lrb}}(\lambda_9 - \lambda_8) - \frac{1}{R_{rb}}(\dot{\lambda}_{10} - \dot{\lambda}_9) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\lambda}_{11}} \right) + \frac{\partial E_R}{\partial \dot{\lambda}_{11}} = J_r \ddot{\lambda}_{11} + \mu_r \dot{\lambda}_{11} = J_r \dot{\omega}_r + \mu_r \omega_r = M_e - M_m$$

Ponadto, dla przyjętego modelu silnika ze stacjonarnym układem współrzędnych ($\omega = 0$ w (2.42)), otrzymujemy:

$$\dot{\lambda}_5 = -a\omega_r\lambda_9 = -a\omega_r\psi_{rb}, \quad \dot{\lambda}_{10} = \frac{1}{a}\omega_r\lambda_4 = \frac{1}{a}\omega_r\psi_{ra},$$

gdzie: ψ_{ra} , ψ_{rb} są strumieniami elektromagnetycznymi z modelu w przykładzie 2.10, co oznacza, że: $\psi_{ra} = \lambda_4$, $\psi_{rb} = \lambda_9$.

W uzyskanych równaniach są ukryte ważne zależności:

$$i_{sa} = \frac{1}{L_{lsa}}(\lambda_2 - \lambda_3) = \frac{1}{L_{sa} - L_{ma}}(\lambda_2 - \lambda_3), \quad i_{sb} = \frac{1}{L_{lsb}}(\lambda_7 - \lambda_8) = \frac{1}{L_{sb} - L_{mb}}(\lambda_7 - \lambda_8),$$

$$i_{ra} = \frac{1}{L_{lra}}(\lambda_4 - \lambda_3) = \frac{1}{L_{ra} - L_{ma}}(\lambda_4 - \lambda_3), \quad i_{rb} = \frac{1}{L_{lrb}}(\lambda_9 - \lambda_8) = \frac{1}{L_{rb} - L_{mb}}(\lambda_9 - \lambda_8), \tag{2.54}$$

przy czym:

$$\lambda_3 = \frac{L_{ma}((L_{ra} - L_{ma})\lambda_2 - (L_{sa} - L_{ma})\lambda_4)}{L_{sa}L_{ra} - L_{ma}^2}, \quad \lambda_8 = \frac{L_{mb}((L_{rb} - L_{mb})\lambda_7 - (L_{sb} - L_{mb})\lambda_9)}{L_{sb}L_{rb} - L_{mb}^2}, \tag{2.55}$$

co jest zgodne z wcześniejszą uwagą, że strumienie elektromagnetyczne w węzłach 3 i 8 nie są niezależne, więc można je wyznaczyć na podstawie znajomości strumieni w innych węzłach sieci. Podstawienie (2.55) do (2.54) prowadzi do:

$$\begin{aligned} i_{sa} &= \frac{L_{ra}\lambda_2 - L_{ma}\lambda_4}{L_{sa}L_{ra} - L_{ma}^2}, & i_{sb} &= \frac{L_{rb}\lambda_7 - L_{mb}\lambda_9}{L_{sb}L_{rb} - L_{mb}^2}, \\ i_{ra} &= \frac{L_{sa}\lambda_4 - L_{ma}\lambda_2}{L_{sa}L_{ra} - L_{ma}^2}, & i_{rb} &= \frac{L_{sb}\lambda_9 - L_{mb}\lambda_7}{L_{sb}L_{rb} - L_{mb}^2} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Można zauważyć, że powyższe zależności pozwalają określić prądy stojana i wirnika w zależności od strumieni magnetycznych, podobnie, jak w (2.45).

W ten sposób, uzyskane równania silnika można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 &= u_{sa} - R_{sa} \frac{L_{ra}\lambda_2 - L_{ma}\lambda_4}{L_{sa}L_{ra} - L_{ma}^2}, & \dot{\lambda}_4 &= -R_{ra} \frac{L_{sa}\lambda_4 - L_{ma}\lambda_2}{L_{sa}L_{ra} - L_{ma}^2} - a\omega_r\lambda_9, \\ \dot{\lambda}_7 &= u_{sb} - R_{sb} \frac{L_{rb}\lambda_7 - L_{mb}\lambda_9}{L_{sb}L_{rb} - L_{mb}^2}, & \dot{\lambda}_9 &= -R_{rb} \frac{L_{sb}\lambda_9 - L_{mb}\lambda_7}{L_{sb}L_{rb} - L_{mb}^2} + \omega_r\lambda_4 / a, \\ \dot{\omega}_r &= \frac{P}{J_r} (-\mu_r\omega_r + M_e - M_m), \end{aligned} \quad (2.57)$$

gdzie moment elektromagnetyczny może być także wyrażony za pomocą strumieni:

$$M_e = \frac{P}{(L_{sa}L_{ra} - L_{ma}^2)(L_{sb}L_{rb} - L_{mb}^2)} (L_{mb}(L_{rb}\lambda_7 - L_{mb}\lambda_9)(L_{sa}\lambda_4 - L_{ma}\lambda_2) - L_{ma}(L_{ra}\lambda_2 - L_{ma}\lambda_4)(L_{sb}\lambda_9 - L_{mb}\lambda_7))$$

a pozostałe wielkości, jak w (2.45) - (2.48).

Zauważmy, że w modelu (2.57) nie występują prądy; można je wyznaczyć na podstawie strumieni magnetycznych, zgodnie z (2.56).

Na podstawie powyższej analizy został opracowany model symulacyjny rozpatrywanego silnika w programie Matlab/Simulink - plik `silnik_2_fazowy_wezel.mdl`. Parametry symulacji są przekazywane do procedur modelu za pośrednictwem pamięci podręcznej *Workspace*, więc przed rozpoczęciem symulacji należy uruchomić program `silnik_2_fazowy_f50.m`. Rezultaty symulacji są identyczne, jak w przykładzie 2.10.

Analiza pracy indukcyjnego silnika 2-fazowego pokazuje, że pomimo prostej konstrukcji, ma on dobre właściwości dynamiczne, które można łatwo modyfikować i dzięki temu bywa on często stosowany w układach mechatronicznych¹⁶. Do celów sterowania układami napędowymi z takimi silnikami można łatwo utworzyć odpowiednie układy zasilania z zastosowaniem przekształtników energoelektronicznych¹⁷.

¹⁶ PRAŽENICA M. et al, *Design, Modelling and Simulation of Two-phase Twostage Electronic System with Orthogonal Output for Supplying of Two-phase ASM*. Advances in Electrical and Electronic Engineering, Vol. 9, No. 1, March 2011, pp. 56 – 64.

¹⁷ BLAABJERG F., LUNGEANU F., SKAUG K., TONNES M., *Two-Phase Induction Motor Drives*. Industry Application Magazine, IEEE, vol. 10, No 4, pp. 24-32, July-Aug. 2004.

2.6. Zadania

- 2.1. Co oznacza termin: równoważność modeli. Podać przykłady modeli równoważnych.
- 2.2. Bezwładność maszyn elektrycznych jest często określana za pomocą stałej inercji H . Wyjaśnić fizyczne znaczenie tej wielkości i jej odniesienie do momentu bezwładności (przykład 2.2).
- 2.3. Modele układów dynamicznych są przedstawiane w postaci równań różniczkowych. Wyjaśnić fizyczne rozróżnienie procesów przedstawianych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi i cząstkowymi.
- 2.4. Przedstawić model obwodu elektrycznego w postaci szeregowego połączenia elementów RLC w postaci zmiennych stanu.
- 2.5. Prosty drgający układ mechaniczny jest przedstawiony równaniem:

$$f(t) = \mu v(t) + m \frac{dv(t)}{dt} + k \int v(t) dt$$

Podać odpowiadający mu układ równań stanu.

- 2.6. Korzystając z modelu sieci z przykładu 2.8, przeprowadzić symulację stanu dynamicznego w przypadku, gdy napięcie $e(t)$ jest stałe o wartości 48 V, natomiast źródło prądowe jest określone przez następującą funkcję: $j(t) = 5 \cdot \exp(-t/0,02)$. Oba źródła są załączane w momencie rozpoczęcia symulacji. Uzupełnić schemat modelu tak, aby można było rejestrować zmianę napięcia u_j na gałęzi ze źródłem prądowym (rys. 2.21). Zbadać, jak zmienia się charakter przebiegów przy zmianie wartości początkowej prądu i_L .
- 2.7. Posługując się programem Matlab/Simulink można łatwo utworzyć model dynamiczny sieci bezpośrednio na podstawie jej schematu (z zastosowaniem narzędzi *toolbox*): *SimElectronics* lub *SimPowerSystems*). Stosując to podejście, opracować model obwodu z przykładu 2.8 (rys. 2.24). Porównać otrzymane w ten sposób wyniki z rezultatami zamieszczonymi w przykładzie 2.8.
- 2.8. Korzystając z modelu silnika 2-fazowego z przykładu 2.10, przeprowadzić symulację silnika symetrycznego, zakładając zmianę niektórych parametrów w pliku `silnik_2_fazowy_f50.m` (Dodatek): $a = 1$, $R_{sa} = R_{sb}$, $R_{ra} = R_{rb}$, $L_{sa} = L_{sb}$, $L_{ra} = L_{rb}$, $L_{ma} = L_{mb}$.
- 2.9. Zbadać właściwości mechaniczne napędu z przykładu 2.10 przez analizę charakterystyki momentu silnika względem prędkości obrotowej: $T_e = f(n)$ dla różnych wartości znamionowego momentu obciążenia: $M_{mn} = 1, 2, 3, 4, 5$ Nm (zmiany przeprowadzić w pliku `silnik_2_fazowy_f50.m`).

3. MODELE DRGAŃ

3.1. Wprowadzenie

Analiza drgań ma podstawowe znaczenie w teorii systemów dynamicznych i w technice. Ich modelowanie jest być może zasadniczym sposobem poznawania otaczającej nas rzeczywistości i wyciągania stąd stosownych wniosków, zarówno co do zachodzących wokół procesów, jak i ich wykorzystania. Dynamika systemów jest odtwarzana za pomocą modeli zależnych od czasu. W ogólnym przypadku, czas może być reprezentowany w postaci ciągłej lub dyskretniej. W zależności od tego, stosowne modele są formułowane w postaci równań różniczkowych (czas ciągły) lub równań różnicowych (czas dyskretny). Historia rozwoju obu tych gałęzi dynamiki jest różna, co jest głównie związane z dostępnością odpowiednich narzędzi analitycznych i obliczeniowych. Modele tworzone w oparciu o równania różniczkowe pojawiły się wraz ze sformułowaniem przez Newtona i Leibniza podstaw rachunku różniczkowego i całkowego, podczas, gdy szerokie zastosowanie modeli dynamicznych czasu dyskretnego stało się możliwe wraz z rozwojem techniki mikroprocesorowej.

Rezultaty bardzo żywiołowego rozwoju analitycznych metod reprezentacji systemów dynamicznych doprowadziły do ich uporządkowania, co było głównie związane z rozwojem teorii równań różniczkowych. Poniżej przeprowadzony jest przegląd podstawowych pojęć w tym zakresie. Czytelnik może pogłębić te informacje na podstawie bardzo obszernej literatury, traktującej omawiane zagadnienia od strony teoretycznej [2], [47], [48] oraz w zakresie aplikacji do analizy systemów [3], [9], [11], [22], [41].

W odniesieniu do systemów liniowych stosowane są dobrze poznane, uniwersalne narzędzia analityczne, które pozwalają badać ich stabilność oraz różnorodne charakterystyki w dziedzinie czasu i częstotliwości. Podstawowe znaczenie mają tu metody związane z rachunkiem operatorowym: przekształcenie Laplace'a w odniesieniu do systemów ciągłych oraz jego odmiana – przekształcenie Z – stosowane w odniesieniu do systemów dyskretnych. W przeciwieństwie do tego, narzędzia badania systemów nieliniowych są często ograniczone do ściśle określonej grupy systemów. Ponadto w ostatnim czasie znaczną uwagę zwraca się na dynamiczne systemy nieliniowe, których opis wykracza poza tradycyjnie stosowane podejście. Do ich zrozumienia często stosuje się różne techniki modelowania i symulacji. Krótkiemu przeglądowi tych właśnie zagadnień poświęcony jest bieżący rozdział.

3.2. Matematyczne modele drgań

3.2.1. Równania różniczkowe pierwszego rzędu

W celu omówienia podstawowych właściwości rachunku różniczkowego, jako analitycznego narzędzia do opisu systemów dynamicznych, wróćmy do przykładu odnoszącego się do obwodu elektrycznego, omawianego na początku poprzedniego rozdziału. Jeśli zredukujemy obwód z rys. 2.1 b do elementów RL, to przy braku napięcia zasilającego, przebieg prądu w uzyskanym obwodzie będzie zapisany następującą zależnością:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0 \quad \text{lub:} \quad \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) = 0, \quad (3.1)$$

z warunkiem początkowym: $i(0) = i_0$.

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie równania (3.1) przyjmuje następującą postać:

$$i(t) = e^{-tR/L} i(0), \quad (3.2)$$

przy czym warto rozpatrywać takie przypadki, dla których $i(0) \neq 0$.

W bardziej ogólnej formie rozwiązanie (3.2) można zapisać w następującej postaci:

$$x(t) = e^{\lambda t} v, \quad (3.3)$$

która odpowiada równaniu: $\dot{x} = \lambda x$, dla warunków początkowych: $i(0) = v$, natomiast $\lambda = -R/L$.

Równanie (3.1) jest nazywane równaniem różniczkowym jednorodnym, które odwzorowuje dynamikę układu, w którym nie występuje zewnętrzne wymuszenie. Stan przejściowy może tu wystąpić za sprawą różnego od zera warunku początkowego. Zagadnienie to można rozszerzyć o stałe napięcie zasilające rozpatrywany obwód. Otrzymamy wówczas następujące równanie napięciowe:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U, \quad (3.4)$$

co prowadzi do następującego równania różniczkowego:

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}U \quad (3.5)$$

W tym przypadku rozwiązanie jest utworzone przez sumę rozwiązania równania niejednorodnego (odpowiedź swobodna) oraz rezultatu wymuszenia:

$$i(t) = i(0)e^{-tR/L} + U/R.$$

W rozpatrywanym zagadnieniu czas (w ogólnym przypadku – zmienna niezależna) nie występuje w jawnej postaci. Układy opisane takimi równaniami nazywamy układami autonomicznymi. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z układami nieautonomicznymi. Ich zachowanie jest w dużym stopniu zależne od zewnętrznego wymuszenia, które jest określone przez funkcje zależne od czasu. Na przykład, założymy, że wymuszenie w (3.4) ma charakter funkcji okresowej:

$$u = u(t) = U \sin(\omega t),$$

co prowadzi do następującego równania różniczkowego liniowego, niejednorodnego:

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{R}U \sin(\omega t) \quad (3.6)$$

Dla takich równań można łatwo uzyskać rozwiązanie analityczne [11], [41]. W tym przypadku otrzymamy:

$$i(t) = -\frac{R}{L}i(0)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R^2 + (\omega L)^2}(\omega L \cos(\omega t) - R \sin(\omega t)) \quad (3.7)$$

Układ nieautonomiczny można sprowadzić do układu autonomicznego przez włączenie zewnętrznego, zależnego od czasu wymuszenia do układu. Na przykład, w układzie (3.6) zmienna t przedstawiająca czas, może być reprezentowana przez nową zmienną y , która rozszerza liczbę zmiennych systemu:

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{R}U \sin(\omega y) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Zapis (3.8) przedstawia równania różniczkowe zmiennych stanu. Można je zapisać w następującej formie macierzowej:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{R}U \sin(y(t)) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(i(t), y(t)) \\ f_2(i(t), y(t)) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Jest to więc układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu. Funkcje po prawej stronie nie są bezpośrednio zależne od czasu, a zatem mamy do czynienia z układem autonomicznym.

3.2.2. Układy drugiego rzędu

W przypadku liniowym, równania drugiego rzędu w formie zmiennych stanu mają następującą postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), y(t)) \\ f_2(x(t), y(t)) \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

gdzie parametry a, b, c, d są stałymi.

Przyrównanie powyższego układu równań do zera oznacza, że poszukujemy rozwiązania, dla którego znikają pochodne zmiennych:

$$\begin{aligned} ax(t) + by(t) &= f_1(x(t), y(t)) = 0 \\ cx(t) + dy(t) &= f_2(x(t), y(t)) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Rozwiązanie tego układu równań określa punkty o współrzędnych (x, y) , w których występuje równowaga (ang. *equilibrium*) systemu reprezentowanego przez te równania. Można zauważyć, że w przypadku liniowym początek układu współrzędnych: $(x, y) = (0, 0)$ jest takim punktem równowagi.

Równania (3.10) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (3.12)$$

gdzie: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Przez analogię do (3.3), rozwiązanie równania (3.12) można zapisać następująco:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \quad (3.13)$$

co jest liniową kombinacją rozwiązań obu równań składowych.

Można pokazać [48], że dla przypadku, gdy \mathbf{A} jest macierzą niezerową: $\mathbf{A} \neq 0$, zerowy punkt równowagi (początek układu współrzędnych) występuje dla przypadku: $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, natomiast pozostałe (niezerowe) punkty równowagi można określić z warunku: $\det(\mathbf{A}) = 0$. Wielkości (λ_1, λ_2) są wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} , które spełniają równanie charakterystyczne:

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0, \quad (3.14)$$

Wielkości $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ są wektorami własnymi macierzy \mathbf{A} , które są związane z odpowiednimi wartościami własnymi, spełniającymi równanie:

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

odpowiednio dla $\lambda = \lambda_1$ oraz $\lambda = \lambda_2$.

Współczynniki c_1, c_2 spełniają równanie (3.13) dla warunków początkowych: $(x_0, y_0), t = 0$, co odpowiada zależności:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 \quad (3.16)$$

Stosowanie przedstawionej metody rozwiązywania równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu ilustruje kolejny przykład.

Przykład 3.1. Rozwiązać układ równań różniczkowych:

$$\dot{x} = x + y$$

$$\dot{y} = 4x - 2y$$

dla warunków początkowych: $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

Rozważane równania można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Określamy wartości własne macierzy \mathbf{A} :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

skąd: $(\lambda_1, \lambda_2) = (2, -3)$.

Następnie obliczamy wektory własne, spełniające zależności:

$$\text{- dla } \lambda = \lambda_1 = 2: \begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ 4 & -2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ skąd } (v_1, v_2) = (1, 1) \text{ oraz wektor uzyskany z}$$

pomnożenia powyższy wynik przez dowolną wartość;

$$\text{- dla } \lambda = \lambda_2 = -3: \begin{bmatrix} 1+3 & 1 \\ 4 & -2+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ skąd } (v_1, v_2) = (1, -4).$$

$$\text{Ostatecznie: } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Współczynniki (c_1, c_2) określamy z (3.16):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ skąd: } (c_1, c_2) = (1, 0.6).$$

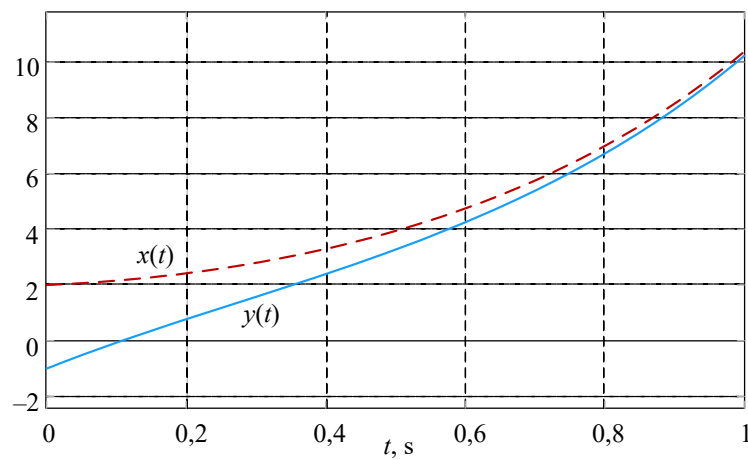
Ostatecznie, rozwiązanie przybiera formę (3.13):

$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = 1,4e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0,6e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, co można zapisać następująco:

$$x(t) = 1,4e^{2t} + 0,6e^{-3t}$$

$$y(t) = 1,4e^{2t} - 2,4e^{-3t}$$

Przebiegi powyższych rozwiązań są pokazane na rys. 3.1. Uzyskane przebiegi narastają nieograniczenie, co jest związane z tym, że pierwsze składniki w powyższych funkcjach mają eksponentialne czynniki o dodatnich wykładnikach. Jasno widać, że rozpatrywane równania różniczkowe są niestabilne.



Rys. 3.1. Przebiegi funkcji tworzących rozwiązanie równań

Bardziej ogólną charakterystykę rozpatrywanego równania uzyskuje się na podstawie analizy zachowania się przebiegu trajektorii fazowych na płaszczyźnie $y = f(x)$. Można je uzyskać przez wykreślenie tych właśnie funkcji dla różnych warunków początkowych (x_0, y_0) . Przykładowe trajektorie są pokazane na rys. 3.1.

3.3. Modele dynamicznych systemów nieliniowych

System dynamiczny może być przedstawiony za pomocą następującego układu równań (w ogólnym przypadku, równań nieliniowych):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, r), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.17)$$

co można zapisać w postaci wektorowej:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), r), \quad (3.18)$$

przy czym $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T$ jest wektorem stanu układu; r – parametr (zbiór parametrów) układu.

Mówimy, że układ (3.17) jest autonomiczny, gdyż jest bezpośrednio niezależny od czasu (układ stacjonarny). W układzie nieautonomicznym, parametry składowych funkcji \mathbf{f} zależą od czasu: $\mathbf{f} = \{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, r, t), i = 1, 2, \dots, n\}$, co sprawia, że zwiększa się o 1 liczba niewiadomych (zmiennych) procesu. Jeśli uwzględnić tę różnicę, to ogólny opis obu tych systemów jest podobny.

W klasycznej mechanice, system (3.17) jest reprezentowany zgodnie z koncepcją Hamiltona, według której, równania ruchu przyjmują postać, jak w (2.34). Ruch systemu oraz jego wydzielonych składników (na podstawie funkcji Hamiltona), jest określony w $2n$ wymiarowej przestrzeni fazowej (w układzie nieautonomicznym jest to przestrzeń $2n + 1$ – wymiarowa). Mamy tu do czynienia z systemem zachowawczym (konserwatywnym), co oznacza, że w związku z ruchem nie zmienia się jego energia (systemy grawitacyjne, elektrostatyczne). W odróżnieniu od tego, w systemie nie zachowawczym występują opory ruchu (np. tarcie). Zmienia się wówczas liczba stopni swobody (współrzędnych systemu), co objawia się w postaci występowania obszarów przyciągania (atraktorów).

Stan ustalony systemu dynamicznego jest osiągnięty w przypadku, gdy czas jego obserwacji (rozwiązania) dąży do nieskończoności: $t \rightarrow \infty$. Ważną cechą systemu jest osiągnięcie ograniczonego stanu ustalonego, co łączy się z jego stabilnością. Każde rozwiązanie poza stanem ustalonym, opisuje stan przejściowy systemu. Stan ustalony charakteryzuje się występowaniem atraktora: zbioru punktów (ograniczonego obszaru sąsiadujących punktów), w których zamyka się rozwiązanie ruchu systemu. W szczególności, może to być pojedynczy punkt lub obszar przyciągania w n -wymiarowej przestrzeni rozwiązań. W systemach liniowych występuje tylko jeden taki obszar rozwiązań – co sprawia, że stan ustalony nie zależy od warunków początkowych. W odróżnieniu od tego, system nieliniowy może posiadać wiele takich obszarów (punktów), do których może trafić rozwiązanie ustalone w zależności od warunków początkowych.

Atraktory zasadniczo dzieli się na dwa rodzaje: zwyczajne (proste) oraz dziwne. Prosty atraktor może być na płaszczyźnie fazowej punktem równowagi lub cyklem granicznym, który jest charakterystyczny dla układów oscylacyjnych. W systemach nieliniowych mogą występować wielokrotne atraktory. W przypadku wolnej zmiany parametrów systemu będącego w ruchu, obszary (punkty) przyciągania zmieniają się wolno, co zasadniczo nie narusza struktury układu. W niektórych systemach może jednak zachodzić gwałtowna zmiana struktury i obszarów równowagi po osiągnięciu określonych punktów ruchu. Przejście do nowej konfiguracji objawia się w postaci gwałtownej zmiany, zwanej bifurkacją.

Dziwny atraktor jest obszarem przyciągania o bardziej złożonej dynamice. Trajektorie płaszczyzny fazowej charakteryzują się, w takim przypadku, samo-

podobieństwem (powiększony obszar jest podobny do oryginału – fraktal), chaotycznym zachowaniem (brak powtórzeń w czasie), wysoką czułością na zmiany warunków początkowych.

Najpierw jednak zajmiemy się systemami nieliniowymi, które nie wykazują cech chaotycznych.

Przykład 3.2. Dany jest układ nieliniowy o jednym wejściu i jednym wyjściu, który jest opisany następującym układem równań:

$$f(x) = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x^2 + 2x = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + y, \quad y = x^2 + 2x.$$

Wyznaczyć punkty równowagi układu i narysować jego portret fazowy.

Zapisać równanie przetwarzania w postaci zmiennych stanu.

Jak widać, jest to układ autonomiczny. Punkty równowagi określamy z równania części statycznej (gdy wszystkie pochodne są równe zero) [41]:

$$x^2 + 2x = 0.$$

Stąd otrzymujemy: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Równania zmiennych stanu można otrzymać przez podstawienie:

$$w_1 = x$$

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = w_2$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -2w_1 - w_1^2 - 2w_2.$$

W postaci macierzowej przyjmuje to następującą formę:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ -2w_1 - w_1^2 - 2w_2 \end{bmatrix}, \text{ z warunkami początkowymi: } \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1(0)} \\ w_{2(0)} \end{bmatrix}.$$

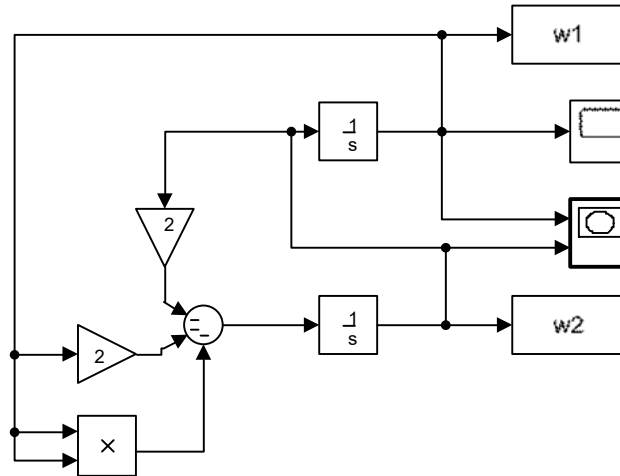
Przyrównując funkcje prawej strony równań stanu do zera otrzymamy punkty równowagi:

$$w_2 = 0,$$

$$-2w_1 - w_1^2 - 2w_2 = 0, \text{ skąd: } w_{11} = 0, w_{12} = -2.$$

Otrzymaliśmy więc dwa punkty równowagi $(w_1, w_2) = (0, 0)$ oraz $(w_1, w_2) = (-2, 0)$. Pierwszy z tych punktów znajduje się w początku układu współrzędnych, więc można bezpośrednio narysować portret fazowy, rozwiązując podane równanie stanu dla warunków początkowych w pobliżu punktu równowagi.

Do rozwiązania równania stanu można posłużyć się programem SIMULINK. Schemat odpowiedniego modelu jest pokazany na rys. 3.2. Zmienne w_1 oraz w_2 służą do przechowywania wyników symulacji przy danych warunkach początkowych, co pozwala na późniejsze wykreślenie kilku przebiegów z różnymi stanami początkowymi na jednym wykresie, co może posłużyć do sporządzenia portretu fazowego dla różnych warunków początkowych.



Rys. 3.2. Model do rozwiązywania równań stanu

Zmieniając warunki początkowe w integratorach dla w_1 oraz w_2 , otrzymamy trajektorie rozwiązań, które są zapisywane w pamięci (*Workspace*). Ich prezentacja na jednym rysunku daje obraz fazowy analizowanego układu (rys. 3.3).

Widać, że punkt $(0, 0)$ jest punktem przyciągającym (atraktorem) rozpatrywanego układu. Drugi punkt równowagi: $(w_1, w_2) = (-2, 0)$ jest przesunięty wzdłuż osi w_1 . W celu otrzymania porównywalnych wyników, należy przesunąć o tę wartość układ współrzędnych, aby jego początek pokrywał się z tym punktem. W tym celu dokonujemy podstawienia:

$$w_1 = w_{1a} - 2$$

Równania stanu z nową zmienną w_{1a} przyjmują następującą postać:

$$\frac{dw_{1a}}{dt} = w_2$$

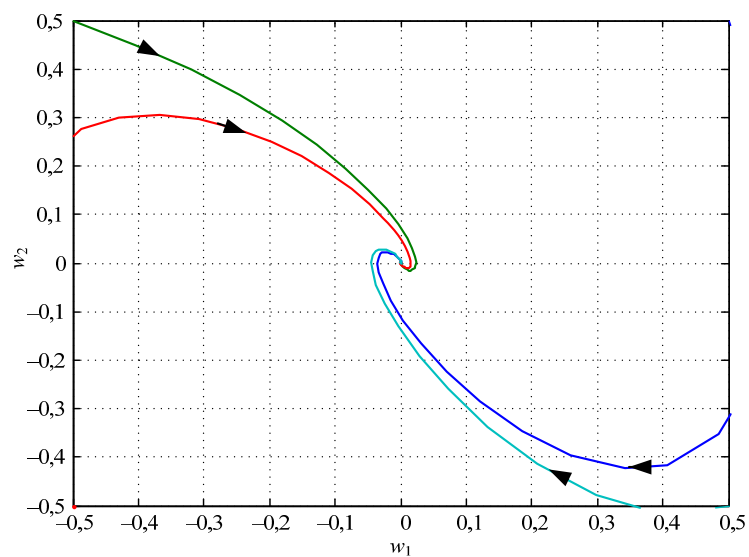
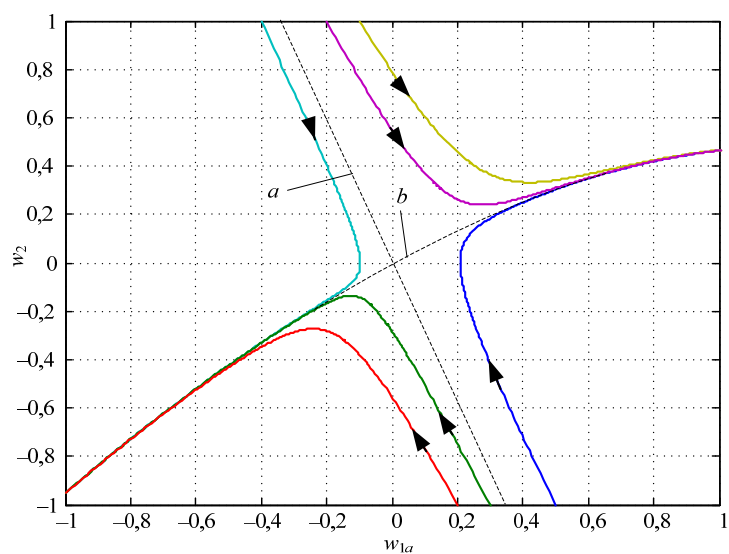
$$\frac{dw_2}{dt} = 2w_{1a} - w_{1a}^2 - 2w_2$$

Można zauważyć, że w tym przesuniętym układzie współrzędnych zmienił się znak składnika w_{1a} w drugim równaniu. Prowadzi to do całkowicie odmiennego portretu fazowego układu w punkcie $(-2, 0)$ (rys. 3.4).

Asymptota a oddziela obszar przyciągania punktu $(w_1, w_2) = (0, 0)$ leżącego po prawej stronie tej asymptoty – na rys. 3.4 jest to punkt $(w_{1a}, w_2) = (1, 0)$ – od obszaru wiodącego do nieskończoności wzdłuż krzywej b (na lewo od początku układu współrzędnych). Z tej analizy widać, że punkt $(w_1, w_2) = (0, 0)$ jest lokalnie stabilny, natomiast punkt $(w_1, w_2) = (-2, 0)$ jest niestabilny.

W miejsce modelu sporządzonego za pomocą programu SIMULINK (rys. 3.2), równania rozpatrywanego układu można także rozwiązywać korzystając z odpowiedniej procedury, tworząc skrypt programu Matlab. Takie właśnie podejście jest prezentowane w programach, które są dostępne w kartotece *Przykład_3_2* na stronie internetowej:

<http://zas.ie.pwr.wroc.pl/ER/PMS/Przyklady/index.html>

Rys. 3.3. Obraz fazowy w otoczeniu punktu $(0, 0)$ Rys. 3.4. Obraz fazowy w otoczeniu punktu $(-2, 0)$, do którego sprowadzony został początek układu współrzędnych

Analiza rozpatrywanych układów nieliniowych w pobliżu punktów równowagi może być prowadzona przez linearyzację równania ruchu – przybliżenie za pomocą

dwóch pierwszych wyrazów rozkładu równania (3.18) w szereg Taylora. Zakładając, że punkt równowagi jest określony przez współrzędne \mathbf{x}_r oraz $\mathbf{f}(\mathbf{x}_r) = 0$, to w układzie autonomicznym, zależność (3.18) przyjmuje następującą postać:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) = \mathbf{A}_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r), \quad (3.19)$$

gdzie $\mathbf{A}_r = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r}$ jest jakobianem systemu (3.18).

W takim przypadku, analizę dynamiki systemu w pobliżu punktów równowagi można prowadzić na podstawie wartości własnych macierzy \mathbf{A}_r :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\Delta \mathbf{x}) \approx \mathbf{A}_r \Delta \mathbf{x}, \quad (3.20)$$

gdzie $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$ – bliskie otoczenie punktu równowagi systemu.

Całkowanie równania (3.20) prowadzi do określenia odpowiedzi czasowej rozpatrywanego systemu w pobliżu punktu równowagi:

$$x_i(t) = C_i e^{\lambda_i t} = C_i e^{(\alpha_i + j\beta_i)t}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.21)$$

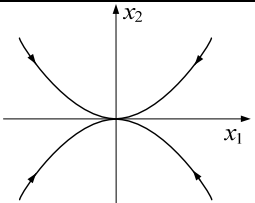
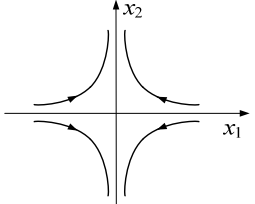
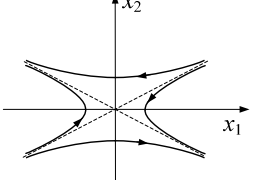
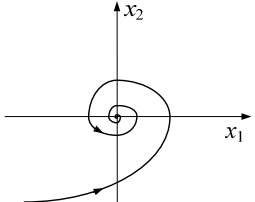
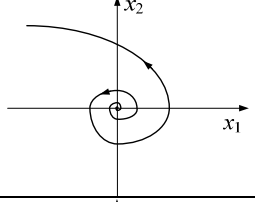
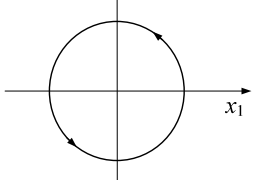
gdzie $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ są wartościami własnymi macierzy \mathbf{A}_r (w nieco innym kontekście są one także nazywane wykładnikami Lapunowa).

Jak widać, zachowanie się odpowiedzi układu w pobliżu punktu równowagi zależy od wartości i charakteru wykładników λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, co jest stosowane do oceny stabilności systemu w otoczeniu tego punktu (pierwsza metoda Lapunowa). W szczególności, system jest stabilny asymptotycznie, gdy części rzeczywiste wszystkich wykładników są ujemne: $\alpha_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Kombinacje wartości własnych macierzy charakterystycznej systemu prowadzą do różnych trajektorii na płaszczyźnie fazowej. W Tabeli 3.1 zebrane są charakterystyczne trajektorie fazowe dla układów II-go rzędu ($n = 2$) [41]. Odpowiadają one uproszczonym warunkom, gdy struktura układu i jego parametry nie ulegają zmianie w czasie.

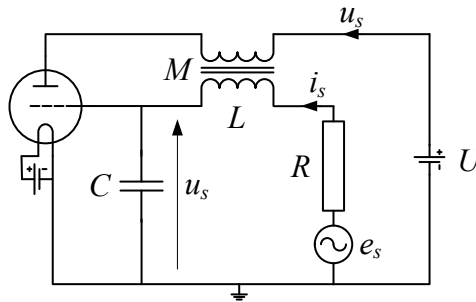
W historii rozwoju badań systemów dynamicznych utworzono wiele standardowych modeli matematycznych, które służą do ilustracji właściwości różnych typowych zjawisk fizycznych. Są one kojarzone z nazwiskami badaczy, którzy je opisali oraz upowszechnili. W dalszej części tego rozdziału są prezentowane niektóre z tych modeli.

Tabela 3.1. Trajektorie fazowe w pobliżu punktów równowagi układów drugiego rzędu

Nr	Położenie pierwiastków	Plaszczyzna fazowa	Rodzaj
1.	oba pierwiastki rzeczywiste, ujemne		węzeł stabilny
2	oba pierwiastki rzeczywiste, dodatnie		węzeł niestabilny
3.	oba pierwiastki rzeczywiste, o różnych znakach		siodło
4.	pierwiastki zespolone o ujemnych częściach rzeczywistych		ognisko stabilne
5.	pierwiastki zespolone o dodatnich częściach rzeczywistych		ognisko niestabilne
6.	pierwiastki zespolone o zerowych częściach rzeczywistych (urojone)		centrum (środek)

3.4. Równanie Van der Pola

Równanie Van der Pola¹⁸ opisuje oscylacje w układzie elektronicznym ze wzmacniaczem (oryginalnie z zastosowaniem lampy typu trioda – rys. 3.5).



Rys. 3.5. Oscylator elektroniczny Van der Pola

Przy założeniu, że charakterystyka magnesowania rdzenia transformatora jest aproksymowana wielomianem trzeciego stopnia, dynamika układu jest określona za pomocą następującego równania nieliniowego:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \mu(1 - y^2) \frac{dy}{dt} + y = 0, \quad (3.22)$$

gdzie μ – współczynnik tłumienia.

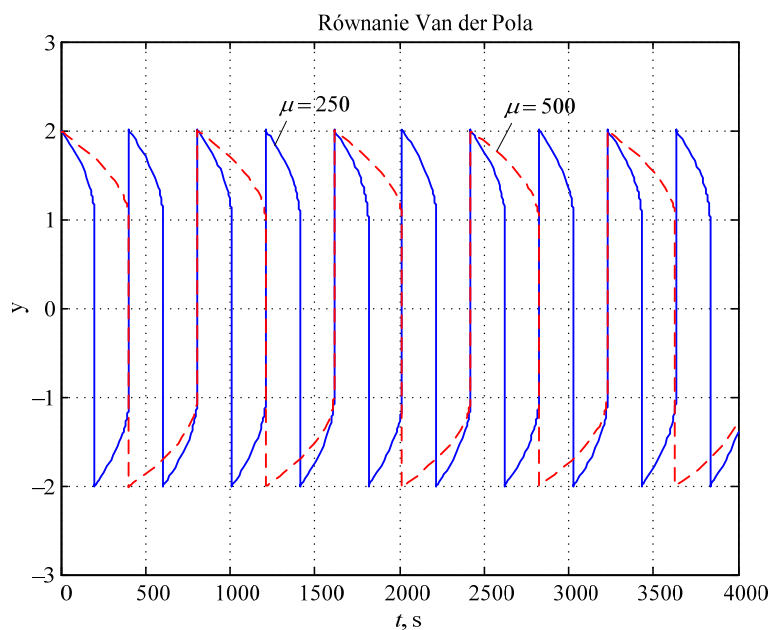
Równanie (3.22) można zapisać w postaci układu równań pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu(x - y^2 x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{x}{\mu} \end{aligned} \quad (3.23)$$

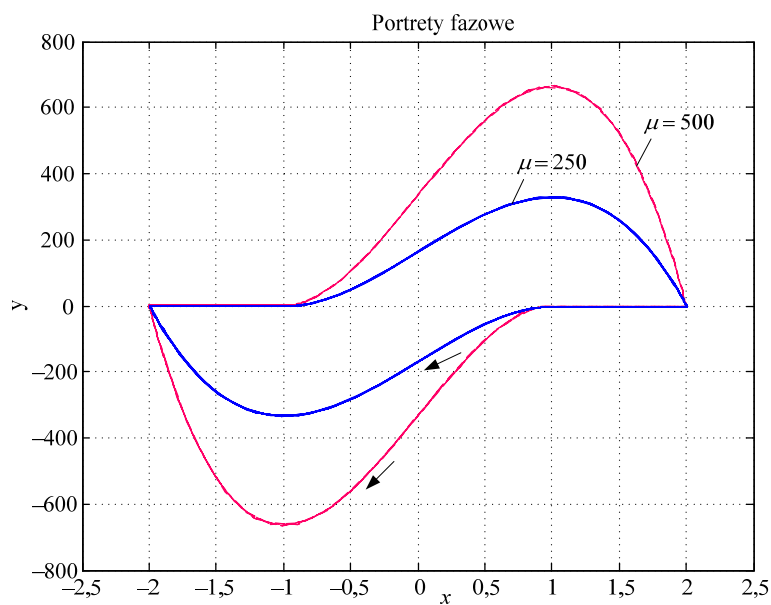
Przebiegi uzyskane z rozwiązania równania dla dwóch różnych wartości współczynnika tłumienia są pokazane na rys. 3.6. Na podstawie (3.23) można otrzymać portret fazowy rozwiązania, co jest przedstawione na rys. 3.7.

Generator Van der Pola ma ważną praktyczną właściwość tłumienia oscylacji o rosnącej amplitudzie i wzmacniania oscylacji tłumionych. Prowadzi to do stabilizacji drgań o ustalonej granicznej amplitudzie. Właściwość ta jest stosowana do odtwarzania zjawisk w różnych dziedzinach techniki, biologii, socjologii, czy ekonomii.

¹⁸ Van der Pol Balthazar (1889 – 1959) – fizyk holenderski, pionier radio- i telekomunikacji.

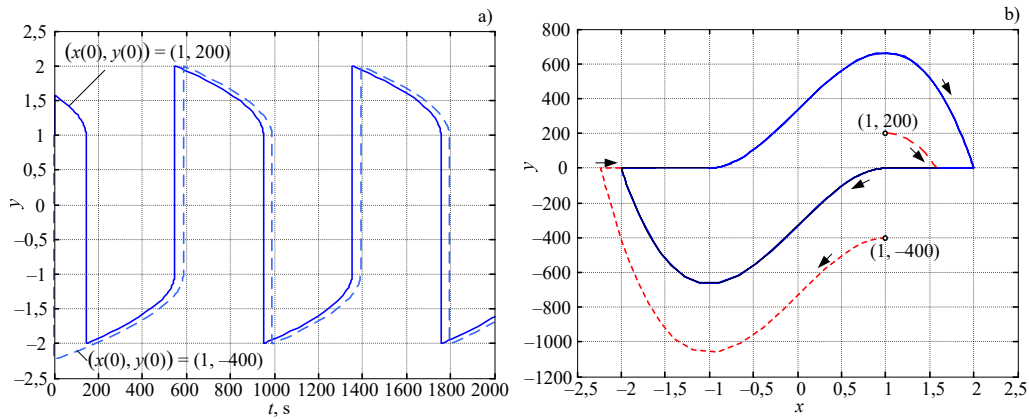


Rys. 3.6. Rozwiązanie równania Van der Pola dla dwóch wartości współczynnika μ



Rys. 3.7. Portrety fazowe dla dwóch wartości współczynnika μ

Wpływ warunków początkowych na stan przejściowy generatora jest pokazany na rys. 3.8. Widać, że generator szybko przechodzi do ustalonych warunków pracy.



Rys. 3.8. Wpływ warunków początkowych na stan przejściowy generatora; $\mu = 500$

Zastosowania generatora można rozszerzyć przez wprowadzenie zewnętrznego wymuszenia (układ nieautonomiczny). Wymaga to uzupełnienia równania (3.22) przez dodanie z prawej strony odpowiedniej funkcji wymuszającej. Najczęściej ma ona postać funkcji harmonicznego, na przykład: $F \cos(\omega t)$.

3.5. Równanie różniczkowe Duffinga

Równanie Duffinga¹⁹ jest często stosowane do opisu drgań układów mechanicznych sprężystych z tłumieniem (sztywna sprężyna, sprężysta belka), a także nieliniowe układy elektroniczne, które podlegają wymuszeniom oscylacyjnym. Ogólna postać równania Duffinga z wymuszeniem okresowym jest następująca:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.24)$$

gdzie parametry równania są odpowiedzialne za poszczególne procesy w modelowanym obiekcie:

δ – współczynnik tłumienia;

β – liniowy współczynnik sztywności;

ω_0^2 – współczynnik oscylacji (własnych);

F – amplituda wymuszenia;

ω – pulsacja wymuszenia.

¹⁹ Georg Duffing (1861 – 1944) – niemiecki inżynier (elektrotechnika i mechanika).

Zależność (3.24) może być przedstawiona w postaci dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu (równania stanu):

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -\omega_0^2 u - \beta u^3 - \delta v + F \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}\quad (3.25)$$

gdzie dwie zmienne (zmienne stanu) mają prostą interpretację fizyczną:

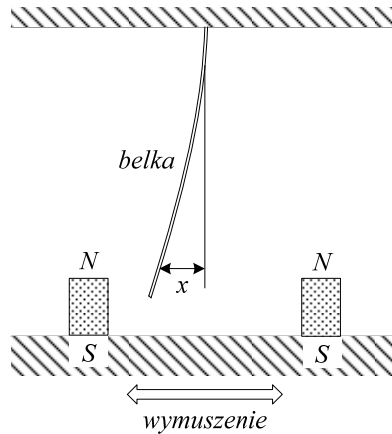
u – przemieszczenie,

v – prędkość.

Rozpatrywany tu problem jest często ilustrowany za pomocą urządzenia z rys. 3.9 [23], gdzie ferromagnetyczna sprężyna (belka) jest pobudzana za pomocą dwóch elektromagnesów. Równanie (3.24) odwzorowuje drgania sprężystej belki pobudzonej przez elektromagnesy.

W zależności od wartości poszczególnych parametrów w (3.24), równanie przyjmuje różne praktyczne formy. Dla parametrów: $\beta = 0$, $\varphi = 0$ oraz przy dodatnim znaku przy współczynniku ω_0^2 , (3.24) przyjmuje następującą formę:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos(\omega t) \quad (3.26)$$



Rys. 3.9. Układ do ilustracji równania Duffinga

Jest to równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach z wymuszeniem oscylacyjnym. Jego rozwiązanie uzyskuje się według standardowych procedur [41]. W tym przypadku otrzymujemy następujący związek:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi), \quad (3.27)$$

który na płaszczyźnie fazowej $(x, v) = (x, x')$ przedstawia elipsę:

$$\left(\frac{x(t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{v(t)}{\omega A}\right)^2 = 1 \quad (3.28)$$

Wartość amplitudy A oraz przesunięcia fazowego ϕ zależą od pulsacji wymuszenia ω :

$$A(\omega) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\delta\omega)^2}}, \quad \operatorname{tg} \phi(\omega) = \frac{\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.29)$$

Pulsacja rezonansowa występuje wówczas, gdy przy zmianie współczynnika tłumienia δ , amplituda $A(\omega) = A(\omega_{\text{rez}})$ przyjmuje największą wartość. Z warunku określenia maksymalnej wartości $A(\omega)$ (3.29), znajdujemy:

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - (\delta/2)^2} \quad (3.30)$$

Widać bezpośrednie powiązanie pulsacji rezonansowej z pulsacją drgań własnych ω_0 oraz z tłumieniem δ . Dla regularnych odstępów czasu: $t = 0, T, 2T, \dots$, gdzie $T = 2\pi/\omega$, odpowiedzi równania układają się w punkty na płaszczyźnie fazowej:

$$(x, v) = (A \cos \phi, -A \sin \phi), \quad (3.31)$$

tworząc tzw. odwzorowanie punktowe albo odwzorowanie (przekrój) Poincarégo²⁰ [25, 29], które jest w tym przypadku zbiorem punktów rozwiązania równania (3.10) dla przyjętego kroku czasowego. Mówi się wówczas, że zbiór punktów rozwiązania powstaje w wyniku ‘stroboskopowego’ (synchronicznego) próbkowania rozwiązania. Ilustruje to kolejny przykład.

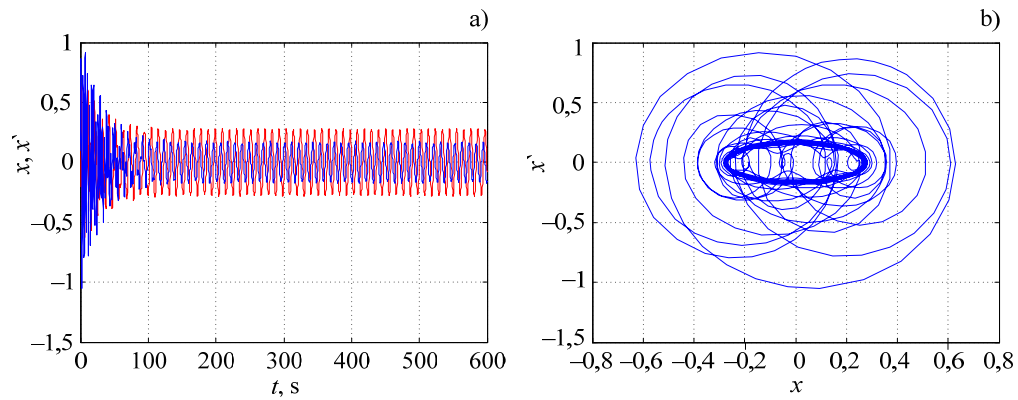
Przykład 3.3. Wyznaczyć podstawowe przebiegi uzyskane w wyniku rozwiązania równania (3.26) dla następujących parametrów: $F = 1,0$; $\varphi = 0$; $\delta = 0,06$; $\beta = 0$, $\omega_0^2 = 4$; $\omega = 0,6$; przy warunkach początkowych: $x(0) = -0,2$; $x'(0) = 0,1$.

Obliczenia zostały wykonane z wykorzystaniem procedury *ode15s* w języku MATLAB. Rezultaty są prezentowane na rys. 3.10. Przedstawiają one przebiegi zmiany odchylenia $x(t)$ oraz przyspieszenia $x''(t)$ (rys. 3.10a).

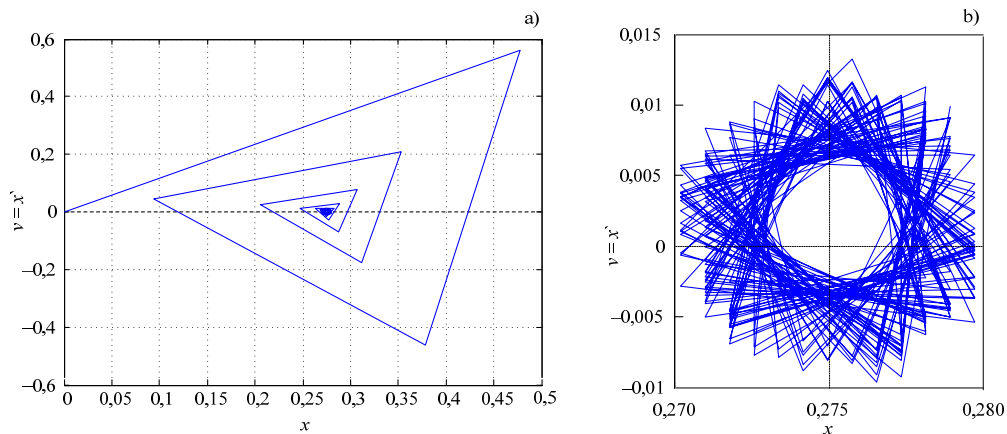
Widać, że stan przejściowy zanika po czasie ok. 100 s. Po jego zaniku, obraz tych przebiegów na płaszczyźnie fazowej przyjmuje kształt elipsy (rys. 3.10b).

Odwzorowanie Poincarégo określone zgodnie z (3.31) jest pokazane na rys. 3.11a (punkty przekroju dla $t = 0, T, 2T, \dots$ są wyznaczone przez wierzchołki wykresu). Szczegóły tego przekroju dla czasu $t > 100$ s są pokazane na rys. 3.11b. Jak widać, przekrój Poincarégo upraszcza wykres, zachowując podstawowe cechy przebiegu, co jest szczególnie istotne w przypadku bardziej złożonych wykresów.

²⁰ Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), matematyk i fizyk francuski.



Rys. 3.10. Przebiegi związane z rozwiązaniem równania Duffinga

Rys. 3.11. Przekrój Poincarégo dla analizowanego równania (a) oraz szczegół dla $t > 100$ s (b)

Analizowany powyżej przypadek odnosi się do równania Duffinga, zredukowanego do postaci liniowej. Bardziej interesujące właściwości (także z praktycznego punktu widzenia) ma postać nieliniowa tego równania – co będzie przedmiotem analizy w dalszej części rozdziału.

3.6. Zadania

3.1. Równanie Van der Pola ma następującą postać:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \mu(1 - y^2) \frac{dy}{dt} + y = 0$$

Określić ten model w postaci zmiennych stanu.

3.2. Badany układ jest opisany następującym równaniem:

a) $f(x) = \ddot{x} + \dot{x}(3 - 2x) + 6x - 4x^2$

b) $f(x) = \ddot{x} + 0,5\dot{x} + x(x^2 - 1)$

Korzystając z przykładu 3.2 wyznaczyć punkty równowagi układu, określić ich charakter (stabilność), opracować model symulacyjny układu (program SIMULINK) i wyznaczyć portrety fazowe w pobliżu tych punktów.

3.3. Równanie Duffinga jest przedstawiane w następującej formie:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} \pm \omega_0^2 x + \beta x^3 = F \cos(\omega t + \varphi)$$

Zapisać je w postaci zmiennych stanu. Jaka jest fizyczna interpretacja tych zmiennych?

4. MODELE PROCESÓW FIZYCZNYCH

4.1. Wprowadzenie

Znakomita większość procesów fizycznych jest reprezentowana za pomocą modeli zależnych od czasu. Są to więc procesy dynamiczne. Ich analiza ma na celu wyjawienie zależności poszczególnych zmiennych procesu w czasie. Łatwo zauważyć, że zarówno stopień skomplikowania takich modeli w sensie dokładności odwzorowania wzajemnie powiązanych zjawisk, jak i rozdzielczość czasowa procesu jest niemal nieograniczona. Ważnym czynnikiem racjonalizującym symulacyjną analizę zjawisk fizycznych jest uzasadnione ograniczenie dokładności tych wskaźników.

W rozdziale pokazane są przykłady tworzenia modeli wybranych zjawisk fizycznych z ilustracją ich komputerowej symulacji z zastosowaniem podstawowych metod numerycznych.

4.2. Zjawisko tarcia

Siła tarcia T jest rozumiana, jako siła oporu powstająca przy przesuwaniu się dwóch ciał względem siebie. Siła T leży w płaszczyźnie stycznej do powierzchni obu ciał, poprowadzonej w punkcie styku. Ma ona kierunek i zwrot przeciwny do prędkości względnej punktu styku. Jeśli ciało jest nieruchome, to zwrot siły jest przeciwny do kierunku siły wymuszającej. Pomimo powszechności zjawiska tarcia, jego model matematyczny nie jest jednoznaczny i istnieje wiele szczegółowych opisów tarcia. Mają one na celu badanie samego zjawiska tarcia w różnych szczegółowych stanach dynamicznych przemieszczających się względem siebie ciał oraz jego kompensacji z myślą o stabilizacji ruchu.

W celu usystematyzowania opisu zjawiska tarcia, powstało wiele modeli uproszczonych, które są stosowane w ściśle określonych warunkach. Do najważniejszych z nich można zaliczyć²¹:

²¹ BRODNY J., *Modelowanie tarcia w układach mechanicznych*. Górnictwo i Geologia, t. 5, 2010, Zeszyt 2, s. 7 – 17.

- tarcie statyczne, które reprezentuje siłę (moment) niezbędną do przesunięcia względem siebie dwóch nieruchomych ciał (siła, która przeciwstawia się przesunięciu przy zerowej prędkości);
- tarcie suche, które odpowiada sile przeciwstawiającej się oporowi ruchu względnemu dwóch ciał, niezależnie od ich względnej prędkości ruchu (opór tarcia zależy od siły docisku przemieszczających się ciał - model Coulomba);
- tarcie lepkie (wiskotyczne), przy którym zakłada się, że przestrzeń pomiędzy przesuwanymi się ciałami jest wypełniona określoną cieczą (smarem);
- różne przypadki pośrednie, gdy np. warunki tarcia zmieniają się w zależności od: kierunku ruchu (tarcie asymetryczne), pozycji lub kąta obrotu, prędkości ruchu i innych parametrów.

W dalszej części tego rozdziału przeprowadzono analizę tylko podstawowych zagadnień związanych z tym zjawiskiem.

4.2.1. Tarcie suche

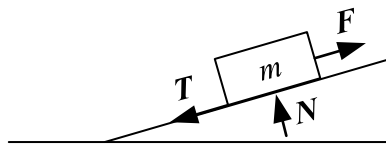
W przypadku tarcia suchego zakłada się, że pomiędzy przesuwanymi się powierzchniami nie ma materiału pośredniczącego, w szczególności, brak jest warstwy smarnej. Do analitycznego opisu tarcia wprowadza się zazwyczaj następujące założenia:

- siła tarcia jest proporcjonalna do siły N normalnej do powierzchni tarcia (rys. 4.1):

$$T = \mu_k N, \quad (4.1)$$

gdzie μ_k – kinetyczny współczynnik tarcia;

- siła tarcia jest niezależna od powierzchni styku;
- siła tarcia jest niezależna od prędkości przemieszczania się ciał;
- do przesunięcia nieruchomego ciała niezbędna jest siła T_{gr} , która jest określana podobnie, jak w (4.1), przy czym: $\mu_s \geq \mu_k$ – współczynnik tarcia statycznego (który także nie zależy od wielkości powierzchni styku).

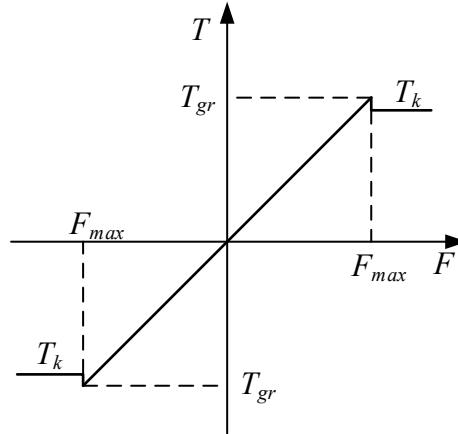


Rys. 4.1. Siły występujące przy tarcia

Jeśli uwzględnić kierunek ruchu przesuwanego elementu, to zależność (4.1) przybiera następującą postać:

$$T = \mu_k N \operatorname{sgn}(v) = \mu_k N \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (4.2)$$

Zależność pomiędzy siłą działającą na układ i siłą tarcia jest pokazana na rys. 4.2. Zazwyczaj po uruchomieniu układu, opór tarcia nieco maleje, co wynika z relacji: $\mu_s \geq \mu_k$, co oznacza, że opór tarcia kinetycznego T_k jest mniejszy od tarcia granicznego T_{gr} .



Rys. 4.2. Charakterystyka sił występujących w modelu tarcia suchego

W praktyce, model tarcia jest zazwyczaj elementem bardziej złożonego układu, w którym występują różne siły powodujące przesuwanie i opór. Jeden z takich przypadków ilustruje następny przykład.

Przykład 4.1. Przeanalizować dynamikę układu z rys. 4.3 [62]. Stała sprężyny wynosi k , natomiast przesuwany element ma masę m . Założyć, że układ może się znajdować w jednym z dwóch stanów: a) przy braku poślizgu: $v = \dot{x} = 0$ oraz b) w ruchu: $v = \dot{x} \neq 0$.

Zewnętrzne siły działające na układ są następujące (siła F oraz przeciwnie skierowana siła sprężyny – rys. 4.3):

$$F_{zew} = F - kx$$

Gdy układ znajduje się w ruchu (przypadek b), który charakteryzuje się obecnością prędkości przesuwania: $v = \dot{x} \neq 0$, można zapisać następującą równowagę sił:

$$m \cdot a = m \cdot \ddot{x} + T_{gr} = F_{zew}, \quad a - \text{przyspieszenie masy } m.$$

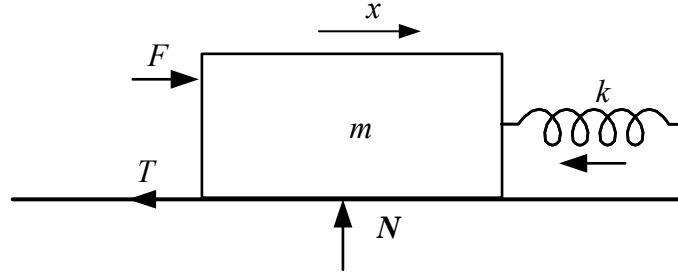
Uwzględniając (4.2), otrzymamy:

$$m\ddot{x} = F_{zew} - \mu_k N \operatorname{sgn}(\dot{x}) = F_{zew} - T_{gr} \operatorname{sgn}(\dot{x})$$

skąd, dla $v = \dot{x} \neq 0$:

$$\ddot{x} = \frac{F_{zew} - T_k \operatorname{sgn}(\dot{x})}{m}, \quad T_k = \mu_k N, \quad N = m \cdot g, \quad g - \text{przyspieszenie ziemskie.}$$

Funkcja $\operatorname{sgn}()$ służy do uogólnienia zapisu dla obu kierunków działania sił (przesunięcia).



Rys. 4.3. Schemat analizowanego układu

Dla ogólności, zapiszmy w podobny sposób stan układu przy braku poślizgu (przypadek a)), przy czym, w miejsce funkcji $\text{sgn}(\dot{x})$ wprowadzimy dodatkową funkcję, która wykrywa kierunek działania, zmierzającego do przesunięcia masy m z udziałem siły F_{zew} :

$$p_{rz}(p) = \begin{cases} p & \text{dla } |p| < 1 \\ \text{sgn}(p) & \text{inaczej} \end{cases}$$

gdzie $p = \frac{F_{zew}}{T_{gr}}$ jest względną wartością siły działającej na masę m w stanie spoczynku.

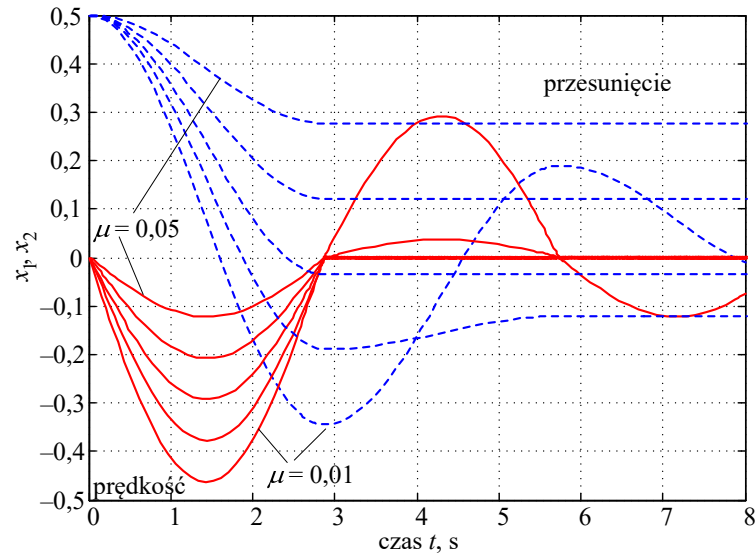
Prowadzi to do następującej modyfikacji równania dynamiki układu w stanie spoczynkowym ($v = \dot{x} = 0$):

$$\ddot{x} = \frac{F_{zew} - T_{gr} p_{rz}\left(\frac{F_{zew}}{T_{gr}}\right)}{m}, \quad T_{gr} = \mu_s N.$$

Jak widać, w zależności od stwierdzenia ruchu elementu o masie m , jego dynamika jest określona przez jedno z powyższych równań różniczkowych drugiego rzędu. Można je sprowadzić do pary równań różniczkowych pierwszego rzędu, co wraz z odpowiednim warunkiem, wykrywającym ruch, prowadzi do następującego algorytmu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F_{zew} - T_{gr} \text{sgn}(x_1)}{m} & \text{- jeśli } x_2 \neq 0 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F_{zew} - T_{gr} p_{rz}\left(\frac{F_{zew}}{T_{gr}}\right)}{m} & \text{- inaczej} \end{aligned}$$

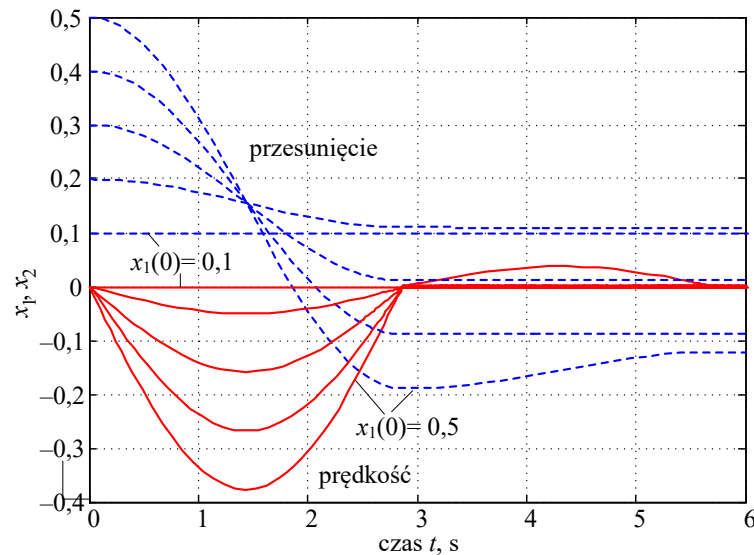
Na podstawie powyższych równań został opracowany program `Przykład_4_1.m` w języku Matlab. Na kolejnych rysunkach prezentowane są niektóre wyniki symulacji przy zmianie ukazanych parametrów. Założono, że $T_k = 0,95 T_{gr}$. Pozostałe parametry są podane na rysunkach.



Rys. 4.4. Przebiegi przesunięcia (x_1) oraz prędkości (x_2) przy różnych współczynnikach tarcia;
 $m = 1, k = 1,2, F = 0, (x_1(0), x_2(0)) = (0,5, 0)$

Można zauważyć, że przy małej wartości współczynnika tarcia, układ ma charakter oscylacyjny; przy jego wzroście, oscylacyjne wymuszenie sprężyny daje się zauważyć jedynie podczas pierwszego półokresu.

Przebiegi pokazane na rys. 4.5 potwierdzają obserwację, że wstępne napięcie sprężyny daje podobny efekt, jak siła przyłożona do masy m , przy czym, charakter przebiegu zależy od wstępnego napięcia sprężyny (wartość początkowa przesunięcia).



Rys. 4.5. Przebiegi przesunięcia (x_1) oraz prędkości (x_2) przy różnych początkowych wartościach przesunięcia; $m = 1, k = 1,2, \mu = 0,02$

Zauważmy, że dla przypadku odchylenia początkowego $x_1(0) = 0,1$, nie występuje żaden ruch, co wynika stąd, że łączna siła działająca na element jest mniejsza od siły tarcia spoczynkowego. W analizowanym przypadku, warunek wystąpienia ruchu jest następujący:

$$x_1(0) > \frac{\mu N}{k},$$

co nie jest spełnione.

4.2.2. Tarcie lepkie

Tarcie lepkie (płynne) jest siłą oporu T występującego w szczelinie pomiędzy dwoma przemieszczającymi się ciałami, gdy szczelina ta jest wypełniona płynem lub gazem. Przy tworzeniu modelu tego zjawiska zakłada się, że:

- T nie zależy od siły docisku pomiędzy przesuwającymi się ciałami;
- T zależy natomiast od prędkości przesuwania v oraz od pola powierzchni styku S ;
- tarcie płynne w sposób zasadniczy zależy od właściwości materiału wypełniającego szczelinę dzielącą powierzchnie obu ciał.

W najprostszej postaci model tarcia lepkiego jest zapisywany w postaci następującego równania (tarcie wiskotyczne):

$$T = \mu_l \dot{x} \quad (4.3)$$

gdzie μ_l jest współczynnikiem tarcia lepkiego.

Model (4.3) jest często uogólniany do postaci:

$$T = \mu_l(\dot{x})^n \operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad (4.4)$$

gdzie wykładnik n może przyjmować różne wartości w zależności od rodzaju przesu-
wających się powierzchni.

W przypadku nieściśliwej cieczy wypełniającej szczelinę, siła tarcia jest reprezento-
wana za pomocą następującej zależności:

$$T = \eta S \frac{\partial v}{\partial h} \quad (4.5)$$

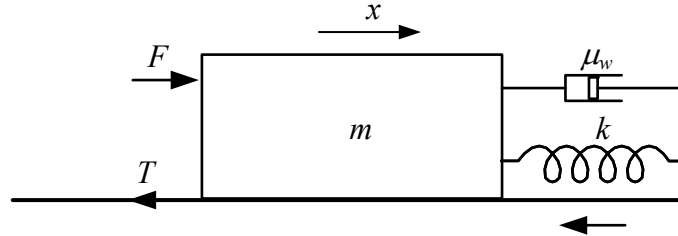
gdzie: η - współczynnik lepkości cieczy, $\frac{\partial v}{\partial h}$ - gradient prędkości w szczelinie, S -
pole powierzchni styku.

Tarcie lepkie jest często łączone z tłumieniem ruchu ciała o masie m . W takim
przypadku, na podobieństwo do rys. 4.3, można posłużyć się schematem, jak na rys.
4.6, któremu odpowiada następujące równanie:

$$m\ddot{x} + \mu_w \dot{x} + kx = 0 \quad (4.6)$$

gdzie μ_w jest współczynnikiem tłumienia wiskotycznego (lepkościowego).
Powyższe równanie w zapisie zmiennych stanu przyjmuje następującą formę:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-\mu_w x_2 - kx_1}{m} \end{aligned} \quad (4.7)$$



Rys. 4.6. Schemat układu z tłumieniem wiskotycznym

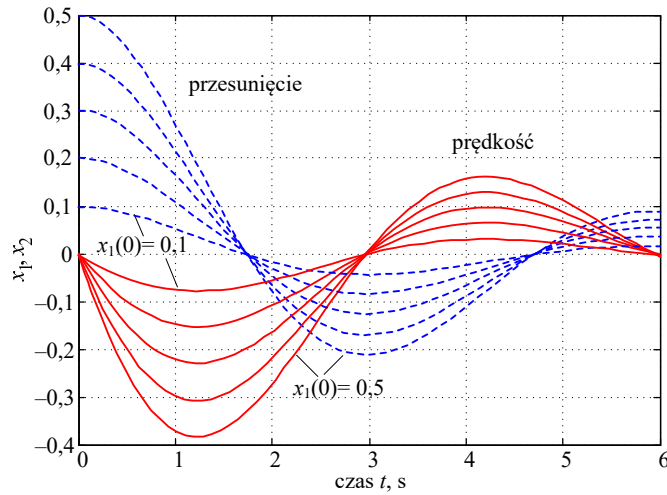
Tym razem, w modelu tarcia nie występuje ograniczenie ruchu w związku z oporem
granicznym T_{gr} , więc w przebiegu oscylacji tego układu nie występuje gwałtowne ich
zanikanie. Na rys. 4.7 pokazane są wyniki symulacji wykonane zgodnie z modelem
(4.5), przy podobnych założeniach, jak w przypadku przebiegów z rys. 4.5 (obliczenia
wykonano dla różnych warunków początkowych), dla współczynnika tłumienia wisko-
tycznego $\mu_w = 0,58$. Widać, że przebiegi przedstawiają regularne oscylacje tłumione.

Przy bardziej ogólnym podejściu, model (4.6) rozszerza się do postaci²²:

$$m \ddot{x} + \mu \dot{x} + kx = T(\dot{x}, x, t, F_n, \dots), \quad (4.8)$$

gdzie $T = \mu F_n$, co oznacza, że:

$$\mu = \mu(\dot{x}, x, t, F_n, \dots) = \frac{T(\dot{x}, x, t, F_n, \dots)}{F_n}. \quad (4.9)$$



Rys. 4.7. Przebiegi przesunięcia (x_1) oraz prędkości (x_2) zgodnie z modelem (4.5), przy różnych początkowych wartościach przesunięcia

Takie założenie daje dużą swobodę w kształtowaniu współczynnika tarcia μ . Wielokropek w (4.8) oznacza, że w praktyce, do odwzorowania różnych warunków rzeczywistych, stosuje się niekiedy bardzo wymyślne modele matematyczne²³. W szczególności, siła nacisku F_n może zawierać także zewnętrzne wymuszenie F_f :

$$F_n = F_M + F_f, \quad (4.10)$$

gdzie: $F_M = m \cdot g$, g – przyspieszenie ziemskie.

Schemat modelu do analizy tarcia zgodnie z (4.8) jest pokazany na rys. 4.8. Względna prędkość v_w przesuwających się powierzchni jest określona następująco:

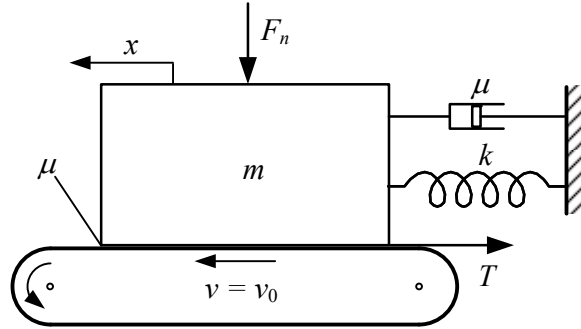
$$v_w = v_0 - \dot{x}, \quad (4.11)$$

skąd można wyznaczyć charakterystyczne przypadki (v_0 jest prędkością taśmociągu):

²² BERGER E.J., *Friction modeling for dynamic system simulation*. Appl Mech Rev vol. 55, no 6, November 2002, pp. 535–577.

²³ AWREJCWICZ J., OLEJNIK P., *Analysis of dynamic systems with various friction laws*. Applied Mechanics Reviews 58(6), 2005, pp.389-411.

$\dot{x} = 0 \rightarrow v_w = v_0$ – zdefiniowany poślizg
 $\dot{x} = v_0 \rightarrow v_w = 0$ – przyklejenie

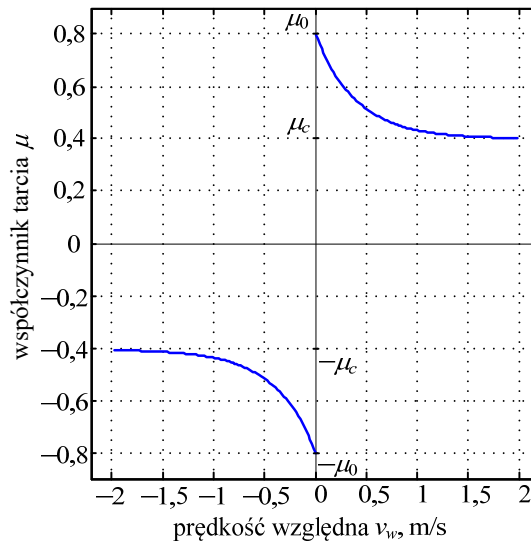


Rys. 4.8. Schemat układu do analizy tarcia

Na podstawie modelu (4.8), (4.9), można rozważać bardzo różne przypadki szczególne. Przeanalizujmy jeden z nich, gdy współczynnik tarcia jest określony przez kombinację wartości stałej i prędkości względnej v_w . Odpowiada temu następująca definicja tego współczynnika (rys. 4.9):

$$\mu(v_w) = \left(\mu_r \exp\left(\frac{-\alpha|v_w|}{\mu_r}\right) + \mu_c \right) \text{sgn}(v_w), \quad (4.12)$$

gdzie: $\mu_r = \mu_0 - \mu_c$; μ_0, μ_c, α - parametry modelu.



Rys. 4.9. Charakterystyka zmian współczynnika tarcia na podstawie (4.12)

Zgodnie z (4.8), model tarcia jest określony przez następujące równanie:

$$m \ddot{x} + \mu \dot{x} + kx = F_n \left(\mu_r \exp\left(\frac{-\alpha |v_w|}{\mu_r}\right) + \mu_c \right) \text{sgn}(v_w), \quad (4.13)$$

które można zapisać w postaci następujących równań stanu:

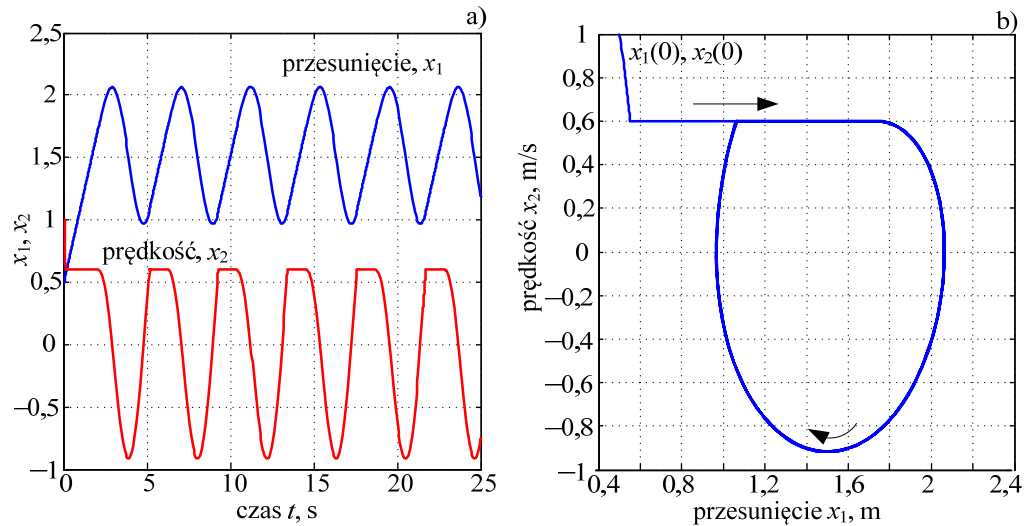
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\mu}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 + \frac{F_n}{m} \left(\mu_r \exp\left(\frac{-\alpha |v_w|}{\mu_r}\right) + \mu_c \right) \text{sgn}(v_w), \end{aligned} \quad (4.14)$$

gdzie: $v_w = v_0 - x_2$; x_2 – prędkość ruchu ciała.

W kolejnym przykładzie analizowany jest model (4.14).

Przykład 4.2. Przeprowadzić analizę dynamiki układu określonego przez równania (4.14) dla następujących parametrów: $m = 1,5$ kg; $\mu = 0,1$ N·s/m; $k = 4,2$ N/m; $F_f = 0$; $v_0 = 0,60$ m/s; $\mu_0 = 0,5$; $\mu_c = 0,4$; $\alpha = 0,1$ s/m. Przyjąć następujące wartości początkowe: $x(0) = 0,5$; $y(0) = 1,0$.

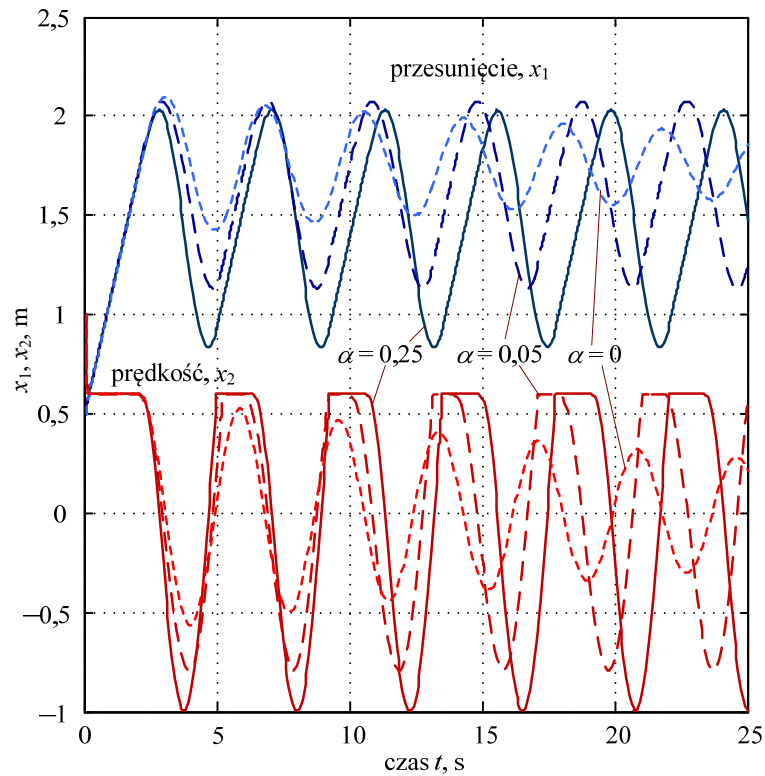
Charakterystyka współczynnika tarcia dla podanych parametrów jest przedstawiona na rys. 4.9. Do symulacji ruchu rozważanego układu opracowany został program `tarcie_b.m`, który powstał w wyniku modyfikacji poprzednich programów do analizy zjawiska tarcia, prezentowanych w tym rozdziale. Przebiegi obu zmiennych modelu (4.14) oraz trajektorii $x_2 = f(x_1)$ dla podanych parametrów, są pokazane na rys. 4.10.



Rys. 4.10. Przebiegi zmiennych $x_1(t)$, $x_2(t)$ (a) oraz trajektoria $x_2 = f(x_1)$ (b)

Dolny przebieg na rys. 4.10a) pokazuje położenie bloku m . Zmienia się ono stosownie do poślizgu względem taśmy (na rys. 4.8 położenie wyznacza zmienna x). Poziome części tego przebiegu o wartości $x_2 = v_0 = 0,6$ odpowiadają sytuacji, gdy pomiędzy blokiem m oraz taśmociągim brak jest poślizgu i blok porusza się z prędkością taśmociągu. Można sprawdzić, że wówczas prędkość względna $v_w = 0$. Przypadek taki powtarza się w każdym okresie wyznaczonym przez dynamikę procesu. W tym czasie zwiększa się przesunięcie x_1 , co wzmacna napięcie sprężyny k , aż do momentu, gdy zaczyna się poślizg bloku m względem taśmociągu. Sprawia to, że odległość x_1 zaczyna się zmniejszać, natomiast prędkość x_2 osiąga wartości ujemne. Siła pochodząca od sprężyny zmniejsza się, co odwraca tę tendencję. Odległość x_1 przyjmuje najmniejszą wartość, gdy prędkość x_2 przechodzi przez zero w dodatnim kierunku. Proces ten można także śledzić na wykresie trajektorii fazowej (rys. 4.10b)). Pozioma część tej trajektorii odpowiada przypadkowi braku poślizgu pomiędzy blokiem m i taśmociągim. W analizowanym przypadku występuje on także na początku symulacji, co jest związane z przyjętymi wartościami początkowymi.

Na rys. 4.11 pokazane są przebiegi badanych zmiennych procesu (zmiennych stanu) dla różnych wartości współczynnika α , który określa stopień zmiany współczynnika tarcia μ (rys. 4.9).



Rys. 4.11. Przebiegi zmiennych $x_1(t)$, $x_2(t)$ dla różnych wartości współczynnika α

Widać, że dla $\alpha > 0$, obraz uzyskanych przebiegów jest podobny do tych omówionych powyżej. Warto podkreślić, że mamy do czynienia z niegasnącymi oscylacjami, których częstotliwość także zależy od wartości współczynnika α . Odmienny obraz uzyskuje się w przypadku, gdy $\alpha = 0$. Na podstawie (4.12) widać, że współczynnik tarcia jest wtedy stały: $\mu = \mu_c$ (nie zależy od względnej prędkości). Wówczas zależność (4.14) staje się liniowa (jeśli założyć, że v_w nie zmienia znaku), co prowadzi do znanego regularnego przebiegu związanego z dynamiką układu 2-go rzędu (rys. 4.11). Stan ten może być zakłócony także przy zerowej wartości współczynnika α , gdy blok m przestaje się ślizgać względem taśmociągu. Wówczas prędkość względna $v_w = 0$. Ten przypadek można zaobserwować na rys. 4.11 w przebiegu prędkości x_2 dla $\alpha = 0$, w pierwszym okresie symulacji.

Korzystając z obserwacji poczynionej w poprzednim przykładzie w związku ze stałą wartością współczynnika tarcia $\mu = \mu_c$ (dla $\alpha = 0$), można określić wartości fizycznych parametrów układu (4.14), odnoszących się do liniowego układu 2-go rzędu. Standardowe równanie układu oscylacyjnego jest wówczas następujące [41]:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = K\omega_n^2u(t), \quad (4.15)$$

gdzie: ζ – współczynnik tłumienia drgań oscylacyjnych; ω_n – pulsacja drgań nietłumionych, K – wzmocnienie statyczne; $u(t)$ – funkcja wymuszająca.

Przez analogię do (4.15), model (4.14) można zapisać w następującej formie:

$$\ddot{x}(t) = -2\zeta\omega_n\dot{x}(t) - \omega_n^2x(t) + F_n\mu, \quad (4.16)$$

gdzie: $\zeta = \frac{\mu}{2\sqrt{km}}$; $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$; μ – jak w (4.12); F_n – jak w (4.10).

Wprawdzie parametry równania (4.16) dają poprawną ocenę fizycznych wielkości opisujących dynamikę tylko liniowych procesów (dla $\alpha = 0$), to jednak taki zapis jest często stosowany także w ogólnych przypadkach, ze względu na powiązanie tych parametrów z charakterystykami również układów nieliniowych.

Jedną z zalet modelu (4.16) jest proste odwzorowanie w nim przypadków z zewnętrznym wymuszeniem. Ilustruje to kolejny przykład.

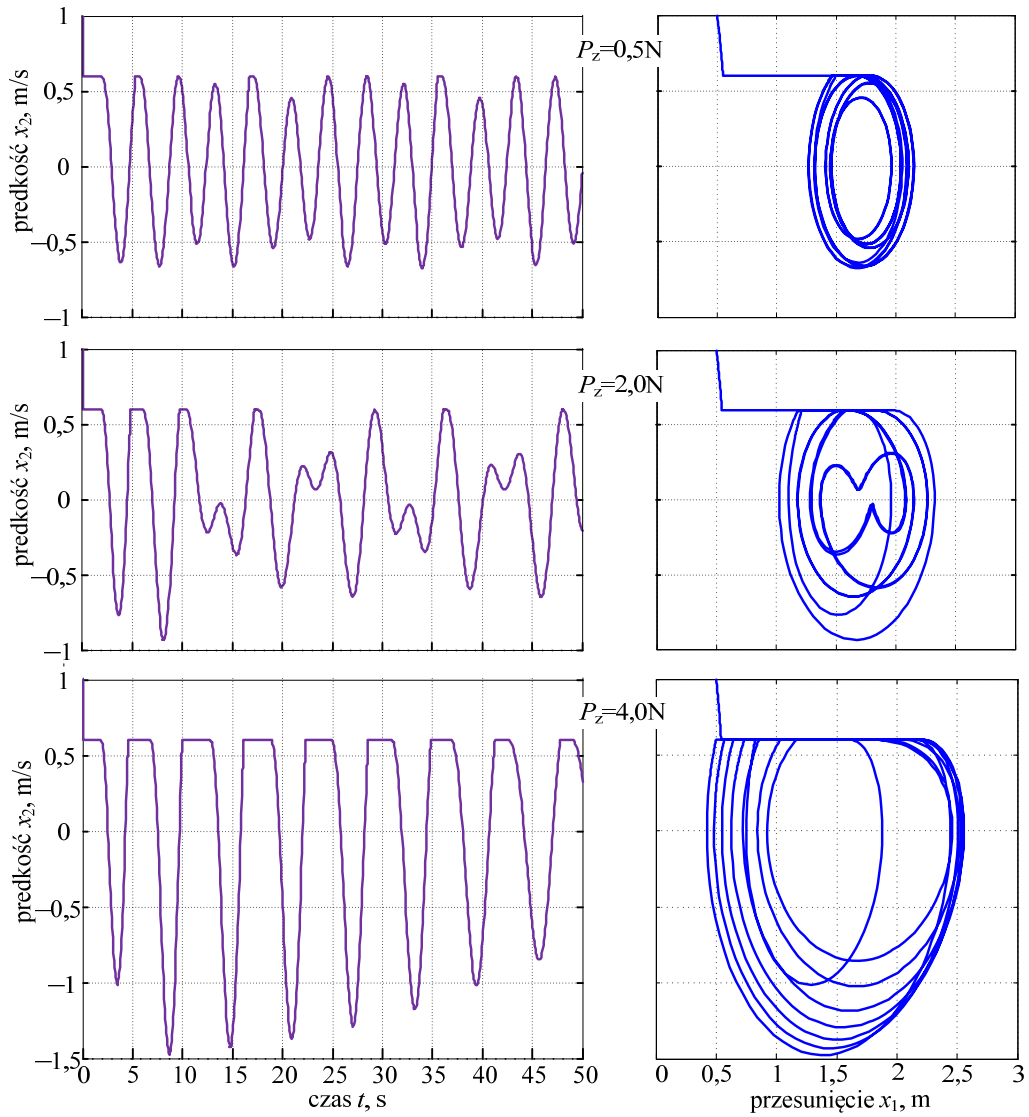
Przykład 4.3. Przeprowadzić analizę dynamiki układu określonego przez równanie (4.16) w przypadku, gdy siła nacisku F_n ma także składową zewnętrzną o postaci: $F_f = F_z \cos(\omega_z t + \varphi_z)$. Przyjąć: $\omega_z = 1,0 \text{ s}^{-1}$, $\varphi_z = 0$. Pozostałe parametry układu – jak w przykładzie 4.2, oprócz współczynnika $\alpha = 0,01$. Z badać wpływ siły zewnętrznej F_z na podstawowe przebiegi procesu.

Do symulacji ruchu rozważanego układu opracowany został program `tarcie_c.m`, który powstał na bazie programu `tarcie_b.m`.

Do badania wpływu siły zewnętrznej F_z wybrano trzy wartości amplitudy: 0,5 N, 2,0 N oraz 4,0 N. Niektóre uzyskane przebiegi są pokazane na rys. 4.12. Do ich analizy pomocna jest informacja o własnych parametrach dynamicznych układu – na podstawie (4.16). Na przykład,

okres drgań rzeczywistych rozpatrywanego układu w warunkach liniowych można określić następująco:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,5}{4,2}} = 3,755 \text{ s},$$



Rys. 4.12. Przebiegi prędkości $\dot{x}_2(t)$ (lewa strona rysunku) oraz trajektorii fazowej $\dot{x}_2 = f(x_1)$ (prawa strona rysunku), dla różnych wartości amplitudy siły zewnętrznej F_z

natomiast okres drgań rzeczywistych: $T_t = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{3,755}{\sqrt{1-0,0199^2}} = 3,756 \text{ s}$,

gdzie: $\zeta = \frac{\mu}{2\sqrt{k \cdot m}} = \frac{0,1}{2\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 1,5}} = 0,0199$

Okres oscylacji zewnętrznej siły jest równy:

$$T_z = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{1} = 6,283 \text{ s}.$$

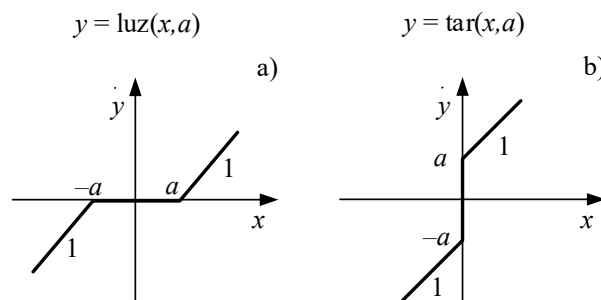
Widać stąd, że okres wymuszenia jest niemal dwa razy dłuższy od okresu drgań własnych układu.

Wracając do wyników z rys. 4.12 widać, że przy stosunkowo małym udziale wymuszenia zewnętrznego, okres uzyskanych oscylacji jest zbliżony do rzeczywistego okresu drgań własnych układu T_t (górny rysunek). W miarę wzrostu amplitudy siły F_z , okres jej powtarzania (T_z) zaczyna dominować w całym przebiegu (rysunek dolny). Można także zauważyć, że w miarę wzrostu siły zewnętrznej, uwidatniają się w przebiegach nieliniowości związane z ‘przyklejaniem’ się bloku m do taśmociągu, co jest także obserwowane w portrecie fazowym modelu.

4.2.3. Modele tarcia z luzem

Jak widać z powyższej analizy, zjawisko tarcia jest reprezentowane w postaci modeli nieliniowych. Ponadto, w wielu praktycznych przypadkach, tarcie jest skojarzone z innym nieliniowym zjawiskiem, jakim jest luz, który jest najczęściej rozpatrywany, jako luz w mechanicznych układach napędowych. W przypadku tworzenia komputerowych modeli złożonych układów, wygodnie jest posługiwać się modelami elementarnych zjawisk fizycznych, jako submodelami bardziej złożonych systemów. W tym celu rozpatrzmy poniżej elementarne modele tarcia oraz luzu.

Podstawowe zjawiska tarcia oraz luzu mogą być reprezentowane w postaci oddzielnych modeli komputerowych, których charakterystyki są prezentowane na rys. 4.13 [54].



Rys. 4.13. Charakterystyki uproszczonych modeli luzu (a) oraz tarcia (b)

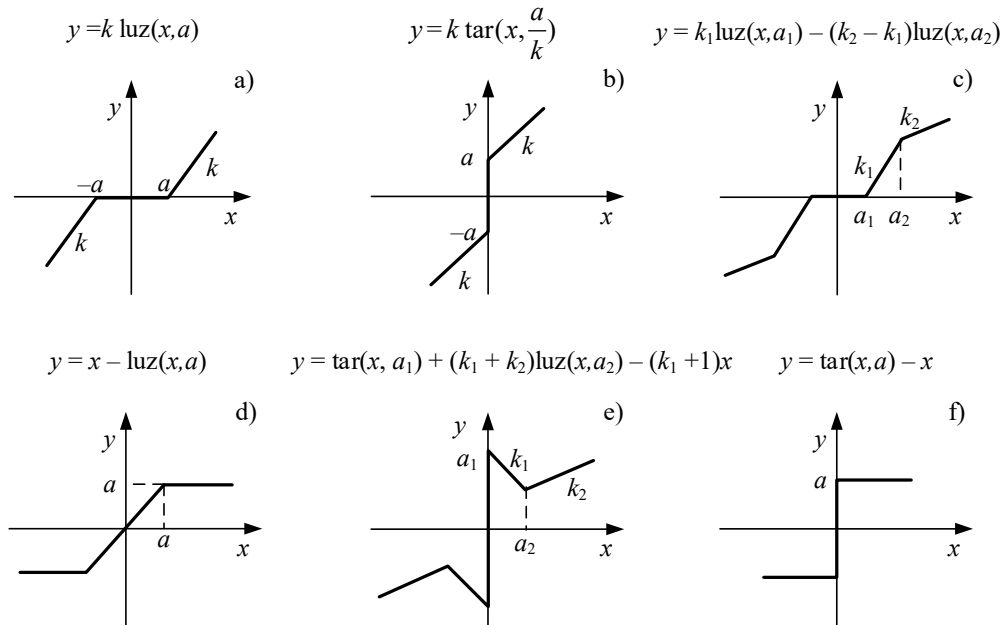
Modele mają charakter uniwersalny i przedstawione zmienne mogą reprezentować różne wielkości fizyczne. W przypadku gdy odwzorowanie $y = \text{luz}(x, a)$ reprezentuje model luzu mechanicznego, to współrzędna x odnosi się do przesunięcia, natomiast współrzędna y odpowiada wartości siły. W przypadku odwzorowania $y = \text{tar}(x, a)$, y także reprezentuje siłę (siłę tarcia), natomiast x odpowiada prędkości względnego przesuwu dwóch ciał. Wielkość a jest parametrem modelu reprezentującym tu siłę potrzebną do pokonania tarcia statycznego. Przedstawione odwzorowania mogą być reprezentowane w postaci następujących funkcji:

$$\text{luz}(x, a_1) = x + \frac{|x - a_1| - |x + a_1|}{2}, \quad (4.17)$$

$$\text{tar}(x, a_2) = x + a_2 \cdot s(x), \quad (4.18)$$

$$\text{gdzie: } a_2 > 0, \quad s(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 0, \\ s \in [-1, 1] & \text{gdy } x = 0, \\ -1 & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Te proste w interpretacji i praktycznej realizacji modele mogą służyć do reprezentacji bardziej złożonych zjawisk występujących w różnych dziedzinach nauki i techniki. Na rys. 4.14 są pokazane przykłady niektórych przedziałami liniowych charakterystyk oraz funkcje, które je definiują [54].



Rys. 4.14. Charakterystyki modeli powstałych na bazie odwzorowań $\text{luz}()$ oraz $\text{tar}()$

Elementy opisane tego typu funkcjami można spotkać jako elementy wykonawcze w układach regulacji automatycznej, gdzie do weryfikacji stabilności całego układu stosowane są metody funkcji opisującej [41]. Są one łatwe do wykonania z zastosowaniem elektromagnetycznych lub elektronicznych przekładników.

Elementy nieliniowe o charakterystykach, jak na rys. 4.14, mogą służyć do budowy efektywnych modeli złożonych układów napędowych. Szczegóły ich praktycznego zastosowania zależą od przyjętych warunków odwzorowania parametrów badanego układu dynamicznego. Rozpatrzmy ruch obrotowy układu z rys. 2.6, który został zredukowany do jedynie do silnika oraz sprzęgła. Zakłada się więc, że moment silnika M_s skręca wał o kąt γ , przy czym $\gamma_m = 0$ (nieruchoma maszyna, $M_w = 0$). Na podstawie równań (2.11) - (2.13) otrzymamy następujące liniowe równanie ruchu:

$$J_\gamma \frac{d^2 \gamma_r}{dt^2} + \mu_\gamma \frac{d\gamma_r}{dt} + k_r \gamma_r = M_\gamma(t) \quad (4.19)$$

gdzie: $M_\gamma(t)$ jest momentem obrotowym działającym na dany element; k_r – współczynnik sprężystości (sztywność) skrętu γ_r – bieżąca wartość kąta obrotu układu; indeks γ wskazuje na element układu skojarzony z kątem γ .

Uwzględnienie luzu oraz modelu tarcia nieliniowego prowadzi do następującej modyfikacji zależności (4.19) [55]:

$$J_\gamma \frac{d^2 \gamma_r}{dt^2} = \begin{cases} M_r - k_r \text{luz}(\gamma_r, \gamma_{r0}) - \mu_r \text{tar}\left(\frac{d\gamma_r}{dt}, \frac{M_{TKr0}}{\mu_r}\right) & \text{dla } \frac{d\gamma_r}{dt} \neq 0, \\ \text{luz}(M_r(0) - k_r \text{luz}(\gamma_r, \gamma_{r0}), M_{TSr0}) & \text{dla } \frac{d\gamma_r}{dt} = 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

gdzie: M_{TKr0} jest momentem pochodzącym od oporów suchego tarcia kinetycznego; M_{TSr0} – maksymalny (graniczny) moment związany z tarcie suchym; γ_{r0} – wartość luzu kąтового.

Z porównania (4.19) z pierwszym równaniem z (4.20) widać, że liniowe zależności w (4.19) zostały odpowiednio rozszerzone w celu uwzględnienia siły tarcia statycznego oraz luzu kąтового zgodnie z następującymi relacjami:

$$\mu_\gamma \frac{d\gamma_r}{dt} \leftrightarrow \mu_r \text{tar}\left(\frac{d\gamma_r}{dt}, \frac{M_{TKr0}}{\mu_r}\right); \quad k_r \gamma_r \leftrightarrow k_r \text{luz}(\gamma_r, \gamma_{r0}) \quad (4.21)$$

Drugie równanie w (4.20) odwzorowuje moment potrzebny do pokonania tarcia statycznego przy rozruchu układu (nieliniowy model o zmiennej strukturze w którym pomijany jest moment związany z tarcie wiskotycznym (lepkiem)).

W celu budowy dynamicznych modeli ruchu w bardziej złożonych układach, można rozpatrywać model (4.20) w odniesieniu do dwóch elementów składowych [54]:

- model elementu obrotowego o momencie bezwładności J_α z łożyskiem o współczynniku tarcia wiskotycznego μ_α :

$$J_\alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \begin{cases} M_\alpha - \mu_\alpha \tan\left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{M_{TK\alpha 0}}{\mu_\alpha}\right) & \text{dla } \frac{d\alpha}{dt} \neq 0, \\ \text{luz}(M_\alpha(0), M_{TS\alpha 0}) & \text{dla } \frac{d\alpha}{dt} = 0, \end{cases} \quad (4.22)$$

- model elementu bezinercyjnego (sprzęgła) z łożyskiem o współczynniku tarcia wiskotycznego μ_α :

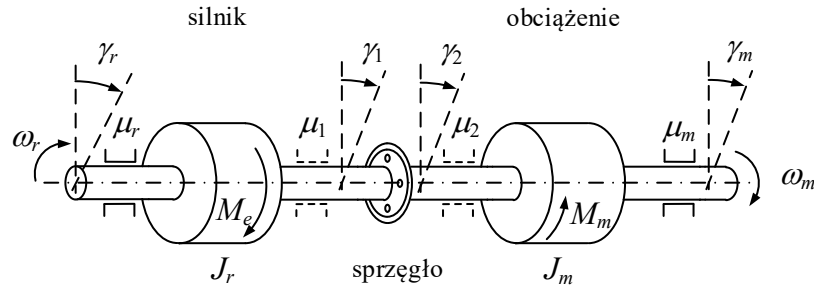
$$\mu_\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \text{luz}(M_\alpha(t), M_{TS\alpha 0}), \quad (4.23)$$

gdzie indeks α wskazuje na element o położeniu kątowym α .

Powyższe zależności różniczkowe można zapisać w postaci równań stanu, korzystając z oczywistego podstawienia: $d\alpha/dt = \omega_\alpha$, gdzie ω_α jest prędkością kątową. Kolejny przykład ilustruje wykorzystanie tego podejścia w odniesieniu do wirującego systemu, o strukturze zbliżonej do układu napędowego prezentowanego w przykładzie 2.2.

Przykład 4.4.

Sporządzić model nieliniowy i przeprowadzić analizę dynamiki ruchu obrotowego układu, który jest pobudzany zewnętrznym momentem napędowym $M_e(\omega)$, a w ruchu obrotowym występuje tarcie suche (przy rozruchu) oraz tarcie wiskotyczne. Schemat rozważanego układu jest pokazany na rys. 4.15.



Rys. 4.15. Schemat dwumasowego układu napędowego

Zakłada się, że masa sprzęgła jest do pominięcia ($J_1 = J_2 = 0$), jak również opory w łożyskach po obu stronach sprzęgła są bardzo małe ($\mu_1 = \mu_2 = 0$).

Równania ruchu całego układu można wyprowadzić przez zapisanie równań dla kolejnych jego elementów stosownie do zależności (4.22) oraz (4.23). Uzyskuje się w ten sposób dosyć rozbudowany zestaw równań, który można znacznie uprościć na podstawie przyjętych założeń. Zdajemy się na wywody poczynione w pracy [54], które prowadzą do uproszczonego zestawu równań o następującej postaci:

$$J_r \frac{d^2 \gamma_r}{dt^2} = \begin{cases} M_e(t) - \mu_r \operatorname{tar} \left(\frac{d\gamma_r}{dt}, \frac{M_{TKr0}}{\mu_r} \right) - k_{rm} \operatorname{luz}(\gamma_r - \gamma_m, (\gamma_r - \gamma_m)_0) & \text{dla } \frac{d\gamma_r}{dt} \neq 0, \\ \operatorname{luz}(M_e(t) - k_{rm} \operatorname{luz}(\gamma_r - \gamma_m, (\gamma_r - \gamma_m)_0), M_{TSr0}) & \text{dla } \frac{d\gamma_r}{dt} = 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

$$J_m \frac{d^2 \gamma_m}{dt^2} = \begin{cases} M_m(t) - \mu_m \operatorname{tar} \left(\frac{d\gamma_m}{dt}, \frac{M_{TKm0}}{\mu_m} \right) + k_{rm} \operatorname{luz}(\gamma_r - \gamma_m, (\gamma_r - \gamma_m)_0) & \text{dla } \frac{d\gamma_m}{dt} \neq 0, \\ \operatorname{luz}(M_m(t) + k_{rm} \operatorname{luz}(\gamma_r - \gamma_m, (\gamma_r - \gamma_m)_0), M_{Tsm0}) & \text{dla } \frac{d\gamma_m}{dt} = 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

gdzie:

$$(\gamma_r - \gamma_m)_0 = (\gamma_r - \gamma_1)_0 + (\gamma_1 - \gamma_2)_0 + (\gamma_2 - \gamma_m)_0, \quad k_{rm} = \left(\frac{1}{k_{r1}} + \frac{1}{k_{12}} + \frac{1}{k_{21m}} \right)^{-1},$$

J_r, J_m – odpowiednie momenty bezwładności;

γ_r – kąt obrotu, $d\gamma_r/dt = \omega_r$ i odpowiednio dla pozostałych indeksów;

γ_{r0} – luz kątowy (dla r -tego i pozostałych elementów);

k_{r1}, k_{12}, k_{2m} , – współczynniki sztywności elementów wskazywanych indeksami (pomiędzy odpowiednimi węzłami);

$\mu_r, \mu_1, \mu_2, \mu_m$ – współczynniki tarcia wiskotycznego (tłumienia) w odpowiednich łożyskach;

M_{TKr0} – moment tarcia suchego kinetycznego w r -tym elemencie;

M_{TSr0} – wartość maksymalna momentu tarcia suchego statycznego w r -tym elemencie.

W powyższym modelu o zmiennej strukturze wygodnie jest przyjąć nieco zmodyfikowany warunek przełączania struktury modelu przez wprowadzenie małego parametru ε rozgraniczającego oba obszary działania: $|d\gamma/dt| > \varepsilon$ oraz $|d\gamma/dt| \leq \varepsilon$.

W celu porównania dynamiki rozważanego układu z wynikami uzyskanymi w przykładzie 2.2 przyjmujemy z tego przykładu podstawowe parametry układu:

$$J_r = 28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_m = 47,72 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$k_{r1} = 3000 \text{ N} \cdot \text{m/rad}, k_{12} = 2200 \text{ N} \cdot \text{m/rad}, k_{2m} = 2000 \text{ N} \cdot \text{m/rad};$$

$$\text{poślizg znamionowy: } s_n = 0,0233, \text{ poślizg krytyczny } s_k = 0,094;$$

$$\text{moment obciążenia: } M_m = M_{m0} \left((\omega / \omega_1) (1 + k_M \omega / \omega_1) \right), \text{ gdzie: } M_{m0} = 600,0 \text{ N} \cdot \text{m/s/rad}, k_M = 1,564;$$

$$\text{znamionowy moment napędowy: } M_{en} = 2013,5 \text{ N} \cdot \text{m};$$

$$\text{współczynniki tłumienia: } \mu_r = 0,045 \text{ N} \cdot \text{m s/rad}, \mu_m = 0,05 \text{ N} \cdot \text{m s/rad},$$

$$\text{moment napędowy: } M_e = \frac{2 p_M M_{en}}{s / s_k + s_k / s}, p_M = 2,14 \text{ (przeciążalność momentem)},$$

$$\text{poślizg przy największym momencie elektromagnetycznym } s_k = s_n \left(p_M + \sqrt{p_M^2 - 1} \right).$$

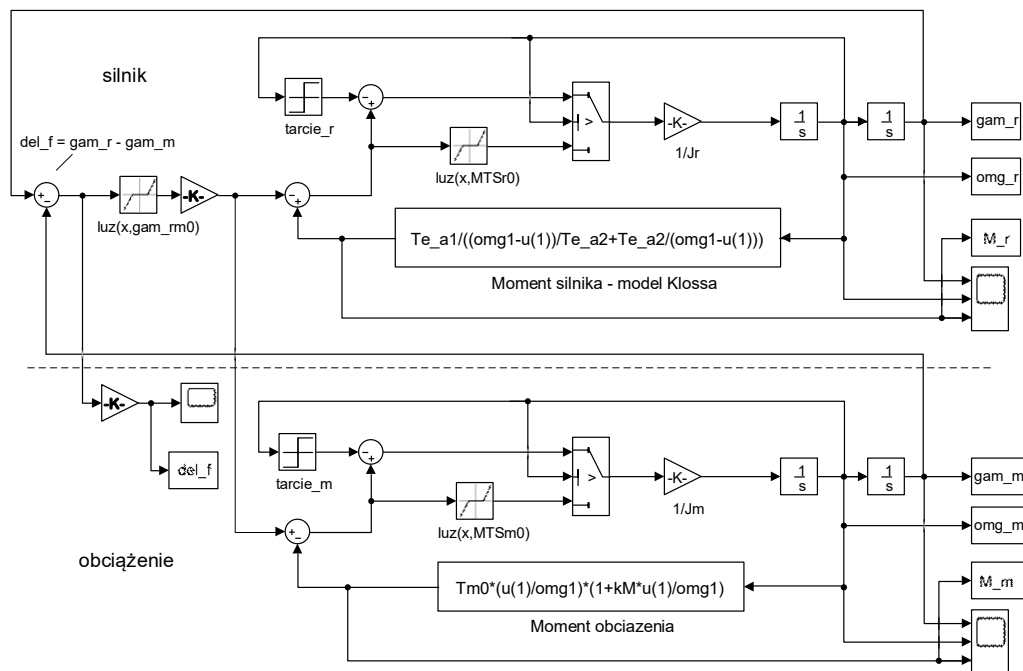
Dla ujednolicenia, moment napędowy można określić w funkcji prędkości kątowej, co po uwzględnieniu założonych parametrów jest określony następującą zależnością (model Klossa):

$$M_e = \frac{2p_M M_{en}}{s/s_k + s_k/s} = \frac{2p_M M_{en}}{\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1 s_k} + \frac{\omega_1 s_k}{\omega_1 - \omega}}$$

W chwili rozruchu ($\omega = 0$), $M_e(0) = 802,98 \text{ N}\cdot\text{m}$ co powinno być większe od sumarycznego momentu tarcia spoczynkowego:

$$M_e(0) - M_{TSr0} - M_{Tsm0} > 0$$

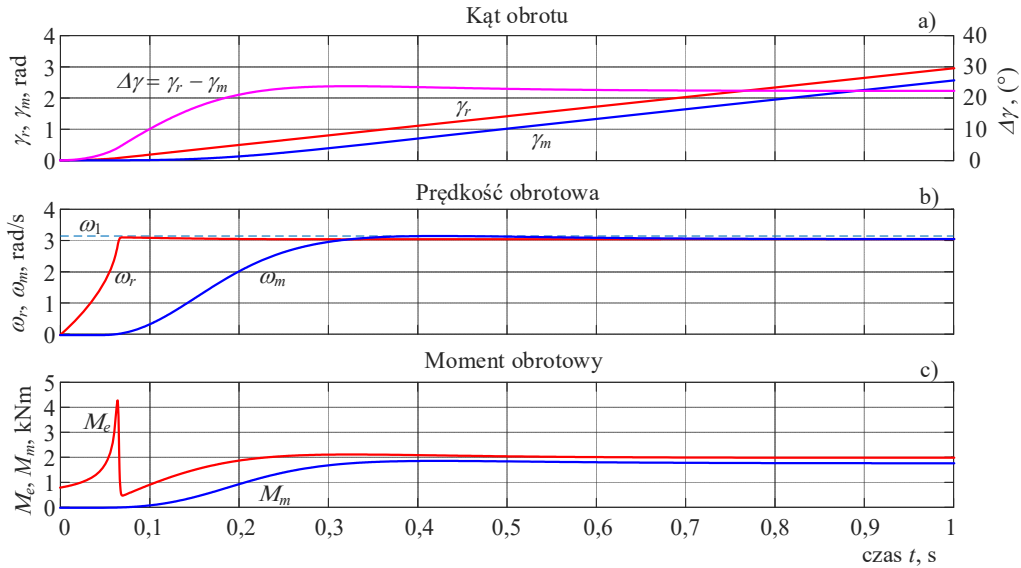
Przyjmujemy $M_{TSr0} = 92 \text{ N}\cdot\text{m}$, $M_{Tsm0} = 105 \text{ N}\cdot\text{m}$, co spełnia powyższy warunek. Z warunków zadania wynika, że: $M_{TS10} = M_{TS20} = 0$ (brak oporów w łożyskach sprzęgła). Ponadto zakładamy stałe wartości momentów tarcia suchego kinetycznego: $M_{TKr0} = 75 \text{ N}\cdot\text{m}$, $M_{TKm0} = 90 \text{ N}\cdot\text{m}$. Schemat modelu utworzonego w programie SIMULINK na podstawie równań (4.24), (4.25) jest pokazany na rys. 4.16. Modele obu elementów układu: silnika oraz maszyny roboczej (obciążenia) są połączone poprzez wymianę informacji o chwilowych wartościach kątów γ_r oraz γ_m ekwiwalentnych wirujących mas (rys. 4.15). Podstawowe przebiegi związane z symulacją są przekazywane do przestrzeni *Workspace* programu, skąd można je pobrać w celu sporządzenia odpowiednich wykresów.



Rys. 4.16. Schemata modelu układu dwumasowego

Niektóre z tych przebiegów są pokazane na rys. 4.17. Pokazane tam wyniki symulacji przy wsparciu schematu z rys. 4.16 pozwalają zilustrować zasadę działania rozpatrywanego modelu, jak i zjawiska towarzyszące uruchomieniu napędu. Zauważmy, że pokazane krzywe odnoszą się do pierwszej sekundy po załączeniu silnika. W czasie ok. 0,07s gwałtownie rośnie moment

napędowy silnika (M_e - rys. 4.17c) powodując równie gwałtowny wzrost prędkości kątowej jego wirnika (ω_r - rys. 4.17b)), niemal do wartości prędkości synchronicznej ω_1 . Na podstawie charakterystyki momentu silnika indukcyjnego wiemy (rys. 2.7), że w tym obszarze ($\omega_r \rightarrow \omega_1$) szybko maleje moment silnika, co jest jasakro widoczne na rys. 4.17c. W tym czasie następuje tylko niewielki ruch wału silnika, reprezentowany przez zmianę kąta γ_r , rys. 4.17a. Wirnik silnika jest połączony z wałem maszyny roboczej (obciążeniem) przez lekko elastyczne sprzężenie (rys. 4.15), dzięki czemu w tej fazie rozruchu część wału związana z obciążeniem, pozostaje praktycznie nieruchoma, co jest potwierdzone przez wartość kąta γ_m , rys. 4.17a. Widać tam również przyrost kąta $\Delta\gamma$, który wskazuje na rozchylenie kątowe pomiędzy obu końcami wału (ta krzywa na rys. 4.17a jest pokazana w stopniach kątowych ($^\circ$), co lepiej uwypukla zachodzący proces). Wartość odchyłki kątowej $\Delta\gamma$ (z uwzględnieniem współczynnika sprężystości k_{rm}) jest miarą momentu obrotowego przekazywanego pomiędzy silnikiem a obciążeniem). W modelu układu ta wielkość jest oznaczona zmienną del_f (rys. 4.16).



Rys. 4.17. Wykresy poszczególnych wielkości podczas rozruchu układu

Model ten odnosi się do podobnego układu, jaki był analizowany w przykładzie 2.2. W tym przypadku uwzględnione zostały niektóre zjawiska związane z modelem tarcia nieliniowego (tarcie spoczynkowe) oraz luzem w połączeniach pomiędzy elementami układu. Model ten można łatwo uzupełnić o układ uwzględniający sprężystość sprzęgła: na podstawie (2.11) otrzymujemy:

$$\mu_w \frac{d(\gamma_r - \gamma_m)}{dt} + k_w (\gamma_r - \gamma_m) = \mu_w \Delta\omega + k_w \Delta\gamma = M_w,$$

gdzie: $\Delta\omega = \dot{\gamma}_r - \dot{\gamma}_m$, $\Delta\gamma = \gamma_r - \gamma_m$.

Model SIMULINK przedstawiony na rys. 4.16 (bez uwzględnienia sprężystości sprzęgła) został umieszczony w pliku `naped_2_mass_2.slx`. Należy go uruchamiać z pliku `naped_2_mass_start.m`, w którym są zapisane parametry modelu oraz dane do symulacji. Modele uwzględniające współczynnik sprężystości sprzęgła μ_w umieszczono w podobnej parze plików: `naped_2_mass_3.slx` oraz `naped_2_mass_start3.m`.

Analiza zjawiska tarcia jest zagadnieniem bardzo ważnym w technice. Należy zauważyć, że łączy się ono nie tylko z potrzebą pokonania oporów ruchu, ale w wielu przypadkach zwiększenie oporów ruchu staje się celem takich badań (w przypadku układów hamujących, czy sprzęgieł). Rozpatrywane modele są stosowane do analizy różnych systemów technicznych w transporcie, automatyce, czy mechatronice, ale także w tak zdawałoby się odległych dziedzinach, jak badanie obsuwających się górotworów, czy dynamiki związanej ze zjawiskami towarzyszącymi trzęsieniu ziemi.

4.3. Ruch falowy

Ruch falowy jest związany z przemieszczaniem się zaburzenia w przestrzeni. Jest on zatem wywołany przez zaburzenie, które następnie, dzięki odpowiednim właściwościom ośrodka, w którym powstało, może się przemieszczać. Ruch ten jest związany z przekazywaniem energii. Ze względu na formę przekazywania energii i sposób rozchodzenia się drgań, w ogólnym przypadku rozróżnia się *fale mechaniczne* oraz *fale elektromagnetyczne*²⁴.

Praktyczny aspekt teorii fal jest bardzo ważny w technice (wystarczy wspomnieć o akustyce, radiotechnice, elektroenergetyce, transporcie przewodami rurowymi, czy taśmociągami) i we wszystkich przyrodniczych zagadnieniach dynamicznych, jak trzęsienie ziemi, zjawiska pływowe, czy biologia komórki żywego organizmu. Modelowanie zjawisk związanych z tymi procesami pozwala poznać ich istotę oraz uzyskać możliwość ich nadzorowania w celu osiągnięcia pożądanych efektów w zakresie stabilności, optymalizacji, czy innych użytecznych funkcji. Poniższy materiał jest przypomnieniem podstawowych zagadnień znanych z kursu fizyki, który został dopełniony niektórymi praktycznymi przykładami.

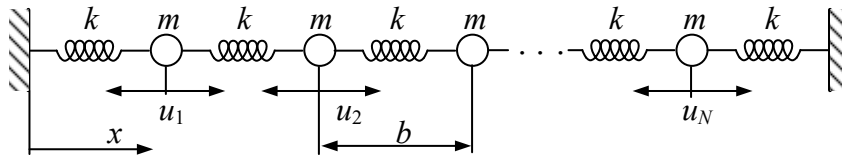
4.3.1. Fale mechaniczne

Fale mechaniczne występują w przypadku, gdy zaburzenie przemieszcza się w ośrodku, który wykazuje cechy sprężystości, jak: woda, metal, powietrze. Drgania wywołane zaburzeniem są przekazywane do sąsiednich elementów struktury materiału (sąsiednich cząsteczek), co powoduje rozprzestrzenianie się fali. Ze względu na charakter

²⁴ W 2015 roku potwierdzone zostało także występowanie fal grawitacyjnych, jednak nie są one tutaj przedmiotem naszego zainteresowania (GUBSER S.S., PRETORIUS F., *Czarne dziury bez tajemnic*. Prószyński i S-ka, Warszawa 2018).

tego zjawiska, rozróżnia się *fale podłużne* oraz *fale poprzeczne*. W pierwszym przypadku drgania występują w kierunku rozchodzenia się fali (np. fale akustyczne), natomiast fala poprzeczna charakteryzuje się drganiami, które zachodzą prostopadle do kierunku jej rozprzestrzeniania się (drganie struny). Mogą także wystąpić fale o charakterze mieszanym (fale w wodzie, gdzie na powierzchni mamy do czynienia z falami poprzecznymi, a w głębi wody występują tylko fale podłużne). Łatwo zauważyć, że w modelu ruchu falowego, oprócz zmiennej niezależnej, która reprezentuje czas (jak w przypadku drgań), występują także zmienne niezależne, reprezentujące współrzędne przestrzeni. W najprostszym przypadku będzie to jedna współrzędna, na przykład, gdy rozpatrywany jest ruch drgającej struny w instrumencie muzycznym (przy zaniedbaniu procesów zachodzących w przekroju poprzecznym samej struny).

Model fali mechanicznej łączy dwa rodzaje ruchów: drgania oraz przesunięcia w przestrzeni. W celu utworzenia odpowiedniego modelu fali mechanicznej podłużnej, rozpatruje się zazwyczaj uproszczony łańcuch N szeregowo połączonych komórek złożonych z jednakowych elementów k (sprężyna) oraz m (masa), z pominięciem masy sprężyny oraz efektów związanych z grawitacją, jak na rys. 4.18 [17]. Skrajne sprężyny są jednym końcem zamocowane do nieruchomej ściany. W stanie ustalonym, odległość b pomiędzy poszczególnymi masami m jest stała. W tym stanie, odchylenia poszczególnych mas od punktów równowagi są równe zero: $u_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Punkty zamocowania całej konstrukcji są nieruchome: $u_0 = u_{N+1} = 0$.



Rys. 4.18. Schemat układu do analizy fali mechanicznej podłużnej

W przypadku zewnętrznego pobudzenia którejkolwiek z mas przez odchylenie jej od punktu równowagi, rozpocznie się ruch falowy. Drganie masy i -tej komórki można opisać zależnością (2.4) z pominięciem współczynnika oporów:

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = -\frac{K}{M}(u_i - u_{i+1}) - \frac{K}{M}(u_i - u_{i-1}) = \frac{K}{M}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (4.26)$$

Zauważmy, że wielkość u_i jest ciągłą funkcją względem czasu t oraz dyskretną funkcją względem odległości $x_i = b \cdot i$, $i = 1, 2, \dots, N$. W tym ostatnim przypadku, wyrażenie w nawiasie ostatniej równości (4.26) można połączyć ze wzorem na dyskretną postać drugiej pochodną funkcji względem odległości:

$$\left. \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right|_{x=b \cdot i} \approx \frac{1}{b^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (4.27)$$

przy czym: $u_0 = u_{N+1} = 0$.

Przechodząc do granicy podziału struny o długości l na $N \rightarrow \infty$ komórek, każda o długości $b \rightarrow 0$, otrzymamy ciągłą postać zależności (4.26):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (4.28)$$

gdzie: $v^2 = \frac{F}{\rho_l}$ [m^2/s^2], $F = k \cdot b$ - naprężenie [N], $\rho_l = \frac{m}{b}$ - gęstość liniowa [kg/m].

Zależność (4.28) jest znana jako równanie falowe. Widać, że wielkość v jest prędkością rozchodzenia się fali, która jest zależna od rodzaju fali oraz materiału, w którym rozchodzi się fala. Podana powyżej zależność jest stosowana w odniesieniu do fali poprzecznej, rozchodzącej się w napiętej strunie przy pominięciu strat (bez tłumienia).

W ogólnym przypadku, prędkość jest definiowana przez następującą relację:

$$v = \sqrt{\frac{\text{czynniki sprężystości}}{\text{czynniki bezwładności}}} \quad (4.29)$$

Oba te czynniki przybierają formę stosowną do rodzaju medium i charakteru propagacji fali. Na przykład, w przypadku fali podłużnej w cieczy, sprężystość jest wyrażana za pomocą współczynnika sprężystości²⁵ B [Pa] (ang. *bulk modulus*), co prowadzi do następującej zależności: $v^2 = B/\rho_v$, gdzie ρ_v jest gęstością objętości [kg/m^3]. Przy podobnej ocenie w odniesieniu do materiałów stałych (stal, beton), korzysta się z modułu Younga²⁶ E : $v^2 = E/\rho_v$. W przypadku gazów zazwyczaj zakłada się, że ruch falowy jest procesem adiabatycznym (bez wymiany ciepła z otoczeniem), zmieniają się natomiast inne parametry, jak ciśnienie, temperatura, objętość. To powoduje, że współczynnik sprężystości zależy od parametrów cieplnych gazu. Izotermiczny (przemiana przy stałej temperaturze) współczynnik sprężystości (objętościowej) jest definiowany następująco [18]: $B_s = \kappa p$, gdzie: κ jest tzw. wykładnikiem adiabaty: $\kappa = C_p/C_v$ (wielkość niemianowana), C_p - ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu, C_v - ciepło właściwe przy stałej objętości, p - ciśnienie. Wówczas, prędkość propagacji fali dźwiękowej: $v^2 = \kappa p/\rho_v$, p - ciśnienie.

Szczegółowe dane materiałowe składające się na zależność (4.29) mogą się różnić, w zależności od charakteru medium, w którym rozchodzi się fala - a więc także w za-

²⁵ Współczynnik sprężystości jest miarą odporności materiału na deformację objętościową: $B = -V(\partial p/\partial V)$ [Pa], V - objętość, p - ciśnienie.

²⁶ Moduł Younga jest współczynnikiem odkształcenia liniowego (współczynnik sprężystości podłużnej materiału), [N/m^2], [Pa].

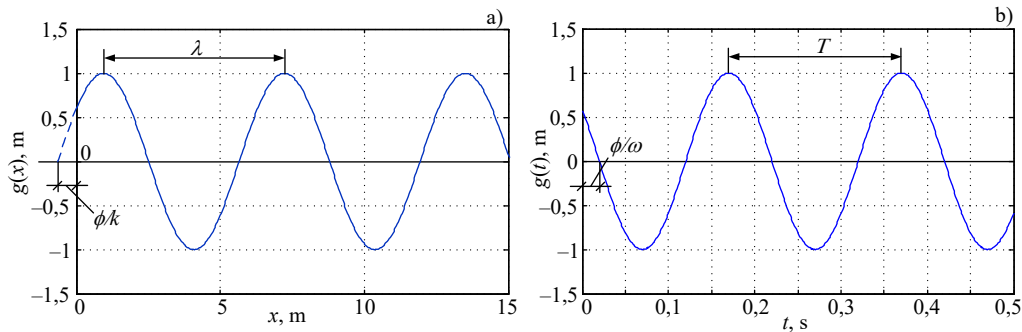
leżności od rodzaju fali. Jak widać, w przypadku fal podłużnych (w gazach, płynach), należy stosować współczynnik sprężystości objętościowej oraz gęstość objętościową materiału.

Równanie (4.28) jest znane, jako równanie cząstkowe hiperboliczne. Jeśli współczynnik v nie jest zależny od czasu t , ani od odległości x , to mamy do czynienia z równaniem stacjonarnym. W przeciwnym przypadku będzie to równanie niestacjonarne. Jeśli natomiast parametr v nie zależy od funkcji $u(x,t)$, to jest to równanie liniowe [53]. Dalej będziemy się zajmować równaniami liniowymi, stacjonarnymi. Są one spełnione dla bardzo szerokiej klasy funkcji o postaci: $u(x,t) = g(y)$, $y = x \pm vt$, gdzie funkcja $g(y)$ musi spełniać warunek podwójnej różniczkowalności względem argumentu y . Znak ‘+’ w reprezentacji funkcji y oznacza falę biegnącą w lewo (w kierunku zmniejszającego się argumentu x), natomiast znak ‘-’ odnosi się do fali biegnącej w prawo. W szczególności, przy harmonicznym pobudzeniu, funkcja $g(y)$ będzie reprezentowana przez sinusoidę:

$$g(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt + \phi)\right) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad (4.30)$$

gdzie: $\lambda = v/f$ - długość fali; f - częstotliwość ($T = 1/f$ - okres drgań); $\omega = 2\pi f$; $k = 2\pi/\lambda$ - numer fali (podobnie, jak numer harmonicznej); ϕ - faza początkowa.

Fala harmoniczna o postaci (4.30) daje sposobność do wygodnej ilustracji podstawowych wielkości odnoszących się do modelu fali (rys. 4.19). Rysunki wykonano dla następujących parametrów: $A = 1$ m, $\phi = \pi/5$, $\lambda = 6,28$ m, $f = 5$ Hz. Wynika stąd, że prędkość propagacji fali wynosi: $v = \lambda \cdot f = 31,4$ m/s.



Rys. 4.19. Fala biegnąca: a) względem odległości x ($t = 0$), b) względem czasu t ($x = 0$)

Przykład 4.5.

Obliczyć prędkość rozchodzenia się fali w trzech ośrodkach: powietrzu, wodzie oraz stali, na podstawie danych materiałowych umieszczonych w Tabeli 4.1

Tabela 4.1. Dane techniczne niektórych materiałów

	współczynnik sprężystości, B	moduł Younga, E	wykładnik adiabaty κ	gęstość, ρ_v
	Pa	Pa		kg/m ³
powietrze	$1,42 \cdot 10^5$			1,21
woda	$2,2 \cdot 10^9$			1000
stal	$1,6 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$		7800

W zależności od dostępnych danych fizycznych, prędkość rozchodzenia się fali można określić na podstawie różnych szczegółowych zależności. W podanym przypadku posłużymy się następującymi zależnościami:

$$\text{- powietrze: } v = \sqrt{\frac{B_s}{\rho_v}} = \sqrt{\frac{1,42 \cdot 10^5}{1,21}} = 342,6 \text{ m/s}$$

$$\text{- woda: } v = \sqrt{\frac{B_s}{\rho_v}} = \sqrt{\frac{2,2 \cdot 10^9}{1000}} = 1483,2 \text{ m/s}$$

$$\text{- stal: } v = \sqrt{\frac{E}{\rho_v}} = \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11}}{7800}} = 5188,7 \text{ m/s}$$

Zakłada się, że we wszystkich rozpatrywanych przypadkach mamy do czynienia z falą podłużną, co w przypadku wody oznacza falę wewnątrz czynnika.

Równanie (4.28) można łatwo rozszerzyć na większą liczbę wymiarów. Na przykład, model fali w przestrzeni trójwymiarowej przyjmuje następującą formę:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right), \quad (4.31)$$

co można zapisać w skróconej postaci:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u(x, y, z, t), \quad (4.32)$$

$$\text{gdzie: } \nabla u(x, y, z, t) = \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z},$$

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2}.$$

Stosowane są tu następujące przyjęte oznaczenia operatorów różniczkowania:

- operator nabra:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.33)$$

- operator Laplace'a (laplasjan):

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.34)$$

Równanie falowe (4.32) jest zazwyczaj zapisywane w następującej postaci:

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.35)$$

Istnieje wiele specyficznych zjawisk i charakterystyk związanych z ruchem falowym w różnych ośrodkach, które odnoszą się do zastosowań technicznych w akustyce, defektoskopii, sonografii, geologii, transporcie gazu lub materiałów sypkich i innych. Niektóre ogólne omówienie tych zagadnień można znaleźć w podręcznikach z fizyki [18]. Do powtórzenia podstawowych wiadomości z tego zakresu można także korzystać z notatek lub prezentacji do wykładów²⁷.

W wielu praktycznych zagadnieniach, zwłaszcza związanych z obliczeniami numerycznymi, wygodnie jest analizować równania falowe w postaci układu równań pierwszego rzędu. Jest to koncepcja podobna do sprowadzania równań różniczkowych zwyczajnych wysokiego rzędu do układu równań zmiennych stanu (układ równań pierwszego rzędu). W przypadku równania (4.28) można dokonać podstawienia: $w_t = v \cdot u_x$, które prowadzi do następującej reprezentacji (4.28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= v \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} &= v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.36)$$

co można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.37)$$

Jak widać, występuje tu rozdzielenie funkcji dwóch zmiennych niezależnych $u(x, t)$ na dwie funkcje, z których pierwsza jest zależna od czasu t przy ustalonej wartości odległości x : $u_x(t)$, natomiast druga: $w_t(x)$ jest funkcją względem odległości przy ustalonej war-

²⁷ http://www.ifpan.edu.pl/ON-2/on22/modernoptics/lectures/notatki/02fale_print.pdf

tości czasu. W ogólnym przypadku, po prawej stronie równania (4.37) może stać wymuszenie (wartość stała lub funkcja), co decyduje o niejednorodności równania. Podobne podejście można także stosować w odniesieniu do modeli fal rozprzestrzeniających się w środowisku o większej liczbie wymiarów.

Ze zjawiskami falowymi łączą się znane z fizyki terminy, jak: prędkość rozchodzenia się modulacji, czyli prędkość grupowa (odpowiada prędkości przenoszenia informacji i energii przez falę), odbicie lub załamanie fali, interferencja fal i inne.

4.3.2. Fale elektromagnetyczne

Fale elektromagnetyczne nie wymagają żadnego medium, gdyż ich propagacja zachodzi również w próżni. Model matematyczny tych fal łączy się bezpośrednio z równaniami Maxwella²⁸ opisującymi pole elektromagnetyczne. Maxwell w publikacji z 1865 roku w genialny sposób połączył znane wówczas oddzielne prawa: Gaussa dotyczące elektryczności (związek pola elektrycznego z ładunkiem elektrycznym – pole źródłowe) i magnetyzmu (strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez zamkniętą powierzchnię jest równy zero – pole bezźródłowe), Ampera, określające zależność pola magnetycznego od prądu oraz zasadę indukcji Faradaya (siła elektromotoryczna jest proporcjonalna do szybkości zmian strumienia magnetycznego). Wynikające stąd równania falowe reprezentują wzajemnie prostopadłe fale elektryczne i magnetyczne, które transportują energię pola elektromagnetycznego w określonym środowisku lub w pustej przestrzeni (próżni). W tym ostatnim przypadku (przy braku ładunku elektrycznego i bez obecności źródeł prądowych), równanie przestrzennej fali elektromagnetycznej przyjmuje następującą postać [18], [69]:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},\end{aligned}\tag{4.38}$$

gdzie: \mathbf{E} - natężenie pola elektrycznego (V/m), \mathbf{B} - indukcja magnetyczna (T), c – prędkość światła w próżni.

Szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię płaskiej fali elektromagnetycznej określa wektor Poyntinga²⁹:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B},\tag{4.39}$$

²⁸ James Clerk Maxwell (1831 - 1879) – fizyk i matematyk szkocki.

²⁹ John Henry Poynting (1852–1914) – fizyk brytyjski.

gdzie: po prawej stronie występują wzajemnie prostopadłe wektory natężenie pola elektrycznego \mathbf{E} oraz indukcji magnetycznej \mathbf{B} , natomiast wektor \mathbf{S} ($\text{J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) = \text{W}/\text{m}^2$) jest prostopadły do obu tych wektorów, co oznacza, że energia jest transportowana zgodnie z kierunkiem rozchodzenia się fali elektromagnetycznej; μ (H/m) - przenikalność magnetyczna, czyli podatność danego ośrodka do zmiany indukcji magnetycznej na zmianę natężenia pola magnetycznego³⁰.

Śledząc rozchodzenie się fali elektromagnetycznej tylko wzdłuż osi x , otrzymamy zależności analogiczne do (4.28):

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (4.40)$$

przy czym, dla próżni:

$$\frac{E_y}{B_z} = v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

gdzie: E_y – amplituda natężenia pola elektrycznego V/m,

B_z – amplituda indukcji magnetycznej T,

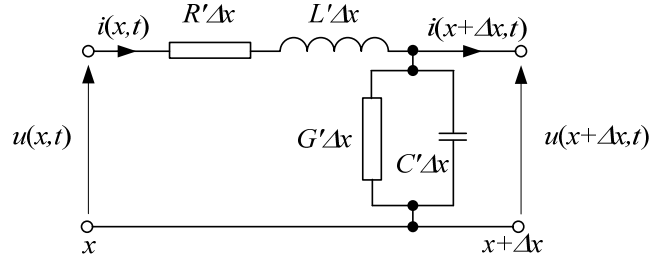
$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})$ – przenikalność magnetyczna próżni,

$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ – przenikalność elektryczna próżni.

Energia transportowana przez fale elektromagnetyczne może mieć, z praktycznego punktu widzenia, różny charakter, co ma związek z zakresem częstotliwości tych fal i możliwością ich wykorzystania. Mówimy więc o przekazywaniu energii słonecznej, energii cieplnej (na drodze promieniowania), przesyle energii elektrycznej, czy też ogólnie – o komunikacji za pośrednictwem fal radiowych lub świetlnych. Wprawdzie fale elektromagnetyczne rozchodzą się promieniowo w przestrzeni, jednak można stosować różne rozwiązania w celu ukierunkowania ich przesylu (kierunkowe anteny nadawcze lub odbiorcze, a także falowody).

Do przesylu energii elektrycznej są powszechnie stosowane linie elektroenergetyczne. Dzięki dobrym właściwościom przewodzenia metali, pole elektromagnetyczne może być skupione w przewodzie i niedużej od niego odległości, co w znacznej mierze pozwala pominąć przestrzenny charakter pola elektromagnetycznego. Model fali elektromagnetycznej w takim przypadku można wyprowadzić, posługując się wielkościami odnoszącymi się do obwodu elektrycznego, w którym rozpatruje się tylko jeden wymiar przestrzenny związany z długością linii (model dwuprzewodowej ‘jednofazowej’ linii długiej - rys. 4.20 [40]).

³⁰ Na podstawie znanej zależności: $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, wektor Poyntinga jest także przedstawiany w postaci: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, \mathbf{H} – natężenie pola magnetycznego (A/m).



Rys. 4.20. Schemat odcinka linii długiej

Wychodząc z bilansu napięć w utworzonym oczku oraz bilansu prądów w węźle, możemy napisać następujące równania:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= R'\Delta x \cdot i(x,t) + L'\Delta x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + u(x+\Delta x,t), \\ i(x,t) &= G'\Delta x \cdot u(x+\Delta x,t) + C'\Delta x \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial t} + i(x+\Delta x,t), \end{aligned} \quad (4.41)$$

gdzie: R' , G' , L' , C' – jednostkowe parametry obwodu: rezystancja, przewodność, indukcyjność oraz pojemność w odniesieniu do jednostki długości oznaczonej przez Δx .

Po podzieleniu równań (4.41) przez wielkość Δx i przejściu do granicy: $\Delta x \rightarrow 0$, otrzymamy znane równania falowe linii długiej z uwzględnieniem jej stratności:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= R'i(x,t) + L' \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= G'u(x,t) + C' \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Przez dodatkowe różniczkowanie powyższych równań, odpowiednio, względem czasu t i względem odległości x , można wydzielić z nich oddzielne równanie dla napięcia i dla prądu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= R'G'u + (R'C' + G'L') \frac{\partial u}{\partial t} + L'C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= R'G'i + (R'C' + G'L') \frac{\partial i}{\partial t} + L'C' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Jak widać, oba równania mają jednakową strukturę i reprezentują fale: prądową $i(x,t)$ oraz napięciową $u(x,t)$, biegnące wzdłuż linii. W ogólnym przypadku fale te są tłumione w zależności od wartości parametrów R' , G' , rozpraszających energię. Analiza i numeryczne rozwiązywanie równań o postaci, jak w (4.43) jest dosyć złożone,

zwłaszcza jeśli rozpatrywana linia jest elementem większego obwodu. Dąży się zatem do uproszczenia modelu linii, co polega na pominięciu strat: $R' = 0$, $G' = 0$. Nie jest to zazwyczaj przesadne uproszczenie, gdyż poprawnie zbudowana linia elektryczna będzie się z pewnością charakteryzowała dobrą przewodnością podłużną (mała rezystancja R') oraz dobrą izolacją (mała wartość przewodności G'). Prowadzi to do równań linii bezstratnej:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= 0,\end{aligned}\tag{4.44}$$

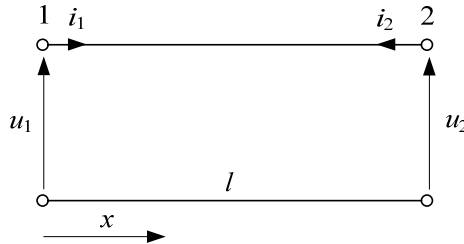
gdzie: $v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$ jest szybkością rozprzestrzeniania się fali.

Dodatkową zaletą reprezentacji modelu fali w postaci (4.44) jest prosta, intuicyjna analiza rozchodzenia się fali bezstratnej. Jeśli założyć, że w dowolnym punkcie linii falę biegnącą $u(x,t)$ można rozpatrywać w postaci superpozycji dwóch fal poruszających się w przeciwnych kierunkach, to otrzymamy:

$$u(x,t) = u_a(x-vt) + u_b(x+vt),\tag{4.45}$$

gdzie $u_a(x-vt)$ ma kierunek dodatni, a $u_b(x+vt)$ – kierunek ujemny³¹.

Podobna relacja odnosi się także do fali prądowej, przy czym, wygodnie jest przyjąć jednakowe kierunki prądów na obu końcach linii, względem węzłów wyznaczających końce linii (rys. 4.21).



Rys. 4.21. Oznaczenie zmiennych w modelu linii długiej

Prowadzi to do następującego związku:

$$i(x,t) = i_a(x-vt) - i_b(x+vt) = \frac{1}{Z_f} (u_a(x-vt) - u_b(x+vt)),\tag{4.46}$$

³¹ Podejście to jest znane jako metoda charakterystyk [40].

gdzie Z_f jest impedancją falową linii.

Wartość impedancji falowej można określić przez podstawienie relacji (4.46) do podstawowego równania falowego linii bezstratnej, skąd otrzymuje się:

$$Z_f = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (4.47)$$

Wielkości odnoszące się do obu kierunków fal: $u_a(x-vt)$ oraz $u_b(x+vt)$ mogą zostać wyeliminowane, jeśli założymy, że fala wysłana na początku linii o długości l w chwili $t-\tau$ $u_a(0-v(t-\tau))$, osiągnie drugi jej koniec po czasie τ $u_a(l-vt)$, skąd: $u_a(-v(t-\tau)) = u_a(l-vt)$. Ponadto, na podstawie (4.45) oraz (4.46) otrzymamy:

$$u_a(x-vt) = \frac{1}{2}(u(x,t) + Z_f i(x,t)) \quad (4.48)$$

W praktycznym zastosowaniu rozważanego modelu linii można zrezygnować z ciągłej wartości zmiennej x , zakładając, że interesuje nas tylko rozwiązanie na obu jej końcach: $x=0$ (początek linii, indeks 1) oraz $x=l$ (koniec linii, indeks 2) – rys. 4.21. Powyższe równanie zapisane dla obu końców linii daje następujące relacje:

$$\begin{aligned} u_a(0-v(t-\tau)) &= \frac{1}{2}(u_1(x,t-\tau) + Z_f i_1(x,t-\tau)) \\ u_a(l-vt) &= \frac{1}{2}(u_2(x,t) + Z_f i_2(x,t)) \end{aligned} \quad (4.49)$$

co ostatecznie prowadzi do następujących równań:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{1}{Z_f} u_1(t) - \frac{1}{Z_f} u_2(t-\tau) - i_2(t-\tau), \\ i_2(t) &= \frac{1}{Z_f} u_2(t) - \frac{1}{Z_f} u_1(t-\tau) - i_1(t-\tau), \end{aligned} \quad (4.50)$$

gdzie $\tau = l/v$ – czas przejścia fali przez linię.

Model (4.50) może być łatwo zapisany w odniesieniu do dyskretnego czasu: $t_k = kT$ (T – długość kroku symulacji), co jest przydatne do tworzenia cyfrowych (komputerowych) modeli linii elektrycznej:

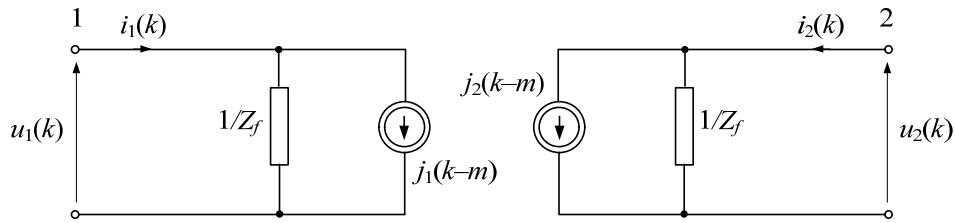
$$\begin{aligned} i_1(k) &= \frac{1}{Z_f} u_1(k) - \frac{1}{Z_f} u_2(k-m) - i_2(k-m), \\ i_2(k) &= \frac{1}{Z_f} u_2(k) - \frac{1}{Z_f} u_1(k-m) - i_1(k-m), \end{aligned} \quad (4.51)$$

gdzie m – liczba kroków symulacji odpowiadających czasowi τ przejścia fali wzdłuż linii: $m = \tau/T$.

Modelowi (4.50) odpowiada schemat elektryczny, jak na rys. 4.22, gdzie:

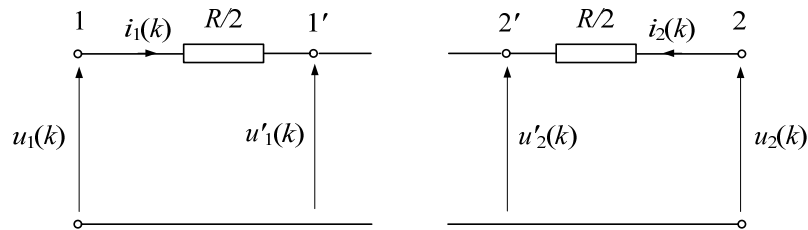
$$\begin{aligned} j_1(k-m) &= -\frac{1}{Z_f} u_2(k-m) - i_2(k-m), \\ j_2(k-m) &= -\frac{1}{Z_f} u_1(k-m) - i_1(k-m), \end{aligned} \quad (4.52)$$

są źródłami prądowymi, reprezentującymi historie stanu przejściowego na przeciwnych końcach linii.



Rys. 4.22. Schemat zastępczy dyskretnego modelu linii długiej

Łatwo zauważyć, że uzyskany model jednorodnej linii jednofazowej jest niezwykle efektywny numerycznie. Uproszczenie związane z pominięciem rezystancji linii można w dużej mierze w prosty sposób naprawić przez umieszczenie w przedstawionym modelu oporników (model o parametrach skupionych) na obu końcach uzyskanego modelu (rys. 4.23).



Rys. 4.23. Sposób uwzględnienia rezystancji w modelu linii długiej

Model z rys. 4.22 jest tutaj umieszczony pomiędzy węzłami 1' – 2', natomiast dodane oporniki powodują spadki napięć, które łatwo uwzględnić w końcowych równaniach:

$$\begin{aligned} i_1(k) &= G_f u_1(k) + j_1(k-m), \\ i_2(k) &= G_f u_2(k) + j_2(k-m), \end{aligned} \quad (4.53)$$

gdzie:

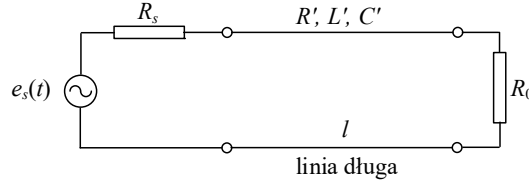
$$\begin{aligned} j_1(k-m) &= -G_f u_2(k-m) - h_f i_2(k-m), \\ j_2(k-m) &= -G_f u_1(k-m) - h_f i_1(k-m), \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$G_f = \frac{1}{Z_f + R/2}, \quad h_f = \frac{2Z_f - R}{2Z_f + R}.$$

W przypadku konieczności bardziej dokładnej reprezentacji rezystancji w modelu linii, omówiona korekta jest rozszerzana na większą liczbę odpowiednio podzielonych rezystancji reprezentowanych modelami skupionymi [40]. Kolejne przykłady ilustrują wykorzystanie tego modelu do symulacji stanów przejściowych w obwodach elektrycznych.

Przykład 4.6.

Korzystając z modelu linii długiej (4.53), (4.54) przeprowadzić symulację stanu przejściowego w obwodzie z rys. 4.24 po załączeniu napięcia zasilającego. Przyjąć następujące parametry: $e_s(t) = 180\sin(100\pi t + \pi/3)\text{kV}$, $R_s = 2,5\Omega$, $R_0 = 250\Omega$, $R' = 0,04\Omega/\text{km}$, $L' = 1,6 \cdot 10^{-3}\text{H}/\text{km}$, $C' = 1,05 \cdot 10^{-8}\text{F}/\text{km}$, $l = 160\text{km}$.

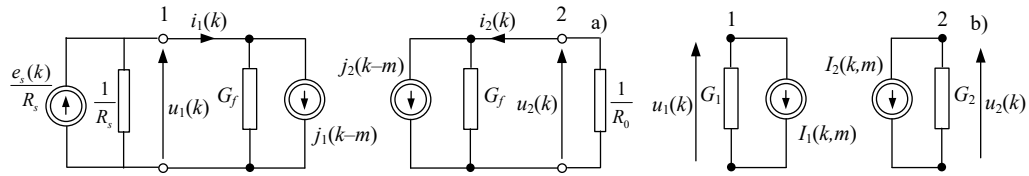


Rys. 4.24. Schemat obwodu z linią przesyłową

Rozpatrywany schemat może przedstawiać typowy obwód odnoszący się do składowej zgodnej trójfazowej linii przesyłowej 220kV (co jest reprezentowane linią jednofazową), w którym zastąpiono rzeczywiste impedancje opornikami. Jeśli w dalszej analizie skorzystamy ze schematu zastępczego linii z rys. 4.23 z uwzględnieniem rys. 4.22, to schemat zastępczy całego obwodu należy przedstawić w konwencji prądowo-przewodnościowej: rys. 4.25a).

Schemat ten można łatwo uprościć do postaci, jak na rys. 4. 25b), gdzie:

$$G_1 = G_f + \frac{1}{R_s}, \quad G_2 = G_f + \frac{1}{R_0}, \quad I_1(k, m) = j_1(k-m) - \frac{e_s(k)}{R_s}, \quad I_2(k, m) = j_2(k-m).$$



Rys. 4.25. Schemat zastępczy rozpatrywanego obwodu z linią długą (a), po uproszczeniu (b)

Na podstawie schematu z rys. 4. 25b) można określić sposób obliczania napięcia na obu końcach linii:

$$u_1(k) = \frac{-I_1(k, m)}{G_1} = \frac{1}{G_1} \left(\frac{e_s(k)}{R_s} - j_1(k-m) \right),$$

$$u_2(k) = -\frac{I_2(k, m)}{G_2} = \frac{-j_2(k-m)}{G_2}.$$

Następnie można obliczyć prądy na obu końcach linii:

$$i_1(k) = j_1(k-m) + G_f u_1(k),$$

$$i_2(k) = j_2(k-m) + G_f u_2(k).$$

Zauważmy, że powyższe równania napięciowe i prądowe w obu węzłach (na obu końcach linii) są wzajemnie uzależnione przez prądy i napięcia przesyłane z przeciwnego końca, w postaci tych właśnie wartości napięć i prądów, przesuniętych w czasie o liczbę próbek m . Do imitacji tego procesu należy w programie komputerowym zorganizować odpowiednie rejestry przesuwne, które odtwarzają przesuwanie się fali wzdłuż linii. Długość tych rejestrów (m komórek pamięci) zależy od czasu propagacji τ fali wzdłuż linii oraz przyjętego kroku modelowania T . Jak widać, wybór długości kroku modelowania T musi być uzgodniony z czasem przejścia fali wzdłuż linii, aby nie wystąpił zbyt duży błąd zaokrąglenia wartości m :

$$m = \text{round}\left(\frac{\tau}{T}\right) = \text{round}\left(\frac{l}{Tv}\right) = \text{round}\left(\frac{l\sqrt{L'C'}}{T}\right) - \text{liczba całkowita}.$$

Do analizy wyników symulacji z zastosowaniem omawianej procedury został opracowany program `Przyklad_4_5a.m`, gdzie można prześledzić szczegóły dokonywanych obliczeń parametrów i prowadzonej symulacji.

Obliczmy podstawowe parametry modelu:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = 2,4398 \cdot 10^5 \text{ m/s},$$

$$Z_f = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 390,36 \Omega \quad - \text{impedancja falowa linii},$$

$$R_l = lR = 6,4 \Omega \quad - \text{rezystancja linii},$$

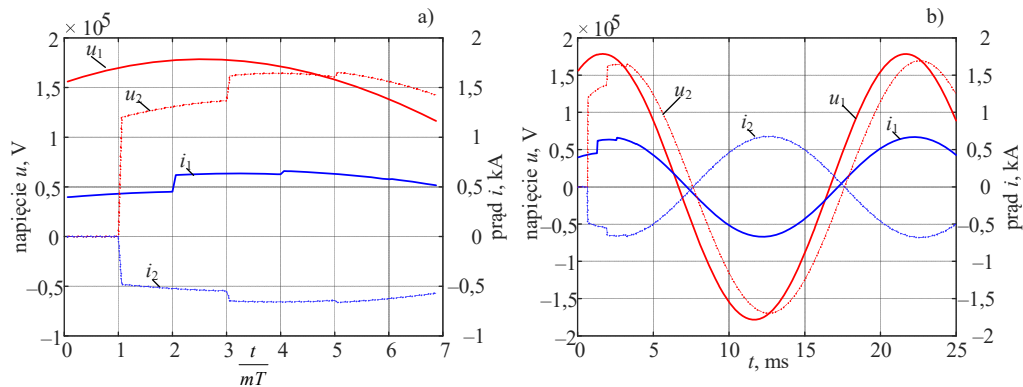
$$G_f = \frac{1}{Z_f + R_l / 2} = 0,0025 \text{ S} - \text{przewodność wypadkowa linii},$$

$$h_f = \frac{2Z_f - R_l}{2Z_f + R_l} = 0,9837 \quad - \text{współczynnik udziału impedancji falowej},$$

W programie przyjęto $T = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{s}$, co daje długość rejestrów: $m = \text{round}\left(\frac{l}{Tv}\right) = 16$ kroków

symulacji. Zakłada się zerowy stan początkowy linii.

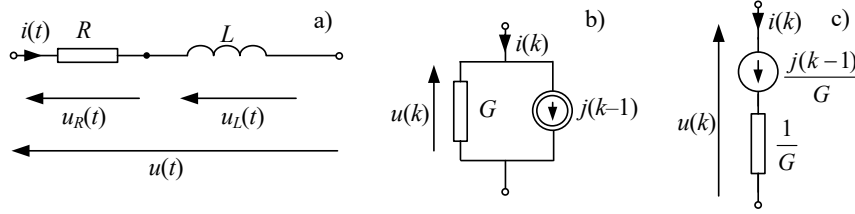
Przebiegi prądów i napięć na obu końcach linii są pokazane na rys. 4.26, przy czym, na rys. 4.26a) są pokazane przebiegi tuż po załączeniu zasilania względem czasu wyrażonego w okresach propagacji fali wzdłuż linii: $t/\tau = t/(mT)$, gdzie $\tau = 0,66 \text{ms}$. Widać efekt transportu sygnałów napięciowych i prądowych: prąd i_2 i napięcie u_2 pojawiają się na końcu linii po jednym okresie propagacji, natomiast oddziaływanie obciążenia na prąd strony pierwotnej i_1 pojawia się dopiero po powrocie odbitej fali na początek linii. Te same przebiegi w dłuższym okresie są pokazane na rys. 4.26b). Widać, że napięcie u_2 na końcu linii ma nieco mniejszą amplitudę i fazę w stosunku do napięcia u_1 , co wynika ze spadku napięcia na linii wywołanego prądem obciążenia oraz prądem pojemnościowym linii. Prąd i_2 ma przeciwną polaryzację w stosunku do i_1 , co jest związane z przeciwnym kierunkiem strzałek prądu na obu końcach linii (rys. 4.25).



Rys. 4.26. Przebiegi prądów i napięć w modelu symulacyjnym

Przez zmianę rezystancji obciążenia R_0 , można za pomocą tego modelu analizować warunki pracy linii nieobciążonej (bardzo duża wartość R_0) lub zwartej na końcu (mała wartość R_0).

Podjęcie prezentowane w powyższym przykładzie może być łatwo rozszerzone na modele obwodu z elementami reaktancyjnymi. W takim przypadku należy zastosować ich dyskretne modele. Rozważmy prosty przypadek, gdy obciążenie w przykładzie 4.6 jest reprezentowane w formie gałęzi RL (rys. 4.27a).



Rys. 4.27. Model gałęzi RL: ciągły (a), dyskretny prądowy (b) dyskretny napięciowy (c)

Dla modelu ciągłego napiszemy:

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (4.55)$$

lub:

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t) = f(t) \quad (4.56)$$

Numeryczne rozwiązanie powyższego równania może być określone następująco:

$$i(t_k) = i(t_k - T) + \int_{t_k - T}^{t_k} f(\tau) d\tau \quad (4.57)$$

Jeśli całkę w (4.57) przybliżyć za pomocą pola trapezu, to otrzymamy:

$$i(t_k) = i(t_k - T) + \frac{T}{2}(f(t_k - T) + f(t_k)) \quad (4.58)$$

Po zamianie funkcji $f(t_k)$ zgodnie z (4.56) oraz wykonaniu prostych przekształceń, uzyskamy dyskretny model gałęzi RL ($i(t_k) \rightarrow i(k)$, $t_k = Tk \rightarrow k$):

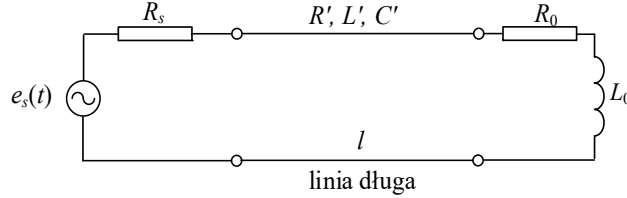
$$i(k) = Gu(k) + j(k-1), \quad (4.59)$$

gdzie: $G = \frac{T}{2L + RT}$, $j(k-1) = h_{RL}i(k-1) + Gu(k-1)$, $h_{RL} = \frac{2L - RT}{2L + RT}$.

Schemat zastępczy obwodu, odpowiadającego zależności (4.59) jest pokazany na rys. 4.27b). Jest to model dyskretny prądowy gałęzi RL skojarzony z metodą trapezów. Proste przekształcenie zależności (4.59) prowadzi do schematu modelu dyskretnego napięciowego - rys. 4.27c), przy czym, zachowano oznaczenia poszczególnych elementów z rys. 4.27b). W podobny sposób można uzyskać modele dyskretny innych gałęzi sieci, również z elementami pojemnościowymi. Sposób wykorzystania tych modeli jest pokazany w kolejnym przykładzie.

Przykład 4.7. Przeprowadzić symulację stanu przejściowego w układzie z przykładu 4.6, zakładając, że w charakterze obciążenia występuje gałąź RL o nastę-

pujących parametrach: $R_0 = 225 \Omega$, $L_0 = 0,3469\text{H}$ (rys. 4.28). Pozostałe parametry – jak w przykładzie 4.6.



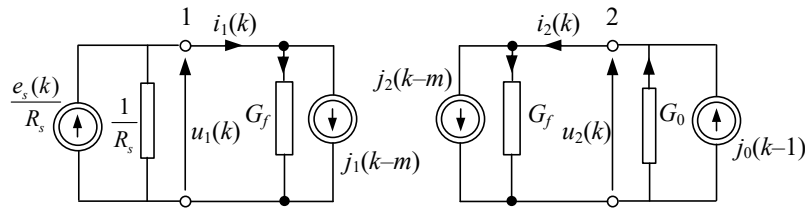
Rys. 4.28. Schemat obwodu z linią przesyłową i obciążeniem RL

Po uwzględnieniu dyskretnego modelu obciążenia w formie gałęzi RL, otrzymamy schemat zastępczy układu, jak na rys. 4.29. W kolejnym kroku można uprościć ten schemat do postaci, jak na rys. 4.25b), przy czym:

$$G_1 = G_f + \frac{1}{R_s}, \quad G_2 = G_f + G_0, \quad G_0 = \frac{T}{2L_0 + R_0T}, \quad I_1(k, m) = j_1(k-m) - \frac{e_s(k)}{R_s},$$

$$I_2(k, m) = j_2(k-m) - j_0(k-1), \quad j_0(k-1) = h_0 i_2(k-1) - G_0 u_2(k-1), \quad h_0 = \frac{2L_0 - R_0T}{2L_0 + R_0T}.$$

Pozostałe wielkości są obliczane, jak w przykładzie 4.6.



Rys. 4.29. Schemat zastępczy rozpatrywanego obwodu z obciążeniem R_0L_0

Na podstawie schematu z rys. 4.25b), z uwzględnieniem szczegółów z rys. 4.29, można określić sposób obliczania napięcia na obu końcach linii:

$$u_1(k) = \frac{-I_1(k, m)}{G_1} = \frac{1}{G_1} \left(\frac{e_s(k)}{R_s} - j_1(k-m) \right),$$

$$u_2(k) = -\frac{I_2(k, m)}{G_2} = \frac{j_0(k-1) - j_2(k-m)}{G_2}.$$

Wartość prądu $j_0(k-1)$ należy obliczać na podstawie wartości prądu $i_2(k-1)$ oraz napięcia $u_2(k-1)$ z poprzedniego kroku. Następnie można obliczyć prądy na obu końcach linii:

$$i_1(k) = j_1(k-m) + G_f u_1(k),$$

$$i_2(k) = j_2(k-m) + G_f u_2(k).$$

Pozostałe parametry odnoszące się do modelu linii należy obliczać, jak w przykładzie 4.6.

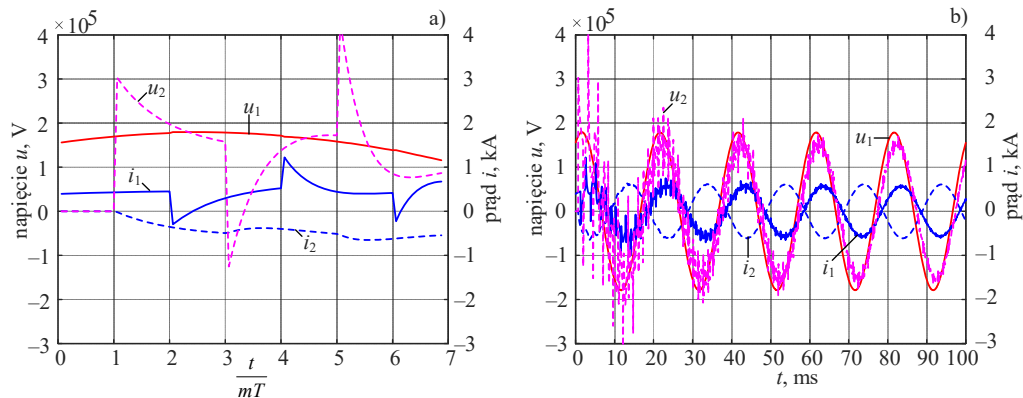
Niektóre wyniki symulacji stanu przejściowego związanego z załączeniem napięcia zasilającego przy zerowych warunkach początkowych są pokazane na kolejnych rysunkach.

Przebiegi napięć i prądów na obu końcach linii bezpośrednio po załączeniu zasilania są pokazane na rys. 4.30. Można zauważyć istotną zmianę w stosunku do rezultatów uzyskanych w modelu z obciążeniem rezystancyjnym (rys. 4.26). Widać, że gwałtowne zmiany prądu związane z przejściem fali na drugi koniec linii wywołują duże zmiany napięcia na obciążeniu z udziałem indukcyjności (rys. 4.30a)). To, w efekcie, wywołuje także gwałtowną zmianę fali powrotnej (prąd i_1). Zmiany te są z czasem tłumione i kolejne fale są mniej gwałtowne. Widać to wyraźnie w nieco dłuższym przedziale czasowym stanu przejściowego – rys. 4.30b).

Można sprawdzić, że intensywność obserwowanych oscylacji i stopień ich tłumienia zależy od udziału indukcyjności w impedancji obciążenia, czego miarą jest współczynnik mocy:

$$\cos(\varphi) = \frac{R_0}{Z_0}, \text{ gdzie: } Z_0 = \sqrt{R_0^2 + X_0^2} = \sqrt{R_0^2 + (\omega L_0)^2}, \varphi - \text{ kąt pomiędzy prądem i napięciem na}$$

obciążeniu, $\omega = 2\pi f = 100\pi$. Dla przyjętej wartości indukcyjności: $X_0 = 109\Omega$ oraz $\cos(\varphi) = 0,9$.



Rys. 4.30. Przebiegi prądów i napięć w modelu symulacyjnym z obciążeniem R_0L_0

W rozważanym modelu przyjęto, że wartość impedancji obciążenia Z_0 jest równa rezystancji obciążenia R_0 z przykładu 4.6, co sprawia, że w obu przypadkach wartość obciążenia (w zakresie amplitudy) jest taka sama.

Szczegóły symulacji omawianego układu można prześledzić, korzystając z programu `Przyklad_4_5b.m`, gdzie można łatwo zmieniać parametry obwodu.

Charakterystyczną cechą przedstawionego modelu linii długiej jest rozdzielenie całego rozważanego obwodu na dwie części, które są połączone linią z opóźnieniem, co pozwala w każdym kroku modelowania niezależnie rozwiązywać obwody związane ze schematami zastępczymi na obu końcach linii. Dzięki temu można redukować rozmiar zadania, rozumiany jako liczba wzajemnie powiązanych równań modelu. Takie rozwiązania są stosowane również przez umieszczenie fikcyjnej linii długiej z opóźnieniem o jeden krok modelowania w celu rozdzielenia złożonego zadania na mniejsze

części lub przez odseparowanie modelu nieliniowego od głównego modelu z elementami liniowymi. W ten sposób, model nieliniowy może być rozwiązywany autonomicznie z zastosowaniem odpowiednio dobranej procedury (na przykład procedury iteracyjnej) bez angażowania równań całego złożonego modelu.

W przypadku analizy stanu ustalonego w linii długiej można się posługiwać jej uproszczonym modelem, w którym pochodne cząstkowe są zamienione przez zwykłe pochodne. Jeśli założyć, że rozpatrujemy linię jednorodną (parametry wzdłuż linii nie zmieniają się) dla harmoniczných przebiegów napięcia i prądu (przebiegi sinusoidalnie zmienne o pulsacji ω), otrzymamy znane równania telegrafistów³²:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U} &= 0, \\ \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{I} &= 0,\end{aligned}\tag{4.60}$$

gdzie: $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ - stała propagacji fali, α - stała tłumienia (Np/km)³³, β - stała fazowa (rad/km); $\underline{U} = U(x, j\omega)$, $\underline{I} = I(x, j\omega)$ są wektorami, odpowiednio, napięcia i prądu.

Wielkości zespolone w (4.60) reprezentują wektory (fazory), odpowiednio, napięcia i prądu o pulsacji ω . Rachunek zespolony, wprowadzony do elektrotechniki przez Ch. Steinmetza,³⁴ zrewolucjonizował rozumienie zjawisk i obliczenia w zakresie obwodów prądu przemiennego.

4.4. Przepływ ciepła

4.4.1. A

4.4.2. B

In statu nascendi ...

³² Równania te zostały zaproponowane przez fizyka i inżyniera brytyjskiego Olivera Heaviside'a (1850 – 1925).

³³ Np (neper) jest jednostką tłumienia (podobnie, jak dB) i odpowiada mu zmiana wartości amplitudy sygnału w stopniu $e = 2,718...$; $1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB}$.

³⁴ Charles Proteus Steinmetz (1865-Breslau (Wrocław) – 1923-New York) – matematyk i elektryk amerykański.

4.5. Przepływ płynu

4.5.1. A

4.5.2. B

4.6. Zadania

- 4.1. Podać zasadniczą różnicę w modelach tarcia suchego i lepkiego. Jak ta różnica uwidacznia się w przebiegach przesunięcia?
- 4.2. Korzystając z programu `Przyklad_4_5a.m`, który został opisany w przykładzie 4.6, przeprowadzić:
 - a) analizę symulacyjną procesu ładowania nieobciążonej linii długiej; założyć, że rezystancja obciążenia $R_0 = 1E6\Omega$;
 - b) analizę przebiegu prądów i napięć w obwodzie przy zwartym końcu linii; założyć, że rezystancja obciążenia $R_0 = 1E-6\Omega$;
- 4.3. Korzystając z programu `Przyklad_4_5b.m`, który został opisany w przykładzie 4.7, rozszerzyć model impedancji źródła przez dodanie w szereg z opornikiem R_s (rys. 4.28), indukcyjności L_s . Opracować stosowny model i odpowiednio skorygować program komputerowy. Przyjąć następujące wartości dodanych elementów: $R_s = 0,1\Omega$, $L_s = 0,02H$. Uwaga: aby uniknąć dodawania kolejnego węzła w schemacie zastępczym modelu, można opracować dyskretny model gałęzi $R_s L_s$ w formie napięciowej (rys. 4.27c), szumować napięcia: źródła e_s oraz modelu impedancji $j(k-1)/G$ i tak utworzoną gałąź z opornikiem $1/G$ zastąpić schematem prądowym.
- 4.4. Rozbudować program `Przyklad_4_5a.m`, przez uzupełnienie obciążenia R_0 równolegle do niego włączonym kondensatorem C_0 . Dyskretny model gałęzi z równolegle połączonymi elementami $R_0 C_0$ opracować na podstawie wyprowadzonego modelu szeregowej gałęzi RL (4.55) -(4.59). Uwaga: prąd w rozpatrywanej gałęzi z elementami połączonymi równolegle jest sumą prądów płynących przez opornik i kondensator.

5. MODELOWANIE NIELINIOWYCH SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH

5.1. Wprowadzenie

Analiza systemów dynamicznych ma podstawowe znaczenie w technice. Ich modelowanie jest być może zasadniczym sposobem poznawania otaczającej nas rzeczywistości i wyciągania stąd stosownych wniosków, zarówno, co do zachodzących wokół procesów, jak i ich wykorzystania.

Dynamika systemów jest odtwarzana za pomocą modeli zależnych od czasu. W ogólnym przypadku, czas może być reprezentowany w postaci ciągłej lub dyskretniej. W zależności od tego, stosowne modele są formułowane w postaci równań różniczkowych (czas ciągły) lub równań różnicowych (czas dyskretny). Historia rozwoju obu tych gałęzi dynamiki jest różna, co jest głównie związane z dostępnością odpowiednich narzędzi analitycznych i obliczeniowych. Modele tworzone w oparciu o równania różniczkowe pojawiły się wraz ze sformułowaniem przez Newtona i Leibniza podstaw rachunku różniczkowego i całkowego, podczas, gdy szerokie zastosowanie modeli dynamicznych czasu dyskretnego stało się możliwe wraz z rozwojem techniki mikroprocesorowej.

W odniesieniu do systemów liniowych stosowane są dobrze poznane, uniwersalne narzędzia analityczne, które pozwalają badać ich stabilność oraz różnorodne charakterystyki w dziedzinie czasu i częstotliwości. W przeciwieństwie do tego, narzędzia badania systemów nieliniowych są często ograniczone do ściśle określonej grupy systemów. Ponadto, w ostatnim czasie znaczną uwagę zwraca się na dynamiczne systemy nieliniowe, których opis wykracza poza tradycyjnie stosowane podejście. Do ich zrozumienia często stosuje się różne techniki modelowania i symulacji. Krótkiemu przeglądowi tych właśnie zagadnień poświęcony jest niniejszy rozdział.

5.2. Systemy chaotyczne

Teoria chaosu pojawiła się jako gałąź teorii układów dynamicznych, a jej powstanie łączy się z nazwiskiem Poincarégo w związku z jego analizą równań dynamiki trzech ciał powiązanych grawitacyjnie [1]. Termin *chaos* oddaje tu generalną zasadę odno-

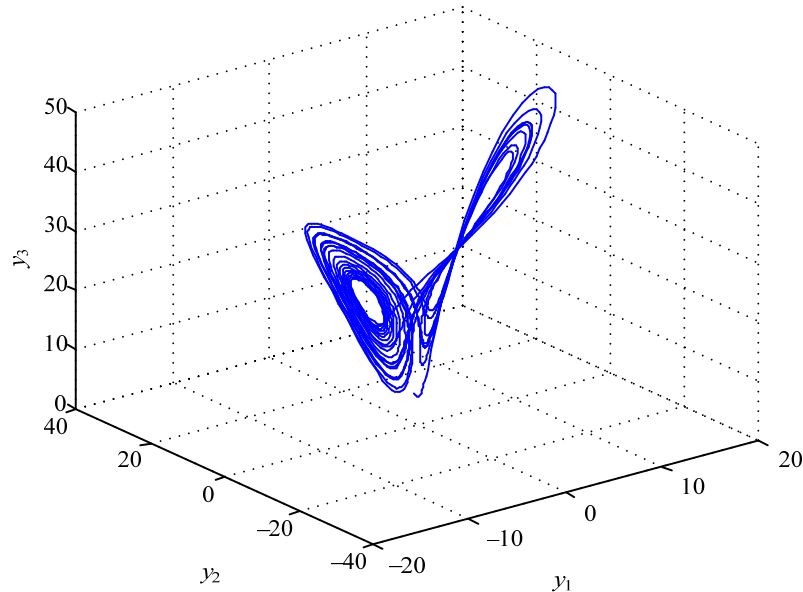
szącą się do systemów deterministycznych, mówiącą, że choć w takich systemach przyszłość można przewidzieć na podstawie stanu obecnego, to jednak w systemie chaotycznym aproksymacja stanu obecnego nie przybliży jego przyszłych stanów. Problem ten wyraziście pojawił się w latach 60-tych XX wieku w pracach Lorenza³⁵, przy okazji tworzenia modeli do przewidywania prognoz meteorologicznych.

5.2.1. Równania Lorenza

Równania Lorenza są zazwyczaj podawane w następującej postaci [1]:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= \alpha(y_2(t) - y_1(t)) \\ \dot{y}_2(t) &= \beta y_1(t) - y_2(t) - y_1(t)y_3(t) \\ \dot{y}_3(t) &= -\gamma y_3(t) + y_1(t)y_2(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Przy następujących parametrach: $\alpha = 10$, $\beta = 28$, $\gamma = 8/3$ oraz przy warunkach początkowych: $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 5$, uzyskuje się rozwiązanie, którego przebieg w układzie współrzędnych y_1, y_2, y_3 jest pokazany na rys. 5.1.



Rys. 5.1. Rozwiązanie równań Lorenza przy podanych warunkach początkowych

Rysunek 5.1 przedstawia wykres zmian y_3 względem y_1 , gdzie widać charakterystyczne obszary ‘przyciągania’ rozwiązania, znane, jako dziwny atraktor Lorenza.

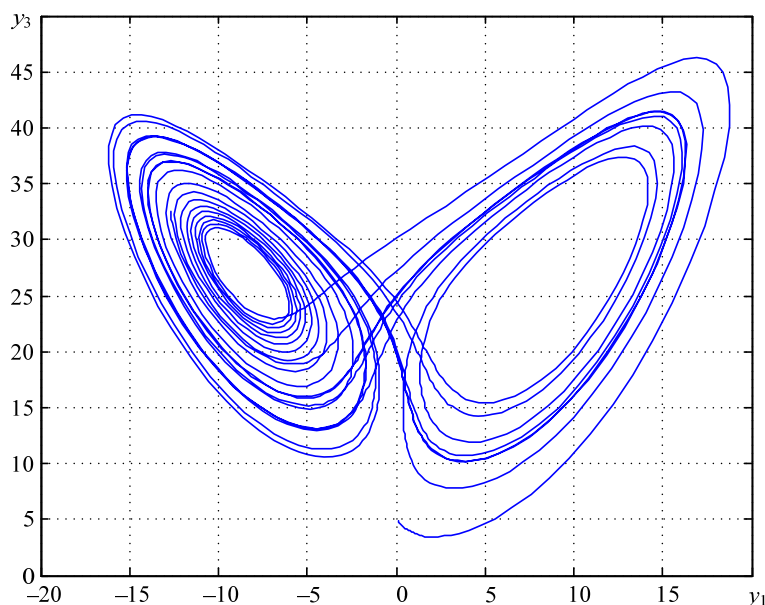
³⁵ Edward Norton Lorenz (1917 – 2008), matematyk i meteorolog amerykański.

Obszary te układają się w kształt skrzydeł motyla, co obrosło legendą na temat możliwości przewidywania pogody w postaci tzw. *efektu motyla*: ‘trzepot skrzydeł motyla w puszczy amazońskiej wywołuje tornado w Teksasie’.

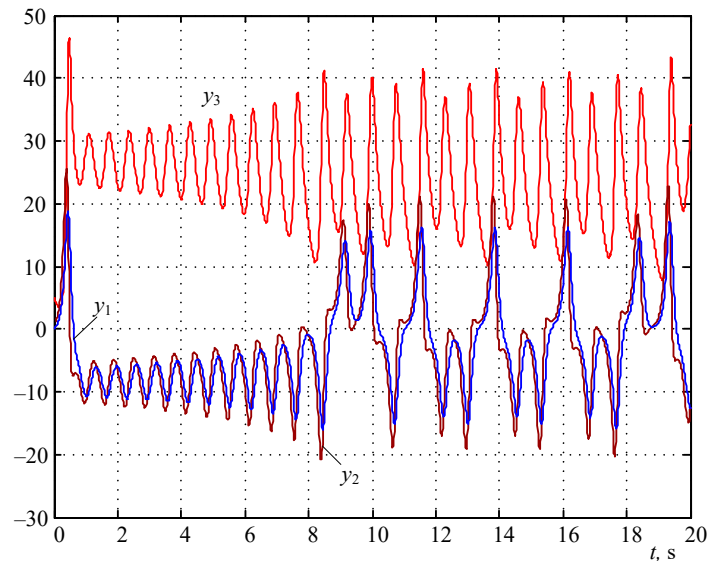
Bazą do tworzenia takich anegdot są nieoczekiwane właściwości matematycznych modeli systemów chaotycznych. Wbrew ich deterministycznej naturze, zachowują się w sposób nieprzewidywalny. Widać to dobrze na podstawie analizy przebiegów czasowych w rozpatrywanym przykładzie modelu Lorenza (rys. 5.3), gdzie nie sposób znaleźć powtarzających się, przewidywalnych wzorców.

Cechy układów chaotycznych:

- wrażliwość na warunki początkowe;
- mieszanie: trajektoria „przegląda” wszystkie obszary przestrzeni fazowej i w każdym przebywa przez czas proporcjonalny do jego objętości;
- sąsiednie trajektorie zarówno oddalają się od siebie, jak też powracają dowolnie blisko, nieskończenie wiele razy;
- występowanie atraktora, którym jest wyróżniony stan ruchu w przestrzeni fazowej, do którego zbieżną są pobliskie trajektorie; przy różnych warunkach początkowych, ewolucja dwóch identycznych systemów będzie rosła z czasem, jednak oba systemy pozostaną w strefie atraktora.



Rys. 5.2. Rozwiązanie równań Lorenza: atraktor $y_3 = f(y_1)$



Rys. 5.3. Rozwiązanie równań Lorenza (przebiegi czasowe) przy podanych warunkach początkowych

Dynamika układów chaotycznych charakteryzuje się niepowtarzalnością i nieregularnością drgań. Zjawiska takie mogą wystąpić w nawet niezbyt złożonych układach nieliniowych o jednym stopniu swobody przy zewnętrznym wymuszeniu (układy nie-autonomiczne) lub w układach autonomicznych reprezentowanych równaniami różniczkowymi trzeciego rzędu.

5.2.2. Nieliniowy model Duffinga

Wróćmy do rozważanego w p. 3.3 równania Duffinga w ogólnej postaci (3.24). Różne właściwości układów reprezentowanych za pomocą tego równania można uzyskać przez odpowiedni dobór jego współczynników. Obecność nieliniowego członu βx^3 całkowicie zmienia właściwości równania, gdyż teraz przedstawia ono układ nieliniowy.

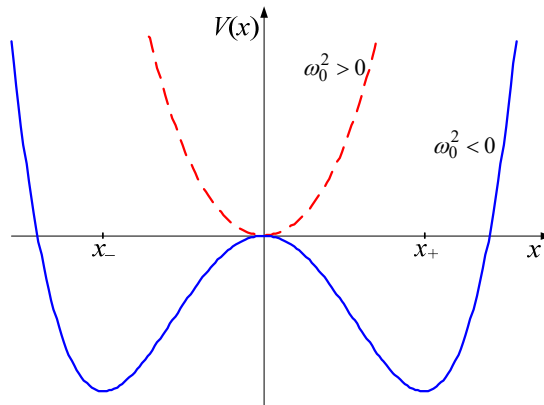
Na przykład, dla współczynnika sztywności $\beta > 0$ uzyskuje się model ‘sztywnej’ sprężyny, natomiast dla $\beta < 0$ otrzymujemy charakterystyki sprężyny ‘miękkiej’. W przypadku przyjęcia dodatniego znaku przy składniku $\omega_0^2 x$ w (3.24), uzyskuje się dwa punkty w przestrzeni stanów (x, \dot{x}) o minimalnej energii, co łatwo zauważyć, rozpatrując ustaloną (niezależną od czasu) wartość siły w (3.24):

$$F_0(x) = -\left(\pm \omega_0^2 x + \beta x^3\right), \quad (5.2)$$

skąd można wyznaczyć energię potencjalną (przy zerowych warunkach początkowych):

$$V(x) = -\int_0^x F_0(x) dx = \pm \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4} \quad (5.3)$$

Przebiegi energii potencjalnej dla obu wartości znaków stojących przy współczynniku $(\omega_0)^2$ jest pokazany na rys. 5.4. Minimalne wartości energii wyznaczają stabilne punkty rozwiązania. Widać, że dla $(\omega_0)^2 < 0$ występują dwa punkty stabilne oraz punkt niestabilny w początku układu. Zauważmy, że wniosek ten jest zbieżny z kryterium Lapunowa formułowanym w odniesieniu do systemów dynamicznych [41].



Rys. 5.4. Przebiegi energii potencjalnej w zależności od znaku współczynnika ω_0^2

Ma to potwierdzenie w przebiegu trajektorii na płaszczyźnie fazowej, co ilustruje kolejny przykład.

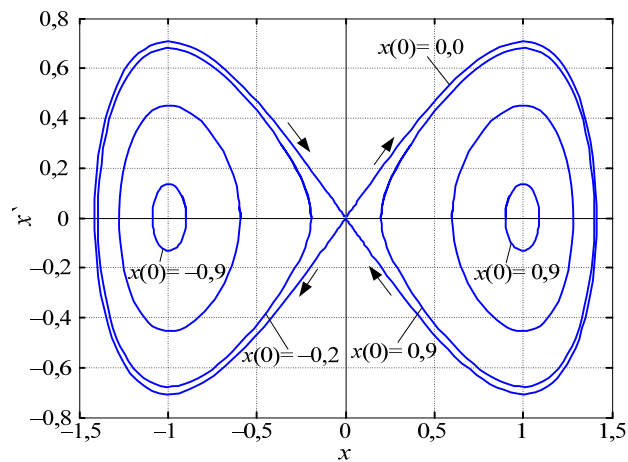
Przykład 5.1. Wyznaczyć przebiegi czasowe i trajektorię na płaszczyźnie fazowej dla równania Duffinga przy następujących parametrach: $F = 0,0$ (bez wymuszenia); $\delta = 0,0$ (bez tłumienia); $(\omega_0)^2 = -1,0$; przy warunkach początkowych: $x(0) = 0,0$; $\dot{x}(0) = 0,001$; wykonać kilka pomiarów dla różnych wartości $x(0)$.

Do analizy nieliniowego modelu Duffinga została opracowana w języku MATLAB procedura `duff_1` rozwiązywania równania (3.24) z zastosowaniem funkcji `ode45` (tekst programu znajduje się w Dodatku). Analizowane równanie jest przedstawione w formie zmiennych stanu (3.25).

Po wprowadzeniu zadanych parametrów i uruchomieniu symulacji, otrzymujemy trajektorie, jak na rys. 5.5. Rysunek przedstawia całą serię wyników symulacji, które zostały wykonane przy różnych warunkach początkowych (zmieniana była wartość $x(0)$) i następnie na siebie nałożone. Można zauważyć, że trajektorie przedstawiają regularne krzywe zamknięte, co jest wynikiem braku tłumienia oraz wymuszenia (układ autonomiczny). Strzałkami zaznaczono kierunki przemieszczania się punktów trajektorii.

Widać także rezultat założenia: $(\omega_0)^2 = -1,0$, co prowadzi do wystąpienia dwóch punktów, określających minima energii potencjalnej rozważanego układu (rys. 5.4). Łatwo także zauważyć, że początek układu współrzędnych fazowych jest punktem niestabilnym, na co wskazują kierunki trajektorii w tym punkcie (siodło). Pokazanim trajektoriom odpowiadają także regularne przebiegi obu współrzędnych w czasie: $x(t)$, $x'(t)$, co nie jest tutaj pokazane.

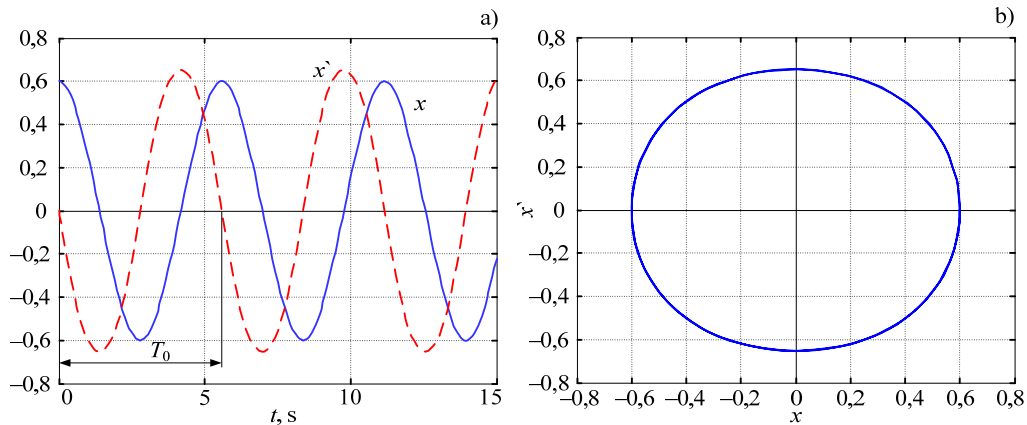
W odniesieniu do procedury obliczeniowej nałożone są dosyć duże wymagania co do dokładności, gdyż w przeciwnym przypadku trajektorie tworzone w kolejnych cyklach nie będą się pokrywały. Kwestię tę regulują parametry 'RelTol' oraz 'AbsTol', którym należy nadać odpowiednie wartości.



Rys. 5.5. Trajektorie fazowe równania Duffinga dla różnych wartości początkowych

W przypadku przyjęcia dodatniej wartości kwadratu pulsacji własnej: $(\omega_0)^2 = 1,0$, funkcja energii potencjalnej $V(t)$ ma jedno minimum (rys. 5.4), co zmienia obraz trajektorii fazowej systemu oraz samych przebiegów czasowych. Wyniki symulacji równania Duffinga dla przyjętych powyżej parametrów, po zmianie znaku współczynnika $(\omega_0)^2$, są pokazane na rys. 5.6. Przyjęto wartość początkową: $x(0) = 0,6$.

Można zauważyć, że w tym przypadku otrzymuje się bardzo regularne odpowiedzi w dziedzinie czasu oraz na płaszczyźnie fazowej. Parametr ω_0 ma bezpośrednią interpretację fizyczną: jest to pulsacja własna układu, skąd: $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

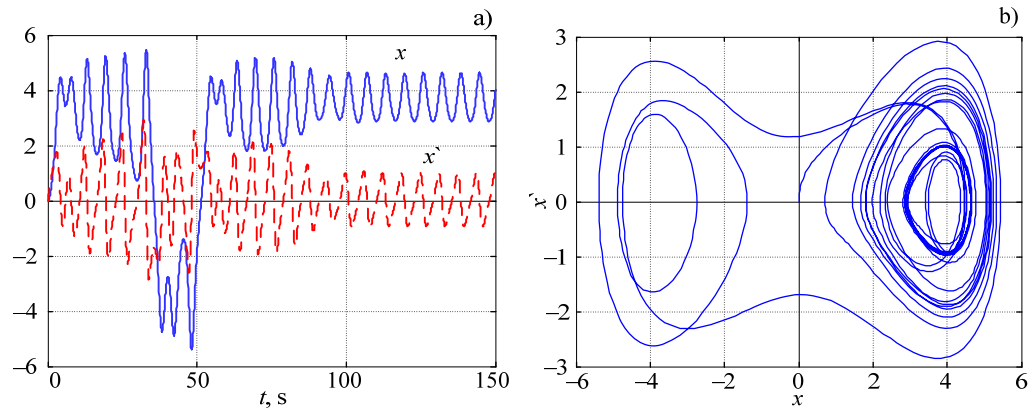
Rys. 5.6. Trajektorie fazowe równania Duffinga dla $(\omega_0)^2 = 1,0$

Przy rozważaniu pobudzanego nieliniowego układu Duffinga korzystamy z równania (3.24) z wymuszeniem. W przypadku układu z dodatnią wartością parametru $(\omega_0)^2$, otrzymujemy odpowiedź, jak w przykładzie 5.6. Następny przykład ilustruje zachowanie się rozwiązania dla przypadku $(\omega_0)^2 < 0$ z wymuszeniem.

Przykład 5.2. Wyznaczyć przebiegi czasowe i trajektorię na płaszczyźnie fazowej dla równania Duffinga przy następujących parametrach: $F = 0,8$; $\delta = 0,2$; $\beta = 0,07$; $(\omega_0)^2 = -1,0$; $\omega = 1,0$. Przyjąć następujące warunki początkowe: $x(0) = 0,0$; $x'(0) = 0,001$. Wykonać pomiary dla różnych wartości F .

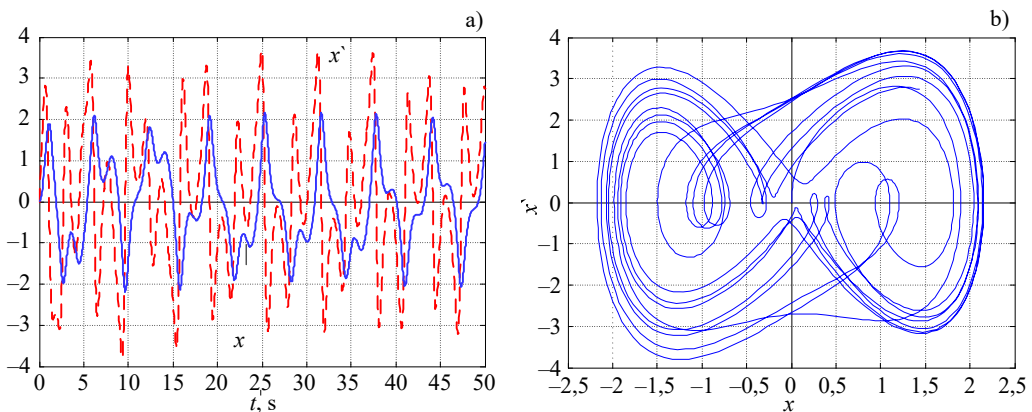
Stosując procedurę `duff_1`, wykonano obliczenia symulacyjne modelu Duffinga dla założonych parametrów. Wyniki symulacji w formie przebiegów czasowych obu zmiennych stanu oraz trajektorii na płaszczyźnie fazowej, są pokazane na rys. 5.7.

Można zauważyć, że po zaniku początkowego stanu przejściowego, przebiegi przyjmują formę oscylacji wokół jednego z punktów odpowiadających minimalnej energii potencjalnej układu (w tym przypadku jest to punkt leżący na dodatniej części płaszczyzny wyznaczonej przez zmienną x). Częstotliwość obserwowanych oscylacji ustalonych jest związana z częstotliwością sygnału wymuszającego.



Rys. 5.7. Odpowiedź czasowa (a) i trajektorie fazowe równania Duffinga (b) dla $(\omega_0)^2 = -1,0$

Kolejna symulacja została wykonana dla następujących parametrów: $F = 5,5$; $\delta = 0,5$; $\beta = 2,5$; $(\omega_0)^2 = -1,0$; $\omega = 1,0$ przy takich samych, jak powyżej warunkach początkowych. Wyniki symulacji są pokazane na rys. 5.8. W tym przypadku nie jest obserwowany stan ustalony przebiegów, co jest charakterystyczne dla zachowań chaotycznych. Obszary ‘przyciągania’ rozwiązania na portrecie fazowym są zbliżone do obu punktów minimalnej energii potencjalnej układu. W każdym cyklu rozwiązania, jego trajektoria przemierza obszar pomiędzy obu charakterystycznymi atraktorami, kształty zakreślanych śladów nie powtarzają się.

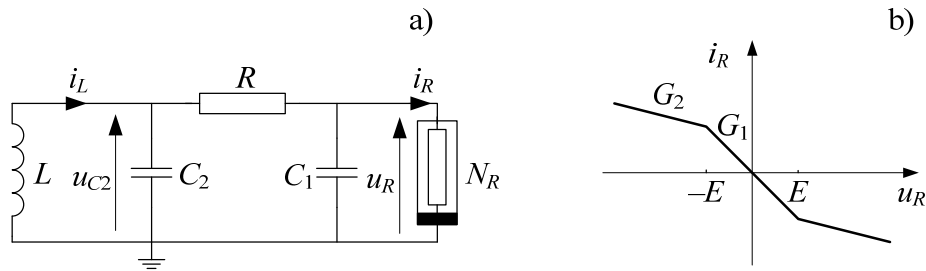


Rys. 5.8. Chaotyczne rozwiązanie równania Duffinga

Uzyskane chaotyczne rozwiązania równań Duffinga nie mają bezpośredniej interpretacji w odniesieniu do pierwowzoru mechanicznego. Zauważmy, że dobrze znany model nieliniowego mechanicznego układu drgającego stał się użyteczny w innych dziedzinach i przyczynił się do wzrostu zainteresowania takimi zagadnieniami w matematyce [1, 5].

5.2.3. Obwód Chua

Różne pomysły prowadzące do zastosowania efektów chaotycznych w nauce i technice spowodowały zainteresowanie fizyczną realizacją układów chaotycznych. Jednym z przykładów takich układów jest elektryczny obwód zaproponowany przez L. Chua³⁶. W oryginalnej formie ma on postać schematu, jak na rys. 5.9 [8], gdzie dioda Chua N_R jest układem elektronicznym o charakterystyce, jak na rys. 5.9b).



Rys. 5.9. Obwód Chua: schemat zastępczy a) oraz charakterystyka diody Chua b)

Charakterystyka diody Chua może być opisana następującą funkcją:

$$i_R = g(u_R) = \begin{cases} G_1 u_R & \text{dla } |u_R| < E \\ G_2 u_R + (G_2 - G_1)E & \text{dla } u_R \leq -E \\ G_2 u_R - (G_2 - G_1)E & \text{dla } u_R \geq E \end{cases} \quad (5.4)$$

Równania stanu rozpatrywanego schematu są związane z trzema elementami gromadzącymi energię: L , C_1 oraz C_2 i mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \dot{u}_R &= \frac{1}{RC_1}(u_{C2} - u_R) - \frac{1}{C_1}g(u_R) \\ \dot{u}_{C2} &= \frac{1}{C_2}i_L - \frac{1}{RC_2}(u_{C2} - u_R) \\ \dot{i}_L &= -\frac{1}{L}u_{C2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

przy warunkach początkowych: $u_R(0)$, $u_{C2}(0)$, $i_L(0)$.

Rozwiązanie tych równań dla następujących parametrów:

$$R = 1,0/0,7 \, \Omega,$$

³⁶ Leon O. Chua, profesor elektrotechniki i informatyki na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley, pionier w zakresie sieci neuronowych, układów chaotycznych i systemów nieliniowych, <http://www.eecs.berkeley.edu/~chua/>.

$$L = 1,0/7,0 \text{ H},$$

$$C_1 = 0,1 \text{ F},$$

$$C_2 = 2,0 \text{ F},$$

$$G_1 = -4,0 \text{ S},$$

$$G_2 = -0,1 \text{ S},$$

$$E = 1,0 \text{ V}$$

oraz przy warunkach początkowych:

$$u_R(0) = -4,0 \text{ V}, u_{C2}(0) = 4,0 \text{ V}, i_L(0) = 0,$$

proceedzi do charakterystycznej trajektorii, jak na rys. 5.10. Przebiegi uzyskanych zmiennych stanu są pokazane na rys. 5.11. Widać występowanie nieregularnych, chaotycznych przebiegów.

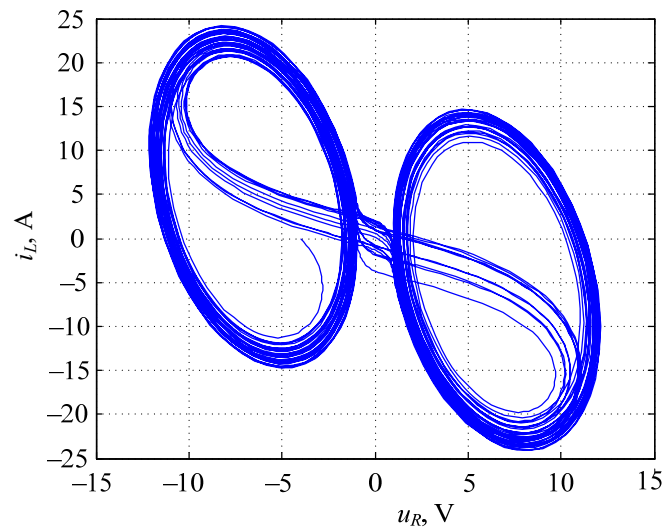
W celu odtworzenia funkcji diody Chua proponowane są różne elektroniczne układy. Jeden z nich jest pokazany na rys. 5.12. W literaturze można znaleźć różne zbiory parametrów tego obwodu, na przykład [24]:

$$R = 1,33 \text{ k}\Omega, \quad R_1 = 46,2 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega,$$

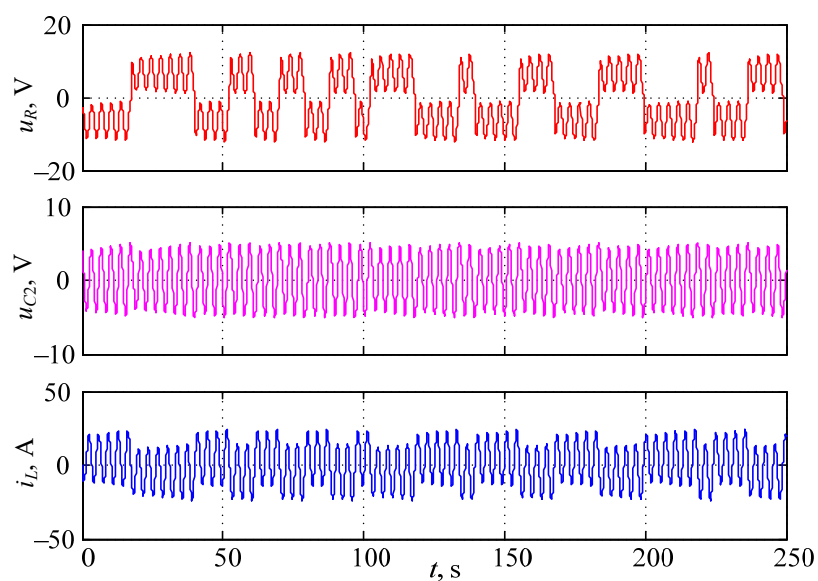
$$L = 8,2 \text{ mH}, \quad R_3 = 3,3 \text{ k}\Omega, \quad R_4 = 46,2 \text{ k}\Omega,$$

$$C_1 = 5,5 \text{ nF}, \quad R_5 = 1,25 \text{ k}\Omega, \quad R_6 = 300,0 \Omega,$$

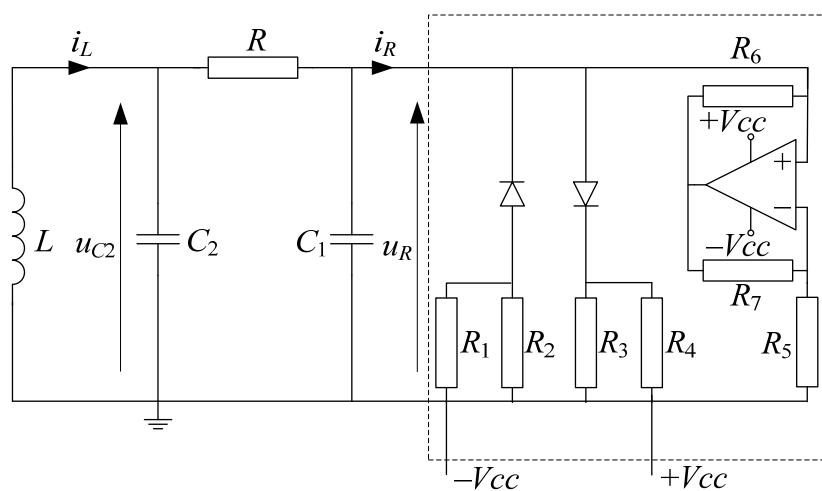
$$C_2 = 50,0 \text{ nF}, \quad R_7 = 300,0 \Omega.$$



Rys. 5.10. Przebieg trajektorii $i_L(u_R)$



Rys. 5.11. Przebiegi zmiennych stanu w układzie Chua



Rys. 5.12. Schemat układu Chua

W literaturze można znaleźć praktyczne wskazówki na temat właściwości oraz fizycznej realizacji obwodu Chua [8, 24, 38, 59, 60].

5.3. Modelowanie nieliniowych układów dyskretnych

Rozpatrywane powyżej deterministyczne ciągłe systemy dynamiczne są opisywane za pomocą równań różniczkowych. Zapis tych równań w postaci dyskretniej prowadzi do dynamicznych systemów dyskretnych. Odpowiednie równania otrzymuje się przez ich dyskretną aproksymację:

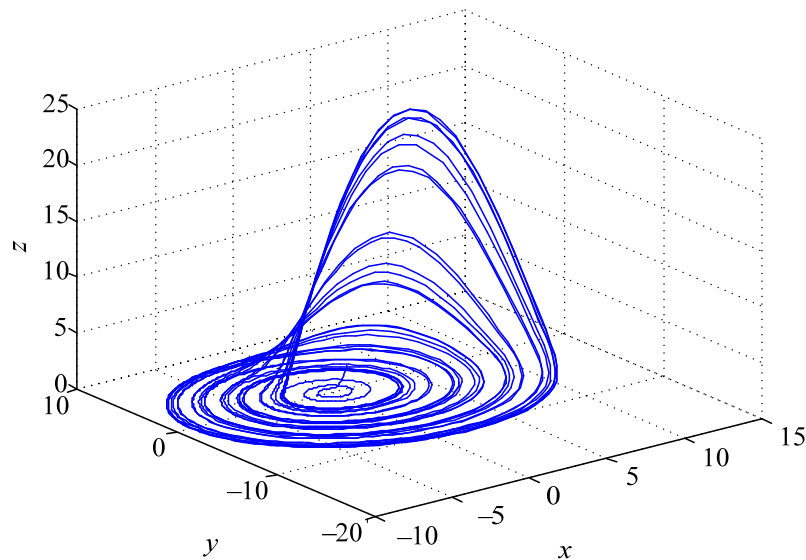
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_k - x_{k-1}}{t - (t-1)} = x_k - x_{k-1} \quad (5.6)$$

Zachowanie się systemów dyskretnych może być zupełnie odmienne od ich ciągłych oryginałów.

W charakterze przykładu rozpatrzmy system Rösslera³⁷ opisany następującym układem równań różniczkowych [46]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xz - cz \end{aligned} \quad (5.7)$$

przy następujących parametrach: $a = b = 0,2$; $c = 5,7$. Przebieg trajektorii $z = g(x,y)$ jest pokazany na rys. 5.13.



Rys. 5.13. Trajektoria $z = g(x,y)$ ciągłego systemu Rösslera

³⁷ Otto Rössler (1940 -), biochemik niemiecki.

Dyskretna postać równań (5.7) może być zapisana w następującej formie:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} - h(y_{k-1} + z_{k-1}) \\ y_k &= y_{k-1} + h(x_k + ay_{k-1}) \\ z_k &= z_{k-1} + h(b + ax_k z_{k-1} - cz_{k-1}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

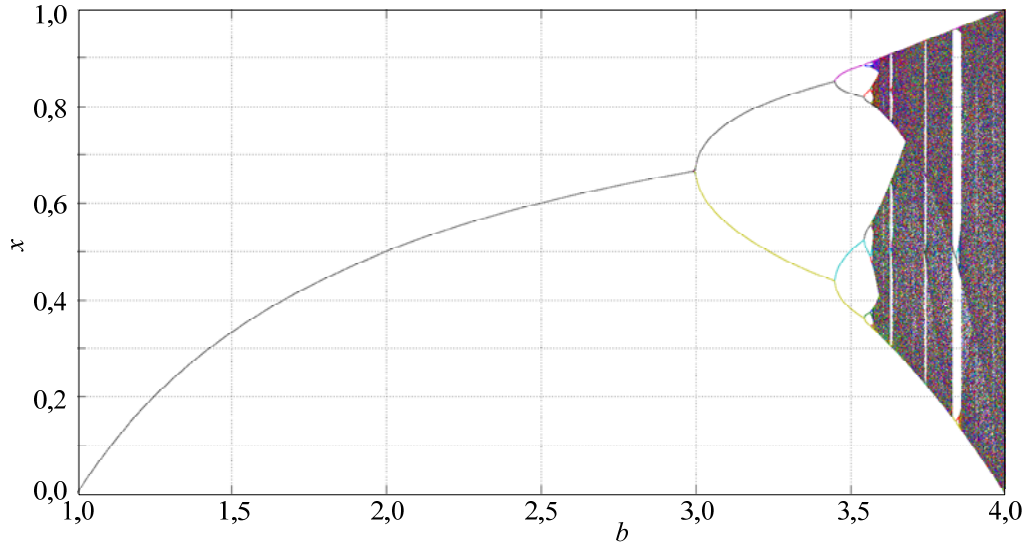
Równania (5.8) z parametrami, jak w (5.7) oraz $h = 0,17$, mają także podobne właściwości. W ogólnym przypadku, równania dyskretnych modeli typu (5.8) mają następującą postać:

$$x_k = x_{k-1} + bx_{k-1}(1 - x_{k-1}) \quad (5.9)$$

co przy odpowiedniej zmianie parametru b może być zapisane następująco:

$$x_k = bx_{k-1}(1 - x_{k-1}) \quad (5.10)$$

Zależność (5.10) jest nazywana równaniem logistycznym (w nawiązaniu do występującego w tym równaniu przesunięcia, ‘transportu’). Dyskretnie systemy logistyczne charakteryzują się występowaniem punktów bifurkacji³⁸, które związane są z gwałtownym rozdzieleniem procesu, przy niewielkiej zmianie parametru b . Tego typu charakterystyki są przedstawiane na płaszczyźnie (b, x) . Rozdzielone (rozchodzące się) procesy charakteryzują się wyraźną różnicą amplitudy obu bliźniaczych zjawisk (rys. 5.14). Proces generacji diagramu bifurkacji jest pokazany na rys. 5.15.



Rys. 5.14. Diagram bifurkacji

³⁸ łac. *bifurcare* – rozdwajać, rozwidlać.

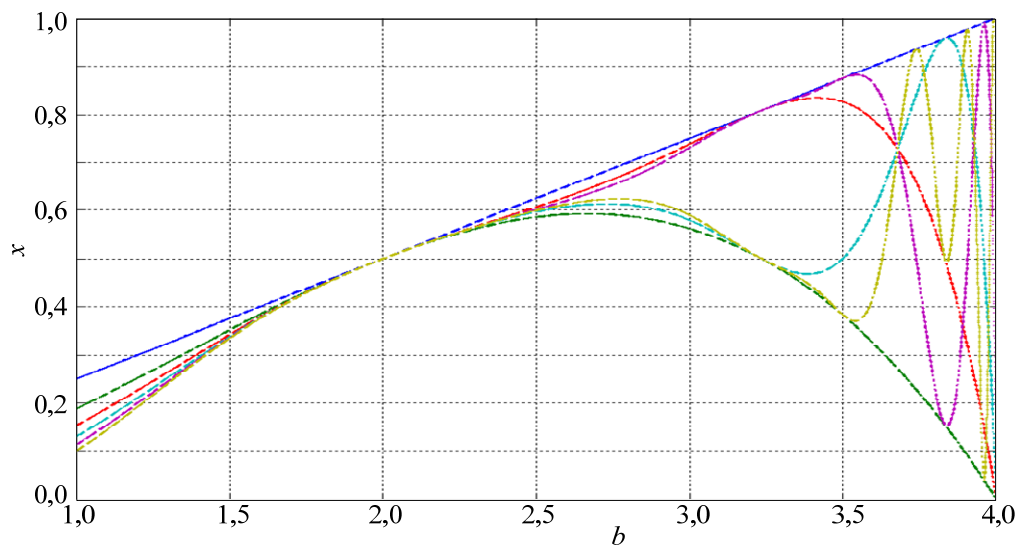
Na rys. 5.15 można wyróżnić poszczególne przebiegi generowane zgodnie z zależnością (5.10), z uwzględnieniem stanu przejściowego, który jest pominięty na rys. 5.14. Równanie logistyczne (5.10) ma sens, gdy odtwarzane wartości x_k pozostają w przedziale $[0, 1]$, co ma miejsce dla $0 < b \leq 1$.

Cechą charakterystyczną zjawiska bifurkacji jest w tym przypadku podwojenie częstotliwości przebiegów generowanych zgodnie z zależnością (5.10) po osiągnięciu przez parametr b odpowiednich wartości: $b = 3,0, 3,4494897, 3,5440903, \dots$ W rezultacie kolejnych zdwojeń okresu oscylacji, częstotliwość generowanych drgań wzrasta w kolejnym n -tym punkcie bifurkacji do wartości 2^n , $n = 0, 1, 2, \dots$ Towarzyszące tym punktom wartości parametru $b = b_n$ stosują się do prawa Feigenbauma [46]:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1} - b_n}{b_n - b_{n+1}} = 4,6692016091... \quad (5.11)$$

Prawu temu podlegają różne zjawiska bifurkacji. Efekt ten można także obserwować w układach wielowymiarowych opisanych równaniami różniczkowymi (patrz zadanie 5.3. na końcu rozdziału).

Model logistyczny (5.10) jest stosowany do opisu wielu praktycznych zależności, w szczególności w biologii, w demografii, czy też w ekonometrii (modele wzrostu).



Rys. 5.15. Ilustracja generacji diagramu bifurkacji

5.4. Identyfikacja systemów chaotycznych

Chaos, ze swej natury, trudno poddaje się ogólnemu opisowi i uporządkowanej klasyfikacji. Wynika stąd wiele szczegółowych sposobów identyfikacji chaotycznych zachowań badanych układów dynamicznych. Potrzebny jest jednak jakiś analityczny wskaźnik, na podstawie którego można odróżnić nawet bardzo nieregularne, acz niechaotyczne zachowanie się systemu od procesów chaotycznych. Podstawowa miara takich zachowań jest tworzona na bazie teorii stabilności Lapunowa, a ich ocenę rozważa się w przestrzeni fazowej opisującej badany system [48]. Można uznać, że układ jest chaotyczny, jeśli sąsiednie, początkowo bliskie trajektorie, oddalają się od siebie wykładniczo. Jeśli początkową odległość rozważanych trajektorii oznaczyć przez Δx_0 , to z czasem ta odległość zmienia się (wzrasta lub maleje) zgodnie z następującą zależnością:

$$|\Delta x(t)| \approx e^{\lambda t} \Delta x_0 \quad (5.12)$$

gdzie λ jest wykładnikiem (współczynnikiem) Lapunowa.

Warunkiem chaotyczności systemu jest dodatnia wartość wykładnika λ .

Zauważmy, że relacja (5.12) ma bliskie powiązania z zależnością (5.21), określającą odpowiedź układu zlinearyzowanego w pobliżu punktu równowagi. Tym razem interesuje nas proces oddalania się (lub zbliżania) trajektorii fazowych badanego układu. Ponieważ wartość wykładnika λ zależy od kierunku trajektorii oraz od wybranej wartości początkowej, więc należy mówić o spektrum współczynników Lapunowa dla danego systemu, a jego wymiar jest równy liczbie współrzędnych fazowych (liczba równań systemu w postaci układu równań pierwszego rzędu – równań stanu). Zatem, dla n -wymiarowego autonomicznego systemu, spektrum wykładników Lapunowa jest określone przez zbiór: $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$. Zbiór ten można uporządkować według kolejnych wartości [39]:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (5.13)$$

Maksymalna liczbowa wartość współczynnika z tego spektrum: $\lambda_1 = \lambda_{Max}$ charakteryzuje maksymalną szybkość separacji trajektorii systemu (ang. *Maximal Lyapunov exponent* - *MLE*). Dodatnia wartość współczynnika λ_{Max} jest zazwyczaj przyjmowana, jako miara chaotyczności systemu (niekiedy także inne warunki powinny być spełnione [30]). Zakładamy więc, że warunek wystąpienia chaotycznego stanu systemu (chaos deterministyczny) jest określony następująco:

$$\lambda_1 = \lambda_{Max} > 0 \quad (5.14)$$

Ważną miarą chaotyczności systemu jest także liczba wykładników Lapunowa, które mają wartości dodatnie. Jeśli warunek ten jest spełniony dla więcej niż jednego wykładnika w spektrum (5.13), to mówimy o systemie hiperchaotycznym (hiperchaos deterministyczny). Przypadek taki może wystąpić w systemie o liczbie wymiarów $n \geq 4$.

Zauważmy, że wykładniki Lapunowa mają bezpośrednie odniesienie do stabilności systemu. Wystąpienie chaosu jest objawem lokalnej niestabilności systemu, przy czym, system może być w dalszym ciągu stabilny globalnie. W takim przypadku, w trajektorii ruchu systemu obserwuje się naprzemienne zachowania związane z obrazem przebiegów stabilnych oraz chaotycznych. Układ jest stabilny globalnie, jeśli suma jego maksymalnych wykładników Lapunowa ma wartość ujemną [39]:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0 \quad (5.15)$$

Obliczanie wykładników Lapunowa wymaga zaangażowania zaawansowanych metod numerycznych. Prześledzimy podstawowy tok postępowania, prowadzący do określenia spektrum współczynników Lapunowa. Rozważmy pojedynczą trajektorię systemu, związaną z funkcją $f(x(t))$, na której wybieramy dwa punkty, odległe o wartość Δx_0 , przy czym w procedurze numerycznej ciągły czas w (5.12) zastępujemy numerem m kolejnej ewolucji (iteracji) wzdłuż rozważanej trajektorii:

$$\Delta x_m = \left| f^m(x_0 + \Delta x_0) - f^m(x_0) \right| \quad (5.16)$$

Zgodnie z (5.12), wykładnik zawierający współczynnik Lapunowa może być obliczany zgodnie z relacją:

$$\lambda m \approx \ln \frac{\Delta x_m}{\Delta x_0} \approx \ln \left| \frac{f^m(x_0 + \Delta x_0) - f^m(x_0)}{\Delta x_0} \right| \quad (5.17)$$

Zauważmy, że ze wzrostem liczby iteracji m , wyrażenie pod znakiem logarytmu z prawej strony (5.17) zbliża się do wartości pochodnej funkcji, skąd już łatwo uzyskać praktyczną formułę:

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left| f'(x_j) \right|, \quad (5.18)$$

gdzie kolejne wartości logarytmów są uśredniane z m iteracji.

W przypadku systemów wielowymiarowych, zdefiniowanych za pomocą funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, pochodna funkcji jest określona za pomocą jakobianu (5.19):

$$\mathbf{J}^m(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}^m(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad (5.19)$$

Na podstawie określonych w ten sposób pochodnych układu wielowymiarowego, określana jest macierz kwadratowa:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\mathbf{J}^m(\mathbf{x}_0) \left[\mathbf{J}^m(\mathbf{x}_0) \right]^T \right]^{\frac{m}{2}}, \quad (5.20)$$

której wartości własne Λ służą do obliczenia wykładników Lapunowa³⁹:

$$\lambda_i(x_0) = \ln(\Lambda_i(\mathbf{x}_0)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.21)$$

Pomysł leżący o podstaw nowoczesnych numerycznych metod obliczania wykładników Lapunowa polega na zastosowaniu do bazowego równania systemu (5.18) podejścia wariacyjnego, w którym analizuje się konsekwencje niewielkiego zaburzenia trajektorii systemu $\mathbf{D}(\mathbf{x}_0)$ w danym punkcie początkowym \mathbf{x}_0 , gdzie macierz zawiera odchylenia $\delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ w kierunku poszczególnych współrzędnych systemu. Na przykład, dla systemu trzech zmiennych ($n = 3$) możemy napisać następujące równanie macierzowe:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (5.22)$$

które przyjmuje następującą formę szczegółową:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Na bazie (5.23) możemy utworzyć następujące równanie wariacyjne [37]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_{xx} & \dot{\delta}_{yx} & \dot{\delta}_{zx} \\ \dot{\delta}_{xy} & \dot{\delta}_{yy} & \dot{\delta}_{zy} \\ \dot{\delta}_{xz} & \dot{\delta}_{yz} & \dot{\delta}_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \begin{bmatrix} \delta_{xx} & \delta_{yx} & \delta_{zx} \\ \delta_{xy} & \delta_{yy} & \delta_{zy} \\ \delta_{xz} & \delta_{yz} & \delta_{zz} \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

które przybiera następującą formę macierzową:

$$\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) \mathbf{D}(\mathbf{x}_0, t_0), \quad (5.25)$$

³⁹ Оселедец В И., Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем, Труды. ММО, 1968, том 19, 179–210. Dostępny w: <http://www.mathnet.ru/links/2ada9c4b8ef98909aa41a258664bfb23/mmo214.pdf>

gdzie: $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}^T$.

Równanie (5.22) jest zazwyczaj analizowane w odniesieniu do systemu zlinearyzowanego w otoczeniu punktu początkowego \mathbf{x}_0 :

$$\dot{\Psi}_t(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) \Psi_t(\mathbf{x}_0, t_0), \quad (5.26)$$

gdzie $\Psi_t(\mathbf{x}_0, t_0) = e^{\mathbf{J}(\mathbf{x})t}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, jest macierzą przejścia, która opisuje trajektorię zlinearyzowanego systemu w pobliżu punktu \mathbf{x}_0 .

W proponowanej metodzie, macierz przejścia $\Psi_t(\mathbf{x}_0, t_0)$ odwzorowuje macierz odchyłek $\mathbf{D}(\mathbf{x}_0, t_0)$ w (5.25) i taką też ma funkcję w procedurach obliczeniowych [37]. Równanie (5.26) odwzorowuje dynamikę tych odchyłek w kolejnych punktach początkowych wzdłuż trajektorii systemu.

Indeks t przy macierzy przejścia w (5.26) wskazuje na ewolucyjny w czasie charakter ruchu systemu. W procedurach poszukiwania wartości własnych jacobianu $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ zakłada się jednostkową początkową wartość macierzy przejścia: $\Psi_t(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{1}$. Obliczenia są prowadzone dla kolejnych wartości czasu t zgodnie z założonym krokiem, przy czym, dla kolejnych kroków wyłaniają się nowe wartości początkowe wektora \mathbf{x}_0 . Oba równania różniczkowe: oryginalne (5.23) oraz wariacyjne (5.26) są całkowane jednocześnie, tworząc kompleksowy układ równań⁴⁰:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\Psi}_t(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}) \Psi_t(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}, \quad (5.27)$$

z wartościami początkowymi: $\begin{Bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \Psi(\mathbf{x}(0), t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix}$.

Bardziej szczegółowy opis procedury z uwzględnieniem systemów nieautonomicznych (z parametrami zależnymi od czasu), można znaleźć w pracy [30], gdzie są także dostępne teksty programów MATLAB do obliczania wykładników Lapunowa w przykładowych systemach.

Powyższa procedura ma zastosowanie do systemów autonomicznych (stacjonarnych), gdy liczba wykładników Lapunowa jest równa liczbie n równań systemu. W systemie nieautonomicznym, liczba zmiennych procesu – a zatem także liczba wykładników Lapunowa, jest większa o jeden i wynosi: $n + 1$. W takim przypadku moż-

⁴⁰ KUZNETSOV N., LEONOV G., *Lyapunov exponent, chaos, Perron effect: time-varying linearization, stability and instability by the first approximation*. Dostępne w: <http://www.math.spbu.ru/user/nk/PDF/Lyapunov-exponent-Sign-inversion-Perron-effects-Chaos.pdf>

na zachować przedstawioną powyżej procedurę, dodając równanie różniczkowe odnoszące się do czasu lub jakiegś jego funkcji. Na przykład, może to być trywialne równanie różniczkowe o postaci: $\dot{t} = 1$. W ten sposób, w odnoszącym się do tego równania wierszu jakobianu pojawią się same zera, natomiast odpowiadający mu wykładnik Lapunowa przyjmie także wartość zerową.

Na bazie powyższego algorytmu powstało wiele praktycznych procedur obliczania spektrum współczynników Lapunowa w nieliniowych systemów dynamicznych. Ich zastosowanie można podzielić na dwie kategorie, w zależności od tego, co jest wyjściową informacją do obliczeń: - w odniesieniu do systemów opisanych równaniami stanu oraz - w odniesieniu do ciągów czasowych zawierających zarejestrowane przebiegi ruchu takich systemów. Zastosowanie jednego z takich popularnych programów do obliczania spektrum wykładników Lapunowa systemu opisanego równaniami różniczkowymi jest przedstawione w kolejnym przykładzie.

Przykład 5.3. Wyznaczyć wykładniki Lapunowa dla ciągłych równań Rösslera (5.7), przy następujących parametrach: $a = 0,15$; $b = 0,20$; $c = 10,0$.

Zastosujemy program opracowany w systemie MATLAB przez Vasiliya Govorukhina⁴¹. Oryginalnie program zawiera przykład odnoszący się do systemu Lorenza. Tekst programu przystosowanego do rozwiązania podanego zadania z systemem Rösslera znajduje się w Dodatku.

W celu uruchomienia obliczeń należy przygotować dwa krótkie pliki definiujące zadanie: `rossler_ext.m` oraz skrypt `run_ross.m`, skąd jest wywoływana główna procedura `lyapunov`, mieszcząca się w pliku `lyapunov.m`. Ten ostatni jest tu przytoczony w oryginalnej postaci. W pliku `rossler_ext.m` znajduje się deklaracja samego systemu:

```
% rownania Rosslera:
f(1)=-y - z;
f(2)=x + a*y;
f(3)=b + z*(x - c);
oraz jakobianu:
% Jakobian systemu:
J=[0 -1 -1;
  1 a 0;
  z 0 x-c];
```

Parametry równań są określone na początku tego pliku:

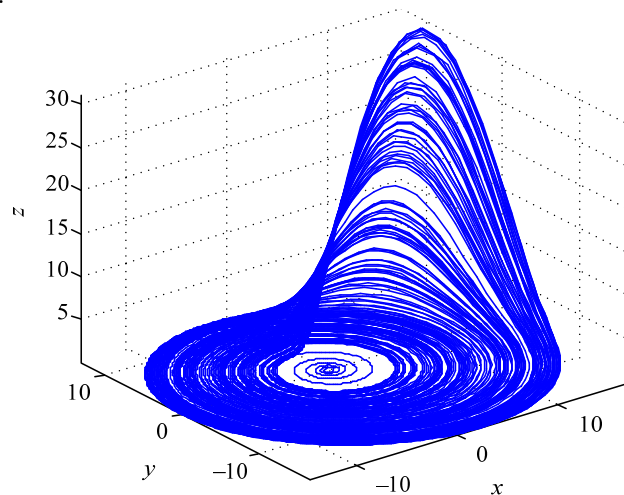
```
a = 0.15; b = 0.20; c = 10.0; % system chaotyczny
```

Ewolucje systemu w kolejnych iteracjach obliczeniowych są przechowywane w postaci 12-elementowego wektora f , którego trzy pierwsze pozycje ($f(1:3)$) zawierają wartości analizowanych funkcji Rösslera w kolejnych punktach ewolucji obliczeń, a kolejne 9 pozycji ($f(3:12)$) zawiera macierz Y (w tym przypadku 3×3), która przechowuje wyniki kolejnego etapu wariacyjnego (odwzorowuje ona macierz przejścia Ψ w (5.26)). Trajektoria $z = g(x,y)$ dla pierwszych 1000s przy warunkach początkowych: $x(0) = 0,2$; $y(0) = 0,3$; $z(0) = 0,5$ jest poka-

⁴¹ Vasiliy Govorukhin - program jest dostępny w Internecie:

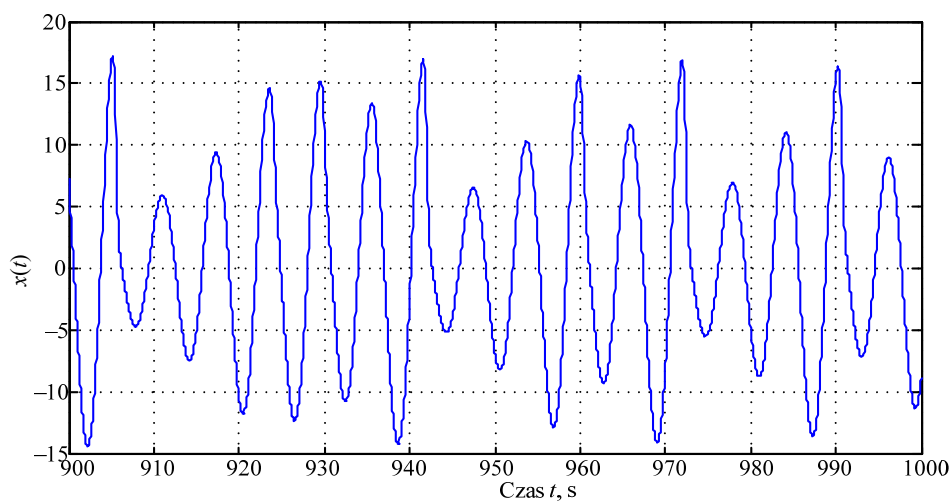
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4628-calculation-lyapunov-exponents-for-ode/content/lyapunov.m>

zana na rys. 5.16. Widać charakterystyczny dla chaotycznego zachowania się systemu, przebieg tej trajektorii.



Rys. 5.16. Trajektoria $z = g(x,y)$ badanego systemu Rösslera

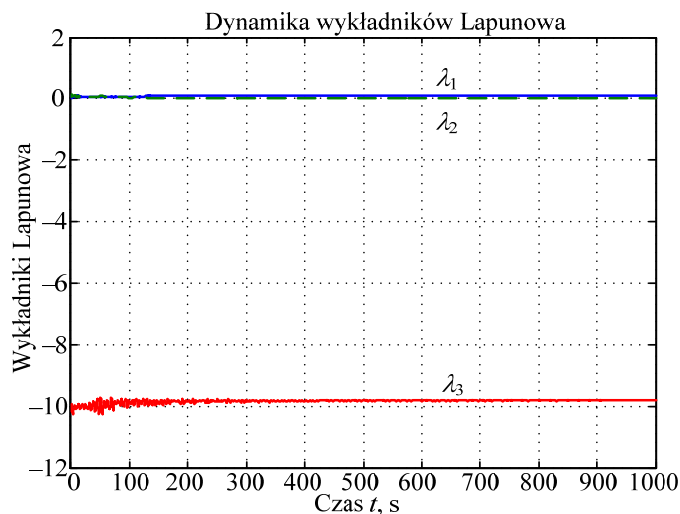
Potwierdzają to także przebiegi ślędzonych zmiennych w czasie. Na rys. 5.17 jest pokazany przebieg zmiennej $x(t)$ w ostatnich 100 sekundach badanego przedziału czasowego.



Rys. 5.17. Przebieg zmiennej $x(t)$ chaotycznego systemu Rösslera

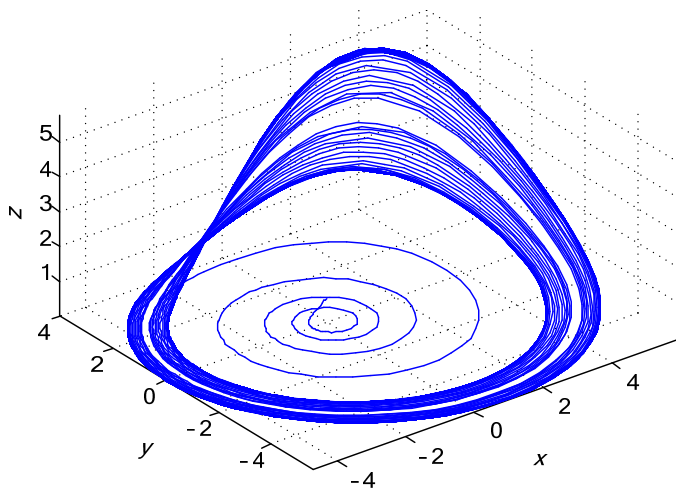
Mamy tu do czynienia ze zmiennym w czasie przebiegiem, chociaż w poszczęólnych okresach czasu oscylacje się nie powtarzają. Chaotyczny charakter procesu jest także potwierdzony przez wartości obliczonych wykładników Lapunowa. Ich zmiana w czasie jest pokazana na rys.

5.18. Na końcu rozpatrywanego przedziału, współczynniki te przyjmują następujące wartości: $\lambda_1 = 0,09$; $\lambda_2 = 0,0$; $\lambda_3 = -9,81$. Widać, że jest spełniony warunek wystąpienia chaosu.



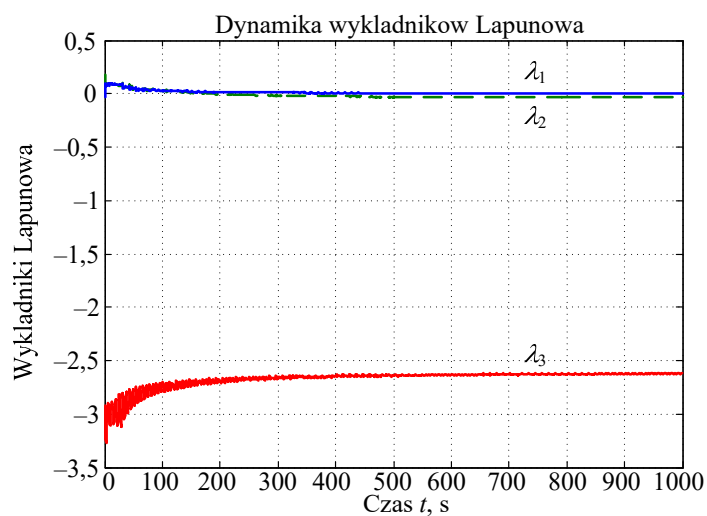
Rys. 5.18. Przebiegi wykładników Lapunowa dla badanego systemu Rösslera

W celu zbadania poprawności wykonanych obliczeń, powtórzmy je dla nieco zmodyfikowanego systemu. Załóżmy, że równania Rösslera (5.7), mają następujące parametry: $a = 0,2$; $b = 0,2$; $c = 3,0$. Przebieg uzyskanej trajektorii jest pokazany na rys. 5.19.



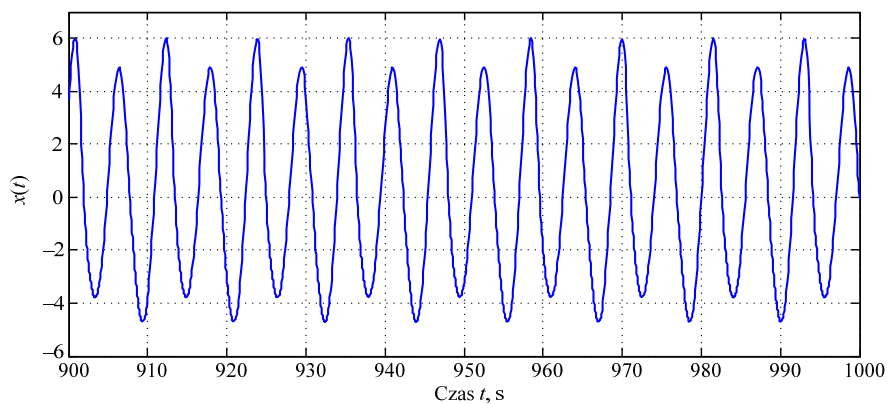
Rys. 5.19. Trajektorja $z = g(x,y)$ równań Rösslera z nowymi parametrami

Widać, że trajektorja fazowa ma tym razem regularny przebieg, co nie wskazuje na występowanie chaosu. Potwierdzają to obliczone przebiegi wykładników Lapunowa (rys. 5.20).



Rys. 5.20. Przebiegi wykładników Lapunowa dla cyklicznego systemu Rösslera

Na koniec rozpatrywanego przedziału, otrzymujemy następujące spektrum: $\lambda_1 = 0,00$; $\lambda_2 = -0,04$; $\lambda_3 = -2,62$. Także towarzyszące temu układowi przebiegi czasowe mają regularny charakter cykliczny, a więc są w pełni kontrolowane (rys. 5.21).



Rys. 5.21. Przebieg zmiennej $x(t)$ cyklicznego systemu Rösslera

5.5. Chaos w układach elektrycznych

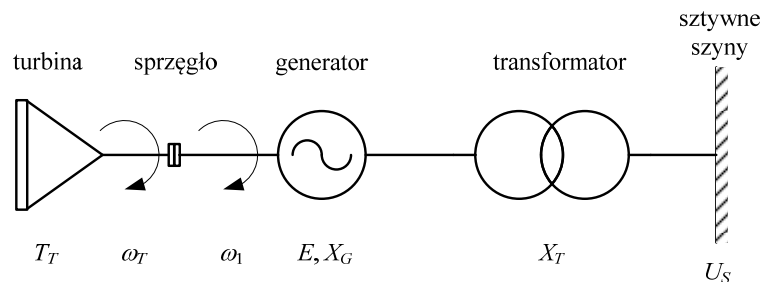
Obwód elektryczny stwarza szczególne warunki do powstania zjawisk nieliniowych, które mogą się objawiać w postaci postulowanych (obwód Chua, piec łukowy, spa-

warka elektryczna) lub przypadkowych procesów chaotycznych (ferrorezonans, stany przejściowe w elektrycznych układach napędowych lub w systemie elektroenergetycznym).

System elektroenergetyczny jest przykładem złożonego układu, w którym mogą zachodzić gwałtowne procesy związane z dynamicznymi stanami elektromechanicznymi oraz elektromagnetycznymi o charakterze nieliniowym. Obserwowane stany przejściowe często prowadzą do niestabilnego zachowania się systemu w zakresie lokalnym lub globalnym, co jest przedmiotem intensywnych badań. Analiza takich zachowań jest niezwykle ważna, gdyż mogą one prowadzić do dużych awarii systemowych, łączących się z gigantycznymi niekiedy stratami. Badania niektórych z tych awarii wskazują na chaotyczne zjawiska w skali lokalnej, które przeradzają się w awarie o dużym zasięgu. Na przestrzeni ostatnich dziesięcioleci powstała na ten temat bogata literatura, w której prezentowane są różne aspekty tego zagadnienia. W dalszej części rozdziału prezentowane są wybrane przykłady ilustrujące występowanie nieliniowych stanów dynamicznych w sieciach elektrycznych, ze szczególnym uwzględnieniem zachowań chaotycznych w systemie elektroenergetycznym.

5.5.1. Prosty układ ze sztywną siecią

Schemat fragmentu systemu elektroenergetycznego jest pokazany na rys. 5.22. Jest to uproszczony schemat typowej instalacji związanej z przyłączeniem generatora rozproszonego o niewielkiej mocy do systemu elektroenergetycznego. Moc systemu jest znacznie większa od mocy generatora, co uzasadnia założenie, że wektor napięcia systemu $\underline{U}_S = U_S \angle 0 = \text{const}$ (system o sztywnych szynach).



Rys. 5.22. Schemat prostego systemu elektroenergetycznego

W rozpatrywanym systemie można wyróżnić dwie części: - system mechaniczny, złożony z turbiny, sprzęgła oraz generatora, a także system elektryczny, na który składa się generator, transformator oraz układ reprezentowany przez sztywne szyny (sztywną sieć). Zakładamy, że sprzęgło jest sztywne, a turbina z generatorem może być rozpatry-

wana, jako jednolity wirujący element o momencie bezwładności J i współczynniku oporów ruchu μ . Na podstawie (1.10), napiszemy równanie ruchu obrotowego:

$$J \frac{d\omega_1}{dt} + \mu\omega_1 = M_m - M_e, \quad (5.28)$$

gdzie: $M_m = M_T$ – moment turbiny, M_e – moment elektryczny związany z mocą przekazywaną z generatora do sieci.

Moment elektryczny można określić na podstawie mocy czynnej P_G przekazywanej z generatora do sieci [15, 34]:

$$M_e = \frac{P_G}{\omega_1} = \frac{E \cdot U_s}{\omega_1 X} \sin \delta, \quad (5.29)$$

gdzie: $X = X_G + X_T$ – reaktancja toru przesyłowego, E – napięcie wewnętrzne w uproszczonym modelu generatora (napięcie za reaktancją X_G), δ – kąt położenia wirnika generatora względem synchronicznie wirującego wektora napięcia sieci sztywnej (kąt spadku napięcia na reaktancji X). Zakładamy dalej, że moment M_e nie zmienia się w wyniku drobnych zmian pulsacji $\omega_1 = \omega_0 = 2\pi f_0 = 314,16 \text{ s}^{-1}$.

W celu odwzorowania nierównomiernej pracy turbiny zakładamy, że moment mechaniczny można przedstawić następująco [15]:

$$M_m = M_0 + M \cos(\omega_w t) = M_0 + M \cos(\phi), \quad (5.30)$$

gdzie: M_0 – stała wartość momentu turbiny, M – amplituda składowej momentu, zmieniającego się z pulsacją ω_w .

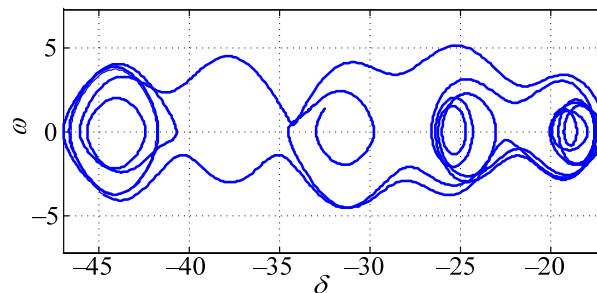
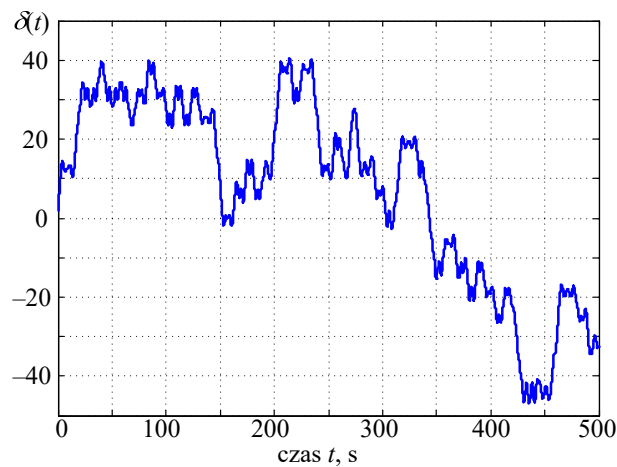
Z powyższych zależności otrzymujemy następujące równania modelu rozpatrywanego systemu:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega_1 \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{J} \left(M_0 + M \cos \phi - \frac{E \cdot U_s}{\omega_0 X} \sin \delta - \mu \omega_1 \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

Jest to układ rzędu drugiego: $n = 2$, jednak reprezentuje on system nieautonomiczny (zależny od czasu), gdyż zmienna ϕ jest funkcją czasu: $\phi = \omega_w t$, więc ma on $n + 1 = 3$ stopnie swobody (także trzy wykładniki Lapunowa, więc może w nim wystąpić proces chaotyczny. Kolejny przykład ilustruje to zagadnienie.

Przykład 5.4. Przeprowadzić analizę stanów chaotycznych w systemie zdefiniowanym przez równania (5.31). Przyjąć następujące parametry systemu: $J = 218 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $\mu = 9,61 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$; $\omega_w = 1,24 \text{ s}^{-1}$; $M_m = 329 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_0 = 3019 \text{ N} \cdot \text{m}$; $U_s = 4000 \text{ V}$; $E = 4100 \text{ V}$; $X = 77,5 \text{ } \Omega$; $\omega_0 = 314,16 \text{ s}^{-1}$.

Źródłem zachowań chaotycznych w rozważanym systemie są oscylacje momentu mechanicznego turbiny o amplitudzie M (5.31). Dla większej wyrazistości analizowanych przebiegów chaotycznych można więc pominąć stałą wartość momentu, zakładając: $M_0 = 0$. Dzięki temu, oscylacje zachodzą względem ustalonych wartości, wynikających z pominiętego momentu M_0 . Przy tych założeniach równania systemu (5.31) poddano całkowaniu numerycznemu w programie Matlab według procedury `ode45` przy warunkach początkowych: $\delta_0 = 0,2$; $\omega_0 = 0,3$. Rysunek 5.23 przedstawia trajektorię $\delta(\omega)$, natomiast przebieg zmiennej $\delta(t)$ jest pokazany na rys. 5.24.

Rys. 5.23. Trajektorja $\delta(\omega)$ Rys. 5.24. Przebieg zmiennej $\delta(t)$

Oba przebiegi potwierdzają chaotyczne zachowanie się analizowanego systemu. Eliminacja takich niekorzystnych stanów może być uzyskana przez wprowadzenie odpowiedniego układu sterującego [15].

5.5.2. Stabilność napięciowa

5.5.3. Chaos w układzie napędowym

5.5.4. Ferrorezonans

Ferrerezonans jest zjawiskiem, które bierze początek od wystąpienia rezonansu w obwodzie RLC, gdy indukcyjność L zmienia swoją wartość (zazwyczaj gwałtownie), w wyniku nasycenia się ferromagnetycznego rdzenia cewki. Podobnie, jak w przypadku rezonansu liniowego, warunkiem wystąpienia rezonansu nieliniowego (ferrerezonasu) jest odpowiednia równowaga reaktancji pojemnościowej oraz indukcyjnej, a także małe tłumienie tych drgań (mała rezystancja obwodu). Powinna więc wystąpić odpowiednia koincydencja trzech parametrów obwodu: R , L , C , a ponadto, występujące drgania prądu i napięcia powinny obejmować wyraźnie różniące się obszary charakterystyki magnesowania rdzenia cewki związanej z nieliniową indukcyjnością L .

W stanie ustalonym, nieliniowe drgania ferrerezonansowe mogą się znacznie różnić w zależności od parametrów obwodu oraz od warunków początkowych⁴². Wyróżnia się następujące rodzaje takich drgań [12]:

- oscylacje okresowe o częstotliwości będącej wielokrotnością częstotliwości napięcia wymuszającego;
- oscylacje okresowe, których składowa podstawowa jest równa częstotliwości napięcia wymuszającego;
- oscylacje harmoniczne, których okres jest wielokrotnością okresu napięcia wymuszającego (subharmoniczne);
- oscylacje quasi-harmoniczne (pseudo-harmoniczne), których okresy drgań mogą być kombinacją okresów harmonicznych napięcia wymuszającego (interharmoniczne);
- drgania chaotyczne bez ustalonej częstotliwości z portretem fazowym w postaci dziwnych atraktorów – spektrum takich drgań może być ciągłe lub przedziałami ciągłe.

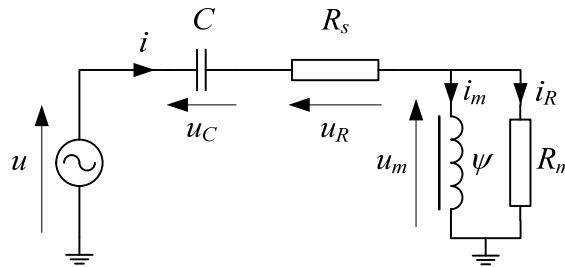
⁴² VAL ESCUDERO M., DUDURYCH I., REDFERN M. A., *Characterization of ferrerezonant modes in HV substation with CB grading capacitors*. Electric Power Systems Research 77 (2007) 1506–1513.

Podobnie, jak w innych układach nieliniowych, stan ustalony może być osiągnięty w różnych punktach (obszarach), w zależności od warunków początkowych - rozwiązanie jest czułe na warunki początkowe. Uzyskany stan ustalony jest także czuły na wartości parametrów układu. Rezonans nieliniowy może także dotyczyć napięć (szeregowe połączenie elementów LC ze źródłem zasilania), jak i prądów (połączenie równoległe LC względem źródła zasilania).

Do dalszej analizy przyjmujemy schemat zastępczy obwodu rezonansu szeregowego, jak na rys. 5.25. Oporność R_m zazwyczaj jest pomijana (bardzo duża wartość), jednak niektóre badania wskazują na istotny wpływ strat w obwodzie magnesowania rdzenia na przebieg zjawiska ferorezonansu. W takim przypadku rozważa się nieliniowy model tej oporności⁴³:

$$i_R = f_{Rm}(u_m) = h_1 u_m + h_3 u_m^3 + h_5 u_m^5, \quad (5.32)$$

ze współczynnikami wyznaczonymi doświadczalnie. W modelu liniowym: $h_3 = h_5 = 0$, $h_1 = 1/R_m$.



Rys. 5.25. Schemat zastępczy obwodu do badania ferorezonansu

Ponieważ w rozpatrywanym procesie indukcyjność obwodu znacząco się zmienia, więc wygodniej jest stosować wartość strumienia elektromagnetycznego ψ w miejsce indukcyjności L , przy czym:

$$L(i) = \frac{d\psi(i)}{di}, \quad (5.33)$$

natomiast strumień jest powiązany z napięciem znaną zależnością:

$$u_m = \frac{d\psi(t)}{dt} \quad (5.34)$$

⁴³ AL-ANBARRI K., RAMANUJAM R., SARAVANASELVAN R., KUPPUSAMY K., *Effect of iron core loss nonlinearity on chaotic ferroresonance in power transformers*. Electric Power Systems Research 65 (2003) 1–12.

Funkcja $\psi = \psi(i)$ charakteryzuje właściwości magnetyczne materiału rdzenia cewki indukcyjnej, co jest nazywane charakterystyką magnesowania. W ogólnym przypadku, zależność ta ma charakter histerezy, co jest często pomijane, ze względu na jej nieznaczny wpływ na przebieg rozważanych tu procesów. Do dalszych rozważań przyjmujemy następujący model charakterystyki magnesowania:

$$i_m = f_m(\psi) = m_1\psi + m_q\psi^q \quad (5.35)$$

gdzie q jest nieparzystą liczbą całkowitą, np. $q = 7, 9, 11, \dots$

Na początek założymy liniowy model oporności R_m oraz sinusoidalne napięcie wymuszające: $u = u(t) = U\cos(\omega t + \alpha)$. Łatwo zauważyć, że dynamika obwodu może być opisana za pomocą następujących równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= u_m, \\ \frac{du_c(t)}{dt} &= \frac{1}{C}i, \end{aligned} \quad (5.36)$$

które, po uwzględnieniu modelu nieliniowej indukcyjności (5.35) oraz praw Kirchhoffa, prowadzą do następującego modelu nieautonomicznego układu z rys. 5.25:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{R_m}{R_m + R_s} \left(u - u_c - R_s (m_1\psi + m_q\psi^q) \right), \\ \frac{du_c}{dt} &= \frac{1}{C} \left(m_1\psi + m_q\psi^q + \frac{1}{R_m + R_s} \left(u - u_c - R_s (m_1\psi + m_q\psi^q) \right) \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Po uwzględnieniu funkcji związanej z czasem: $\phi = \omega_1 t$, otrzymujemy dodatkowe równanie, które sprowadza układ do postaci autonomicznej. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= b_1 \cos(\phi + \alpha) - b_2 u_c - b_3 \psi - b_4 \psi^q, \\ \dot{u}_c &= a_1 \cos(\phi + \alpha) - a_2 u_c + a_3 \psi + a_4 \psi^q, \\ \dot{\phi} &= \omega_1. \end{aligned} \quad (5.38)$$

gdzie: $b_2 = \frac{R_m}{R_m + R_s}$, $b_1 = Ub_2$, $b_3 = b_2 m_1 R_s$, $b_4 = b_2 m_q R_s$, $a_2 = \frac{1}{C(R_m + R_s)}$,

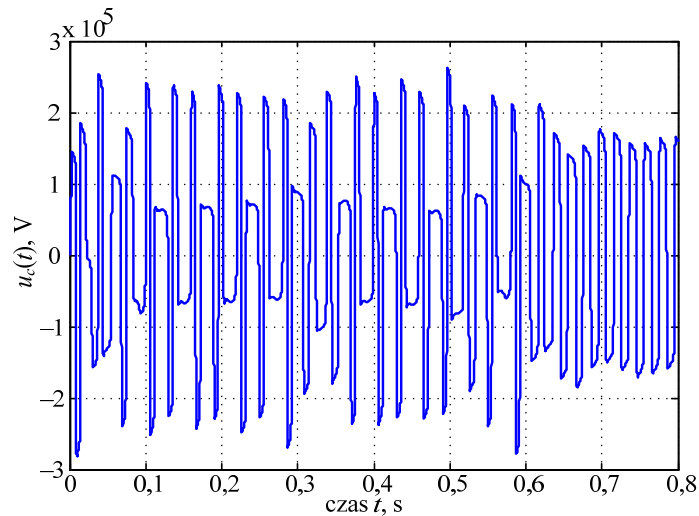
$a_1 = Ua_2$, $a_3 = a_2 m_1 R_m$, $a_4 = a_2 m_q R_m$, α - faza początkowa napięcia zasilającego.

Zastosowanie modelu do analizy stanów przejściowych w typowym obwodzie ferorezonansowym ilustruje kolejny przykład.

Przykład 5.5. Przeprowadzić analizę stanów przejściowych w obwodzie, jak na rys. 5.25. Przyjąć następujące wartości parametrów modelu (5.38): $U = 91$ kV; $\alpha = 0$; $\omega_1 = 100\pi$; $C = 0,78$ μ F; $R_s = 1,5$ Ω ; $R_m = 50$ k Ω ; $m_1 =$

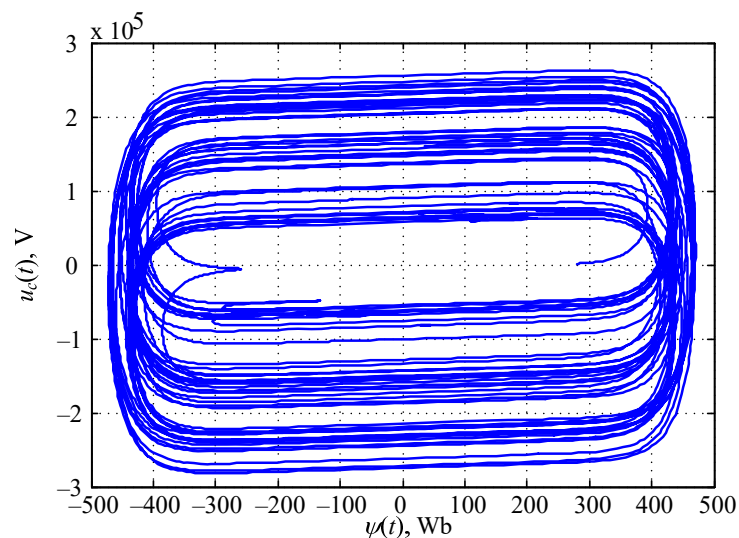
$4,079845\text{E-}4$; $m_q = 2,108275\text{E-}27$; $q = 11$. Zbadać wpływ wartości początkowych na charakter uzyskanych przebiegów.

Do analizy stanu przejściowego wybrano następujące warunki początkowe: $\psi(0) = 280$ Wb; $u_c(0) = 1530$ V, $\phi(0) = 0$. Obliczenia prowadzono z zastosowaniem programu opracowanego w systemie Matlab, który tworzą procedury znajdujące się w dwóch plikach: `Ferro_A_run.m` oraz `Ferro_A.m`. Uzyskany przebieg napięcia $u_c(t)$ jest pokazany na rys. 5.26. Widać, że po wstępnym procesie przejściowym, napięcie na kondensatorze zmierza do wartości ustalonej okresowej, chociaż nieharmonicznej.

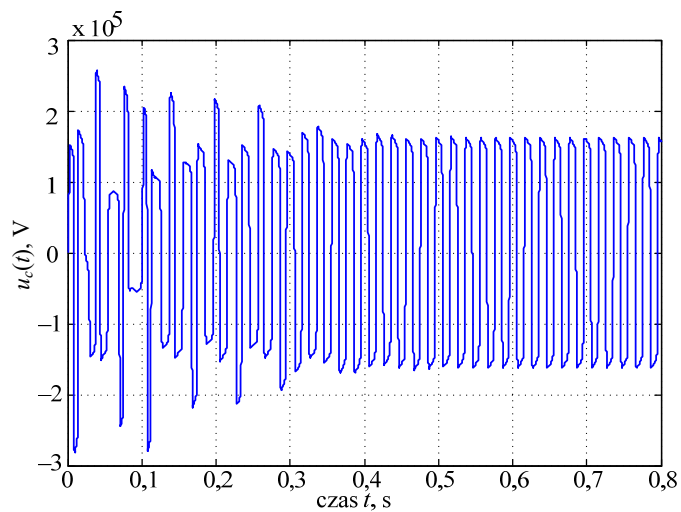


Rys. 5.26. Przebieg zmian napięcia $u_c(t)$

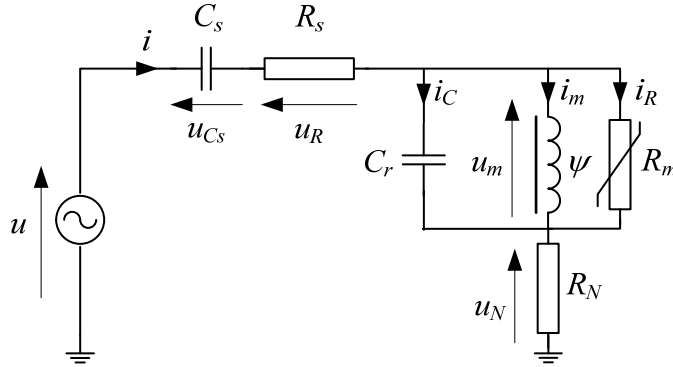
Odpowiadający temu przebiegowi portret fazowy odnoszący się do funkcji: $u_c(\psi)$ jest pokazany na rys. 5.27. Także przebieg tej trajektorii wskazuje na ustalanie się procesu związanego z ferorezonansem.

Rys. 5.27. Przebieg trajektorii fazowej $u_c(\psi)$

Przebieg napięcia $u_c(t)$ po zmianie fazy początkowej do wartości: $\phi(0) = -5^\circ = -0,0872664$ rad jest pokazany na rys. 5.28. Porównując go z przebiegiem z rys. 5.26 widać, że nieznaczna zmiana warunków początkowych prowadzi do istotnych zmian w przebiegu procesu. Jest to charakterystyczna cecha tego typu procesów nieliniowych.

Rys. 5.28. Przebieg zmian napięcia $u_c(t)$ ze zmienioną wartością $\phi(0) = -0,0872664$

W sieciach elektroenergetycznych mogą wystąpić różne warunki, sprzyjające powstaniu ferrezonansu. Okoliczności takie stwarzają zwłaszcza sieci średnich napięć, a szczególnie sieci z izolowanym lub kompensowanym przez cewkę punktem neutralnym. Do analizy zjawisk ferrezonansowych w takich sieciach może być stosowany schemat zastępczy, jak na rys. 5.29.



Rys. 5.29. Zmodyfikowany schemat zastępczy obwodu do badania ferrezonansu

Prawa część schematu przedstawionego na rys. 5.29 reprezentuje transformator zasilający sieć, w którym, w zależności od potrzeby, można odwzorować warunki uzziemienia punktu neutralnego (oporność R_N). Oporności R_s oraz R_N można byłoby połączyć, jednak pozostawiono je oddzielnie właśnie ze względu na różne funkcje, które pełnią w obwodzie. Nie zmienia to jednak warunków powstawania ferrezonansu. Zauważmy, że różniczkowe równania stanu mogą być związane z trzema reaktancyjnymi elementami obwodu, co prowadzi do następującego modelu podstawowego:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= u_m, \\ \frac{du_{Cs}(t)}{dt} &= \frac{1}{C_s} i, \\ \frac{du_m(t)}{dt} &= \frac{1}{C_r} i_{Cr}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Pozostajemy przy poprzednich modelach napięcia zasilającego oraz charakterystyki magnesowania nieliniowej indukcyjności (5.39). Dodatkowo zakładamy, że prąd związany ze stratami czynnymi w rdzeniu będzie reprezentowany zgodnie z zależnością (5.36). Po uwzględnieniu tych wielkości oraz struktury rozpatrywanej sieci, równania (5.40) przyjmą następującą formę (ostatnie równanie dodano w celu uzyskania postaci autonomicznej układu; odnosi się ono do funkcji reprezentującej czas: $\phi(t) = \omega_1 t$):

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi(t)}{dt} &= u_m, \\
\frac{du_{Cs}(t)}{dt} &= \frac{1}{R_z C_s} u - \frac{1}{R_z C_s} u_{Cs} - \frac{1}{R_z C_s} u_m, \\
\frac{du_m(t)}{dt} &= \frac{1}{R_z C_r} u - \frac{1}{R_z C_r} u_{Cs} - \frac{1}{R_z C_r} u_m - \frac{1}{C_r} i_R - \frac{m_1}{C_r} \psi - \frac{m_q}{C_r} \psi^q, \\
\frac{d\phi(t)}{dt} &= \omega_1,
\end{aligned} \tag{5.40}$$

gdzie: $R_z = R_s + R_N$; $\phi = \omega_1 t$; $u = u(t) = U \cos(\phi + \alpha)$, $i_R = h_1 u_m + h_3 u_m^3 + h_5 u_m^5$.

Sposób zastosowania tego modelu pokazuje kolejny przykład.

Przykład 5.6. Przeprowadzić analizę stanów przejściowych w obwodzie, jak na rys. 5.29. Przyjąć następujące wartości parametrów modelu (5.41): $U_n = 20$ kV; $\alpha = 0$; $\omega_1 = 100\pi$; $C_s = 3,1522$ μ F; $R_s = 0,2$ Ω ; $C_r = 4,6607$ μ F; $R_N = 1,25$ Ω ; $m_1 = 0,04320728$; $m_q = 1,444531E-18$; $q = 11$. Zbadać wpływ wartości amplitudy napięcia U na charakter uzyskanych przebiegów.

Do analizy stanu przejściowego wybrano następujące warunki początkowe: $\psi(0) = 80$ Wb; $u_c(0) = 25300$ V, $u_m(0) = 16000$ V, $\phi(0) = 0$.

Współczynniki modelu rezystancji odwzorowującej straty w żelazie transformatora (5.32) zostały obliczone z zastosowaniem programu opracowanego w systemie Matlab: Char_strat_s.m. Charakterystyka strat jest określona, jako funkcja napięcia magnesowania u_m względem prądu i_R ⁴⁴. Dzięki temu, straty pośrednio zależą także od częstotliwości składowych widma odkształconego prądu magnesującego i prądów wirowych. Przebieg tej charakterystyki jest pokazany na rys. 5.30.

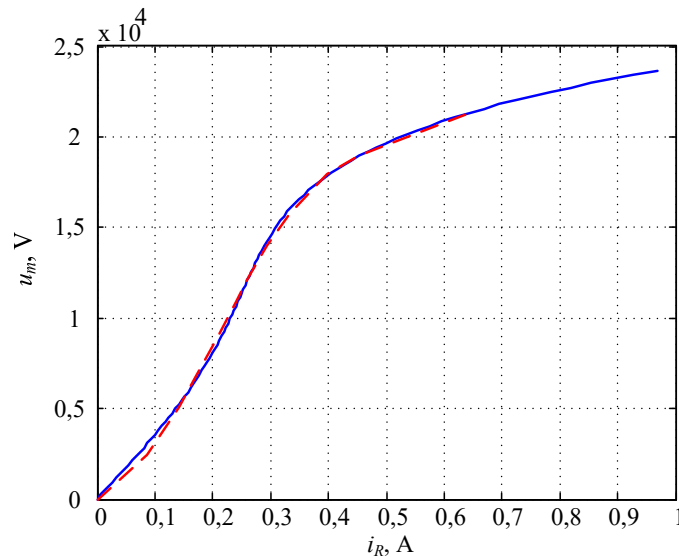
Do aproksymacji danych pomiarowych (krzywa kreskowana na rys. 5.30) zastosowano metodę najmniejszych kwadratów [13], co prowadzi do następujących współczynników modelu (5.33): $h_1 = 3,396059E-05$; $h_3 = -6,906720E-14$; $h_5 = 1,593581E-22$.

Należy zauważyć, że zgodnie z modelem (5.32), rezystancja R_m wyraża się zależnością:

$$R_m = 1 / \left(\frac{di_R}{du_m} \right) = \frac{1}{h_1 + 3h_3 u_m^2 + 5h_5 u_m^4}, \tag{3.41}$$

skąd widać, że w stanach dynamicznych, przy dużych wartościach napięcia u_m , może ona przyjmować nierealistycznie małe wartości. To z kolei prowadzi do dużych wartości prądu i_R i numerycznej niestabilności rozwiązania układu równań (5.41). Można temu zaradzić przez ograniczenie spadku wartości rezystancji R_m . Takie właśnie rozwiązanie przyjęto w rozpatrywanym dalej programie numerycznego rozwiązywania modelu (5.41). Wielkością kontrolującą jest amplituda napięcia u_m . Odpowiedni fragment w programie Matlab ma następującą postać:

⁴⁴ NEVES W.L.A., DOMMEL H.W., *On Modelling Iron Core Nonlinearities*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 8, No. 2, May 1993, pp. 417 – 425.



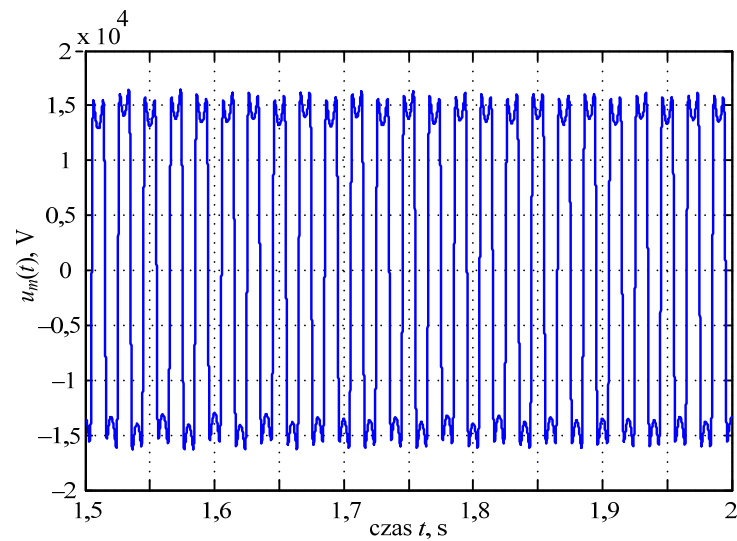
Rys. 5.30. Przebieg charakterystyki $i_R = f(u_m)$; linią przerywaną zaznaczono przebieg uzyskany z pomiarów

```
if abs(um)>par(13),
    iR=par(14)*um;
else
    p=um*um;
    iR=um*(par(5)+p*(par(6)+par(7)*p));
end
```

gdzie $\text{par}(13)$ jest graniczną wartością amplitudy napięcia u_m , do której obowiązuje model (5.33). Jeśli amplituda chwilowego napięcia u_m przekracza tę wartość, to do obliczeń przyjmuje się wartość rezystancji $R_m = 1/\text{par}(14)$, obliczonej zgodnie z (5.41), przy czym: $u_m = \text{par}(13)$.

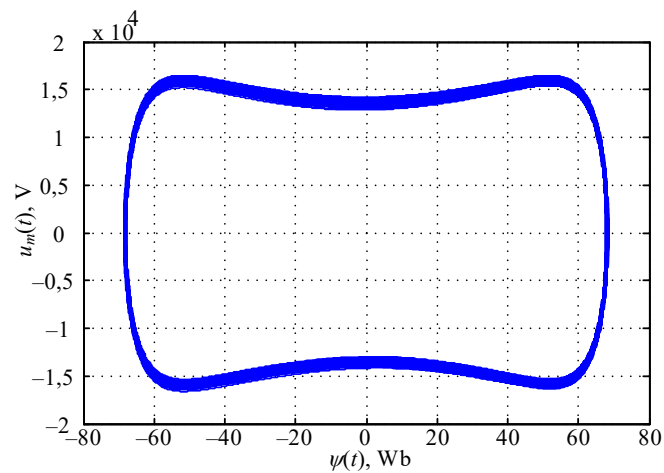
Do analizy stanu dynamicznego badanego układu utworzony został program, na który składają się dwa pliki: `Ferro_F_run.m` oraz `Ferro_F.m`. W pierwszym z nich zadawane są parametry analizowanego układu i wywoływany jest właściwy program do symulacji: `Ferro_F`. W tym ostatnim można także wybrać właściwą procedurę numerycznego rozwiązywania układu równań różniczkowych: `ode23s` lub bardziej dokładną `ode45`. Program jest dostosowany do symulacji stanu dynamicznego obwodu z rys. 5.29, z układem równań różniczkowych (5.40). Zamieszczone komentarze ułatwiają śledzenie poszczególnych kroków przygotowania danych i symulacji.

Niektóre rezultaty symulacji są pokazane na kolejnych rysunkach. Rys. 5.31 przedstawia przebieg zmian napięcia $u_m(t)$ przy wymuszeniu napięciem o amplitudzie $U = 14000\text{V}$ (całkowanie według procedury `ode23s`). Można zauważyć występowanie wielu odkształceń i nieregularności w obserwowanym przebiegu. Jest to także widoczne w przebiegu trajektorii $u_m = f(\psi)$ na rys. 5.32.

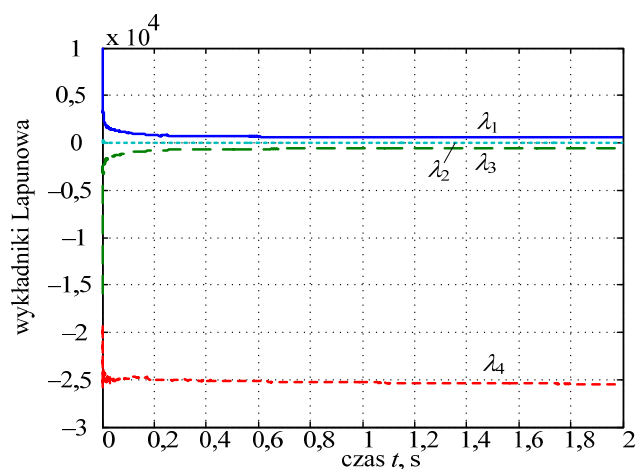


Rys. 5.31. Przebieg zmian napięcia $u_m(t)$ przy napięciu wymuszającym $U = 14000$ V

Do obliczenia wykładników Lapunowa w badanym procesie, został utworzony program w systemie Matlab z plikami: `run_Ferro_Lap_F.m`, `Ferro_Lap_F_ext.m` oraz `lyapunov.m`. Jest to w istocie program z przykładu 5.3, dostosowany do rozważanego tutaj modelu. Przebieg obliczonych wykładników Lapunowa jest pokazany na rys. 5.33. Widać, że największy wykładnik ma wyraźnie dodatnią wartość w analizowanym odcinku czasu. Na końcu tego przedziału, wykładniki przyjmują następujące wartości: $\lambda_1 = 596$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = -602$; $\lambda_4 = -25470$.

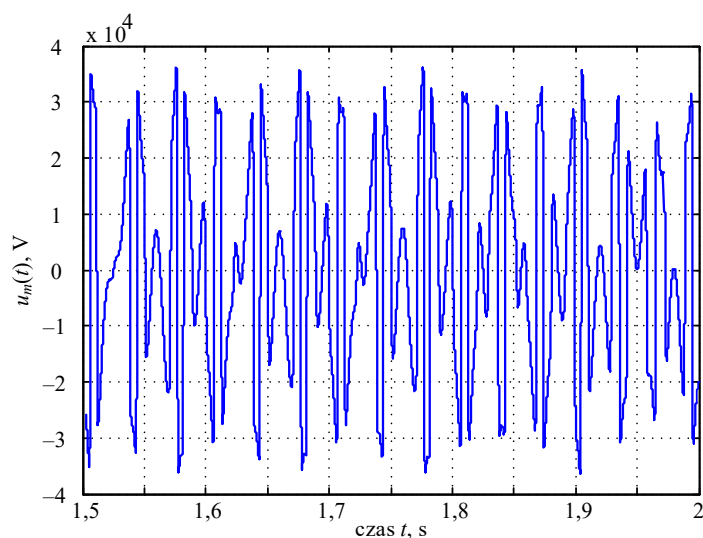


Rys. 5.32. Trajektoria $u_m(t) = f(\psi(t))$ przy napięciu wymuszającym $U = 14000$ V

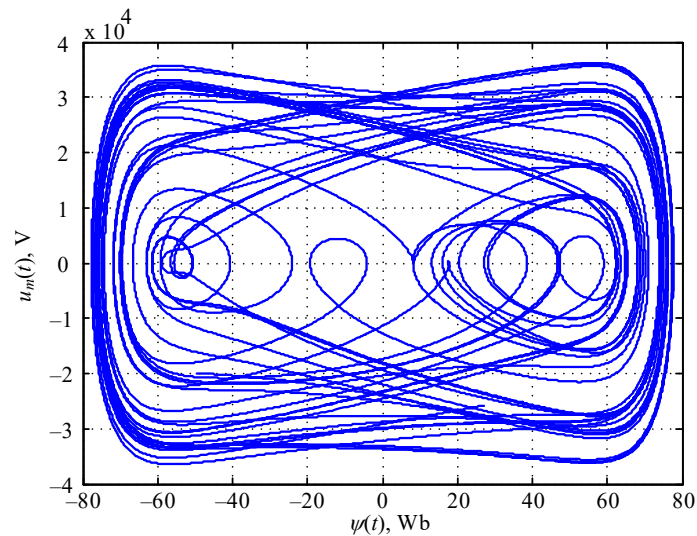


Rys. 5.33. Przebieg zmian wykładników Lapunowa przy napięciu wymuszającym $U = 14000$ V

Chaotyczne zachowanie się badanego układu jest jeszcze bardziej widoczne, gdy zwiększymy amplitudę napięcia wymuszającego. Uzyskane w ten sposób przebiegi są pokazane na kolejnych rysunkach: spadek napięcia $u_m(t)$ na transformatorze (rys. 5.32) oraz odpowiadająca mu trajektoria $u_m = f(\psi)$ (rys. 5.35). W tym przypadku widać wyraźne cechy chaotycznego zachowania się układu.



Rys. 5.34. Przebieg zmian napięcia $u_m(t)$ przy napięciu wymuszającym $U = 33570$ V



Rys. 5.35. Trajektoria $u_m(t) = f(\psi(t))$ przy napięciu wymuszającym $U = 33570$ V

Podobne zjawiska ferorezonansowe są obserwowane także w innych układach elektrycznych⁴⁵.

5.5.5. Łuk elektryczny

Łuk elektryczny jest formą rozładowania energii nagromadzonej pomiędzy rozłączonymi elementami obwodu elektrycznego. W chwili powstania łuku elektrycznego, prąd jest przewodzony przez zjonizowany gaz pomiędzy anodą i katodą. W obwodach prądu przemiennego role obu końców przerwanego obwodu zmieniają się. Pod wpływem zewnętrznego pola elektromagnetycznego oraz temperatury, elektrony są emitowane przez katodę i w formie prądu elektrycznego zmierzają do anody. Utworzona plazma jest substancją złożoną w większości z elektronów i atomów o zredukowanej liczbie elektronów (jonów), która poddana jest działaniu zewnętrznego pola elektromagnetycznego oraz innych czynników, co może w różny sposób wpływać na warunki przewodzenia prądu elektrycznego [27]. Towarzyszące temu efekty mogą być rozpatrywane jako ze wszech miar niekorzystne (w wyłącznikach, podczas zwarć) lub nadzwyczaj porządane (lampy łukowe, spawanie elektryczne, piece łukowe). Niezależnie od tego, fizyczna strona zjawiska łuku elektrycznego jest podobna: jeśli napięcie elektryczne w przerwie obwodu elektrycznego przekroczy graniczną wartość wytrzymałości elektrycznej, następuje gwałtowne obniżenie impedancji gazu, co w od-

⁴⁵ IŻYKOWSKI J., ROSOŁOWSKI E., PIERZ P., *Analysis of Ferroresonance Oscillations in Capacitive Voltage Transformer*. Present Problems of Power System Control, No. 6, 2015, pp. 43 - 66. Dostępny w: <http://www.psc.pwr.wroc.pl>

powiednich warunkach zasilania powstałego obwodu elektrycznego, spowoduje przepływ stosownego prądu. Przebieg tego zjawiska jest bardzo gwałtowny, a jego szczegóły zależą od wielu czynników, co utrudnia tworzenie wiarygodnych jego modeli [36]. Poniżej przedstawiono krótką analizę zjawiska łuku elektrycznego oraz modeli matematycznych służących głównie do reprezentowania łuku, jako elementu sieci elektrycznej, z punktu widzenia stanów dynamicznych w tej sieci.

Modele matematyczne łuku elektrycznego są podstawą analizy stanów przejściowych w obwodach elektrycznych, w których model wyładowania łukowego jest rozpatrywany jako element sieci elektrycznej. Ze względu na bardzo różne czynniki determinujące charakter łuku oraz parametry jego modelu, w ostatnich kilkudziesięciu latach powstało wiele modeli łuku elektrycznego [40, 45]. Modele te tworzone są na podstawie pomiarów dokonywanych w rzeczywistych obiektach lub na bazie modeli fizycznych. Istotną częścią formułowania i weryfikacji takich modeli jest identyfikacja ich parametrów. Jest to bardzo subtelny proces, gdyż zakres stosowania odpowiednich parametrów w dużym stopniu zależy od charakteru rozpatrywanego zastosowania, parametrów obwodu elektrycznego, czy też charakterystyk otoczenia (ciśnienie, wilgotność, czy temperatura powietrza (gazu), warunki chłodzenia i inne). Szczególnie dobrze widać to przy porównaniu zjawisk występujących w przypadku zwarć w liniach wysokiego napięcia, w analizie zwarć w piecach łukowych, w przypadku spawania elektrycznego, w wyłącznikach wysokiego napięcia, czy też w obwodach elektronicznych.

W przypadku zwarć w elektroenergetycznych liniach napowietrznych, model towarzyszącego im łuku elektrycznego został zaproponowany już w 1931 roku przez Warringtona. Jest to dobrze znany model statyczny, który został utworzony na podstawie pomiarów⁴⁶:

$$U_{arc} = E_{arc} l = \frac{K}{I_{arc}^n} l, \quad (5.42)$$

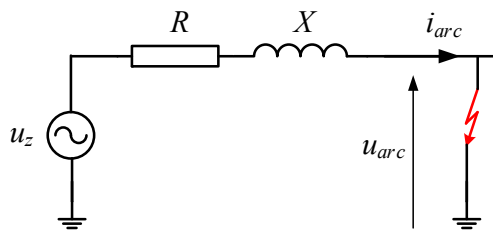
gdzie: U_{arc} – napięcie łuku [V] (wartość skuteczna), I_{arc} – prąd łuku [A] (wartość skuteczna), l – długość łuku [m], K , n – parametry modelu, które można określić na podstawie pomiarów, E_{arc} – gradient spadku napięcia na łuku [V/m]; parametr K można rozpatrywać, jako ocenę mocy wydzielanej w łuku na jednostkę długości [W/m].

Model (5.42) został sformułowany z myślą o ocenie wartości rezystancji zwarć w liniach napowietrznych, z punktu widzenia analizy błędów pomiaru odległości do miejsca zwarcia dokonywanych przez zabezpieczenia podimpedancyjne (odległościowe) linii. Łuk zwarciovowy jest w takim przypadku elementem pętli zwarciovowej, a wartość jego rezystancji może w istotny sposób wpływać na dokładność pomiaru odległości, zwłaszcza gdy linia jest zasilana z odległego końca [51]. Pomimo wielu niedostat-

⁴⁶ van C. WARRINGTON A.R., *Reactance Relays Negligibly Affected by Arc Impedance*, Elec. World, 98, No. 12 (Sept. 19, 1931), pp. 502-505.

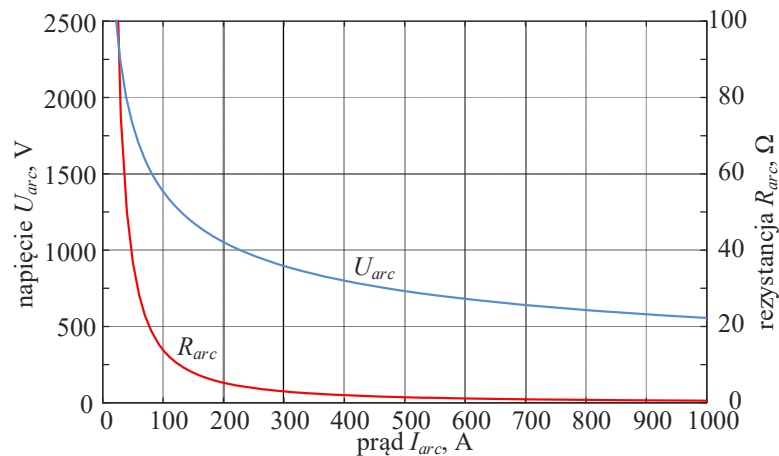
ków, model Warringtona był z powodzeniem stosowany przez wiele pokoleń inżynierów zajmujących się zabezpieczeniami linii elektroenergetycznych. Poniższy przykład ilustruje podstawowe charakterystyki tego modelu łuku z uwzględnieniem parametrów przytoczonych w oryginalnej pracy Warringtona.

Przykład 5.7. Przeprowadzić analizę charakterystyki modelu łuku Warringtona (5.42) w obwodzie, jak na rys. 5.36. Przyjąć następujące wartości parametrów modelu: $K = 8750 \text{ W/m}$; $n = 0,4$; $l = 1 \text{ m}$. Parametry ekwiwalentnego obwodu elektrycznego: $R = 1 \Omega$, $X = 1,5 \Omega$. Napięcie zasilania: $U_z = 10 \text{ kV}$. Wartość rezystancji łuku była zmieniana w zakresie: $(0,1 - 100,0) \Omega$.



Rys. 5.36. Obwód elektryczny do analizy modelu łuku

Wyniki obliczeń zależności napięcia łuku w zależności od prądu zgodnie z (5.42) są pokazane na rys. 5.37.



Rys. 5.37. Charakterystyka $U_{arc} = f(I_{arc})$ zgodna z modelem Warringtona

Znane walory aplikacyjne modelu Warringtona (prosta ocena rezystancji zwarcia) stały się podstawą jego weryfikacji na bazie bardziej dokładnych pomiarów laboratoryjnych⁴⁷. Zgodnie z tymi modelami, proponuje się bezpośrednie obliczenie zastępczej rezystancji zwarcia według jednej z następującej zależności:

$$R_1 = \frac{K_1}{I_{arc}} l, \quad (5.43)$$

gdzie K_1 przybiera wartości: a) 1080,4 – dla $E_{arc} = 1200 \text{ V/m}$ oraz b) 1350,5 – dla $E_{arc} = 1500 \text{ V/m}$, lub:

$$R_2 = \left(\frac{855,3}{I_{arc}} + \frac{4501,6}{I_{arc}^2} \right) l, \quad (5.44)$$

dla zakładanego gradientu napięcia $E_{arc} = 950 + 5000/I \text{ [V/m]}$.

Dla porównania, model Warringtona (5.42), zapisany dla rezystancji ma następującą formę:

$$R_W = \frac{28688,5}{I_{arc}^{1,4}} l \quad (5.45)$$

Podstawowe ograniczenia modelu Warringtona wynikają z pominięcia dynamiki zachodzącego procesu, który w rzeczywistości zmienia się z czasem, co łączy się ze zmianą kierunku prądu i napięcia, długości łuku, a także uwzględnienia innych parametrów (temperatury, wilgotności, warunków chłodzenia itd). Poniżej przedstawiono krótki przegląd podstawowych dynamicznych modeli łuku elektrycznego, które są głównie stosowane do reprezentacji zwarć w liniach napowietrznych. Przy nieznacznych modyfikacjach oraz po odpowiednim doborze wartości parametrów, są one z powodzeniem stosowane także do modelowania łuku elektrycznego w innych przypadkach. Bliższa analiza koncepcji leżących u podstaw formułowania omawianych modeli może być znaleziona w obszernej literaturze przedmiotu. Poniższe omówienie ogranicza się głównie do prezentacji modeli w formie ‘czarnej skrzynki’ (ang. black box), co ułatwia ich zastosowanie w formie elementów obwodu elektrycznego. Oddrębnym aspektem badania fenomenu łuku elektrycznego jest analiza towarzyszących mu zjawisk fizycznych, co wykracza poza zakres poruszanych tu zagadnień.

Pomiary prowadzone w rzeczywistych obwodach potwierdzają możliwość przyjęcia uproszczonego modelu łuku o postaci⁴⁷:

⁴⁷ TERZIJA V.V., KOGLIN H.-J., *On the Modeling of Long Arc in Still Air and Arc Resistance Calculation*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 19, no. 3, July 2004, s. 1012 – 1017.

$$u_{arc} = \begin{cases} U_C & |i_{arc}(t)| > I_a \\ u_{arc} & |i_{arc}(t)| \leq I_a \end{cases} \quad (5.46)$$

gdzie U_C , I_a są parametrami modelu.

W uproszczonych analizach przyjmuje się, że napięcie u_{arc} może być reprezentowane za pomocą stałej wartości U_C , której znak pokrywa się z polaryzacją prądu łuku i_{arc} . Pomiary rzeczywistych procesów doprowadziły do sformułowania kilku praktycznych matematycznych modeli łuku.

Model Cassiego prezentowany w materiałach CIGRE⁴⁸ z 1939 roku otwiera szereg klasycznych publikacji związanych z dynamicznym modelem łuku elektrycznego. Podstawowe równanie tego modelu ma następującą postać:

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = \frac{d(\ln g)}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\left(\frac{u_{arc}}{U_C} \right)^2 - 1 \right) \quad (5.47)$$

gdzie: g – elektryczna przewodność łuku [S],
 τ – stała czasowa związana z elektrycznymi parametrami łuku [s],
 u_{arc} – chwilowy spadek napięcia na łuku [V],
 U_C – napięcie łuku (stały parametr) [V].

Jak widać, model nawiązuje do asymptotycznego przebiegu zależności przewodności łuku ($1/R$) od przepływającego prądu – jak w modelu statycznym. W przypadku ustalonego łuku, wartość przewodności g jest stała i wówczas zachodzi równość: $u_{arc} = U_C$ (model statyczny), co jest charakterystyczne dla łuku o dużej wartości prądu. W tym modelu zakłada się, że temperatura łuku jest stała, co jest zapewnione przez zewnętrzne chłodzenie. Ponadto, przyjmuje się także stałą gęstość prądu, a zmiana przewodności łuku zachodzi w wyniku zmian jego przekroju. Kolejny przykład ilustruje podstawowe charakterystyki modelu łuku opracowanego zgodnie z koncepcją Cassiego.

Przykład 5.8. Opracować model Matlab/Simulink, który odzwierciedla model łuku Cassiego według zależności (5.47). Przyjąć schemat sieci, jak na rys. 5.36, zakładając następujące parametry obwodu: $R = 10\Omega$, $L = 0,053H$, napięcie zasilania: $U_s = 400kV$ oraz modelu łuku: $U_C = 80V$. Przeprowadzić obliczenia dla dwóch wartości stałych czasowych: $\tau = 0,008s$ oraz $\tau = 0,000012s$.

Model obwodu z rys. 5.36 wraz z modelem łuku (5.47) można łącznie zapisać w postaci następującego układu równań:

⁴⁸ CASSIE A.M., *Theorie nouvelle des arcs de rupture et de la rigidite des circuits*, CIGRE Report, 102, 1939, pp. 588-608.

$$\frac{di_{arc}}{dt} = -\frac{R}{L}i_{arc} + \frac{u_s}{L} - \frac{u_{arc}}{L} \quad \text{- równanie obwodu,}$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{1}{\tau \cdot g} \left(\frac{i_{arc}}{U_c} \right)^2 - \frac{g}{\tau} \quad \text{- równanie łuku,}$$

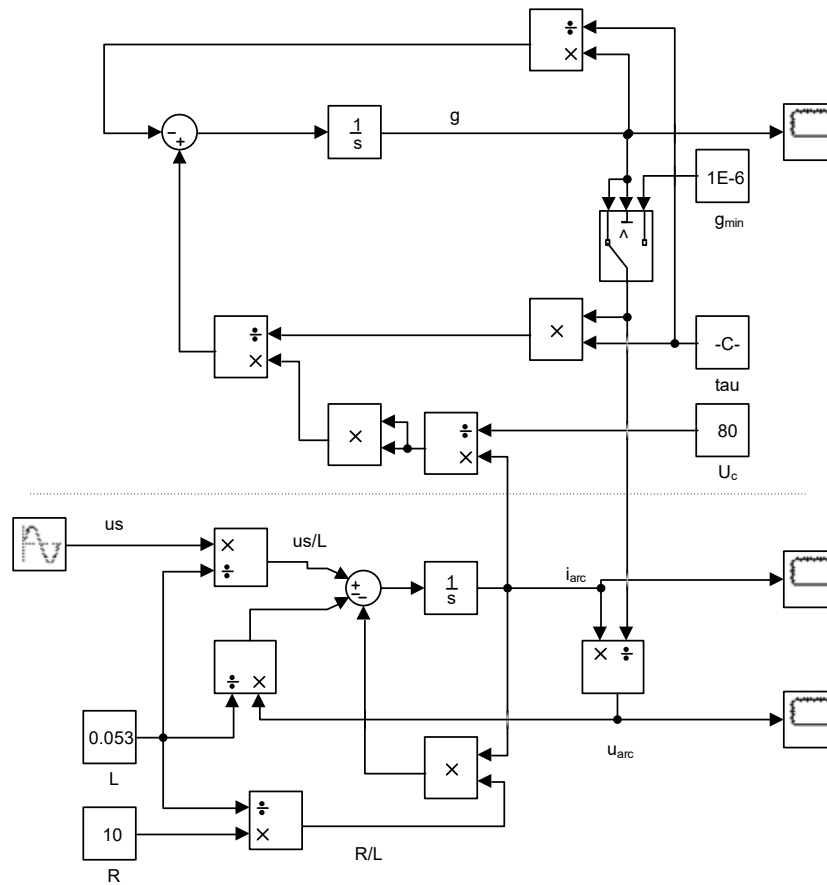
$$u_{arc} = \frac{i_{arc}}{g} \quad \text{- spadek napięcia na łuku.}$$

W powyższym modelu występują dzielenia przez zmienną przewodność łuku g , co jest źródłem niestabilności numerycznej, gdy ta wartość przyjmuje bardzo małe wartości. W celu uniknięcia tego problemu wprowadzono ograniczenie na bardzo małą wartość g :

$$g := g_{\min} \quad \text{gdy } g \leq g_{\min},$$

gdzie przyjęto: $g_{\min} = 1,0\text{E-}6 \text{ S}$.

Model Simulink utworzony według powyższych równań jest pokazany na rys. 5.38. Górna część schematu odpowiada modelowi łuku, natomiast dolna – reprezentuje model rozpatrywanego obwodu elektrycznego. Model ten jest zapisany w pliku *model_cassil.slx*.

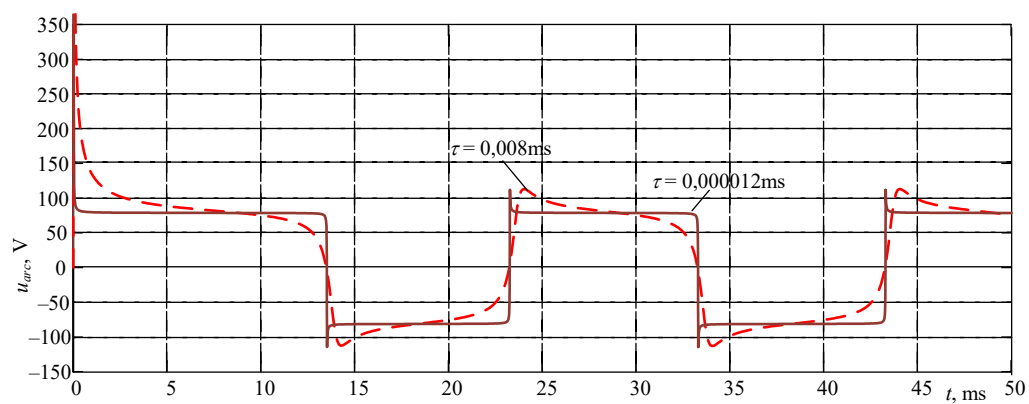


Rys. 5.38. Schemat modelu Matlab/Simulink reprezentującego obwód z rys. 5.36

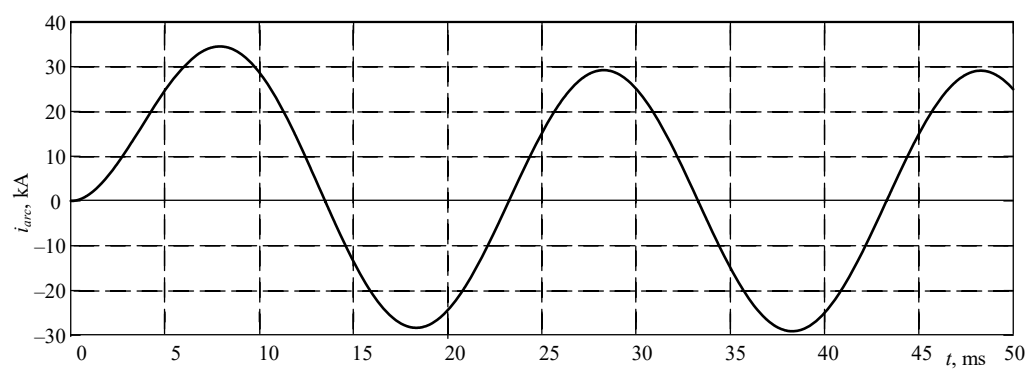
Kolejne rysunki prezentują niektóre wyniki symulacji łuku elektrycznego uzyskane za pomocą utworzonego programu. Przebieg napięcia łuku (rys. 5.39) potwierdza wcześniejszą uwagę, że element ten zachowuje się jak dyskryminator napięcia. Szczegóły uzyskanych przebiegów w dużym stopniu zależą od przyjętej stałej czasowej τ związanej z intensywnością chłodzenia łuku.

Amplituda i charakter przebiegu prądu (rys. 5.40) w tym przypadku zależy od wartości parametrów R , L obwodu elektrycznego i dynamiczne zmiany oporności łuku tylko nieznacznie wpływają na przebieg prądu.

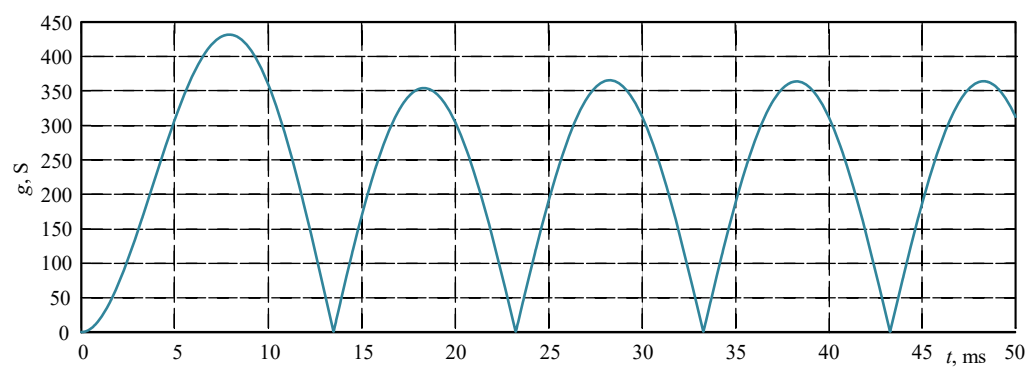
Przebieg zmian przewodności łuku g (rys. 5.41) kształtem przypomina dwupołówkowo wyprostowany przebieg prądu (rys. 5.40), co wynika stąd, że napięcie łuku – co do wartości amplitudy – zmienia się nieznacznie w czasie, a ponadto, prąd i napięcie łuku mają tę samą fazę (rezystancyjny charakter impedancji łuku). W konsekwencji, przewodność g przyjmuje zerową wartość w momencie przejścia prądu przez zero, co jest źródłem wspomnianych powyżej numerycznych problemów.



Rys. 5.39. Przebiegi spadku napięcia na łuku elektrycznym dla dwóch wartości stałych czasowych τ



Rys. 5.40. Przebieg prądu w analizowanym obwodzie



Rys. 5.41. Przebieg zmian przewodności elektrycznej łuku

Przywoływany w przykładzie 5.8 problem numerycznej stabilności rozwiązania równania modelu (5.47) może być usunięty przez modyfikację wspomnianego równania różniczkowego dzięki podstawieniu: $x = \ln g$, co pociąga za sobą: $u_{arc} = i_{arc}/e^x$. Nowa zmienna x w równaniu modelu nie zeruje się nawet przy bardzo małych wartościach przewodności g , co w dużej mierze usuwa problem numerycznej stabilności rozwiązania. Zastosowanie tego podejścia jest pokazane w przykładzie, ilustrującym kolejny model łuku oraz w zadaniu 5.8.

Model Mayra zawiera nieznaczną modyfikację równania (5.47)⁴⁹:

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = \frac{d(\ln g)}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{g u_{arc}^2}{P_0} - 1 \right) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{i_{arc} u_{arc}}{P_0} - 1 \right) \quad (5.48)$$

gdzie: g – elektryczna przewodność łuku [S],
 τ – stała czasowa związana z elektrycznymi parametrami łuku [s],
 u_{arc} – chwilowy spadek napięcia na łuku [V],
 i_{arc} – chwilowy prąd w łuku elektrycznym [A],
 P_0 – moc oddawana przez łuk do otoczenia (chłodzenie) [W].

Zauważmy, że $g \cdot (u_{arc})^2 = u_{arc} i_{arc}$, jest chwilową mocą elektryczną łuku. Przy stabilnym łuku zachodzi następująca równość: $P_0 = u_{arc} i_{arc}$ (model statyczny).

Porównując oba modele: (5.47) oraz (5.48), można uzasadnić warunki, dla których należy określić stałe parametry modeli: dla przedziału niedużych wartości prądu łuku - $\tau = \text{const}$, $P_0 = \text{const}$ (model Mayra), natomiast w rejonie dużych wartości prądu - $\tau = \text{const}$, $P_0 = g \cdot U_C$ (model Cassie'go).

Przykład 5.9. Opracować model symulacyjny Matlab/Simulink łuku elektrycznego według równania Mayra (5.47). Przyjąć schemat sieci, jak na rys. 5.36, zakładając następujące parametry obwodu: $R = 10\Omega$, $L = 0,053\text{H}$, napięcie zasilania: $U_s = 400\text{kV}$ oraz modelu łuku: $P_0 = 2,0\text{E}5\text{W}$. Przeprowadzić obliczenia dla dwóch wartości stałych czasowych: $\tau = 0,00008\text{s}$ oraz $\tau = 0,000012\text{s}$.

Równania rozpatrywanego modelu są podobne do tych z przykładu 5.8, przy czym, model łuku (5.47) zapiszemy w następującej formie:

$$\frac{d(\ln g)}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{g u_{arc}^2}{P_0} - 1 \right),$$

co, po podstawieniu: $x = \ln g$, przyjmuje następującą postać:

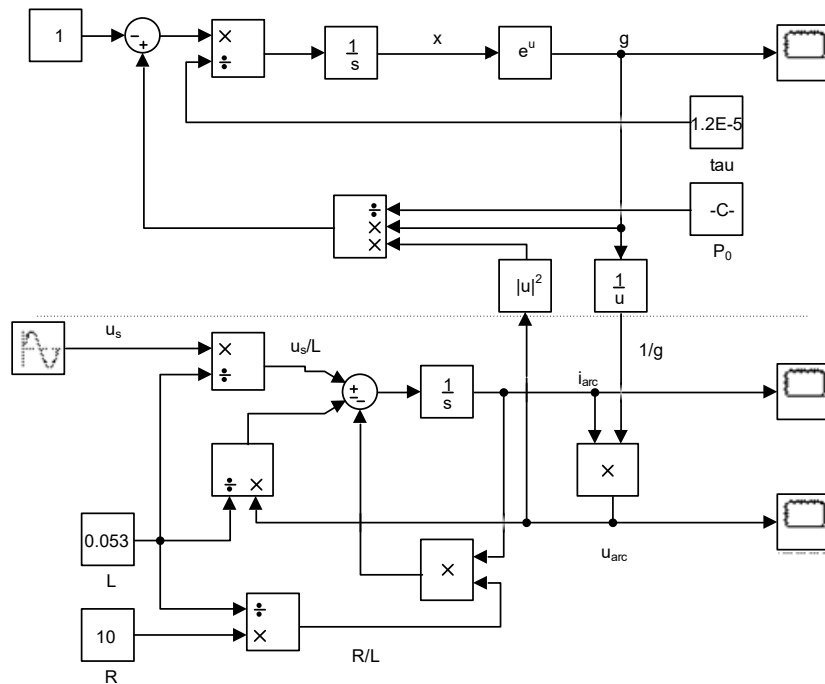
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{e^x u_{arc}^2}{P_0} - 1 \right), \quad g = e^x \quad (5.49)$$

⁴⁹ MAYR O., *Beitrage zur theorie des Statischen und des Dynamischen Lichtbogens*, Archiv für Electrotechnik, vol Band 37, Heft 12, 1943, pp 588-608.

Powyższa forma modelu łuku jest numerycznie korzystniejsza od tej, użytej w przykładzie 5.8, gdyż zmienna reprezentująca przewodność łuku g nie zeruje się dla dowolnej wartości zmiennej x (jest to ważne ze względu na relację pomiędzy napięciem u_{arc} i prądem łuku i_{arc}).

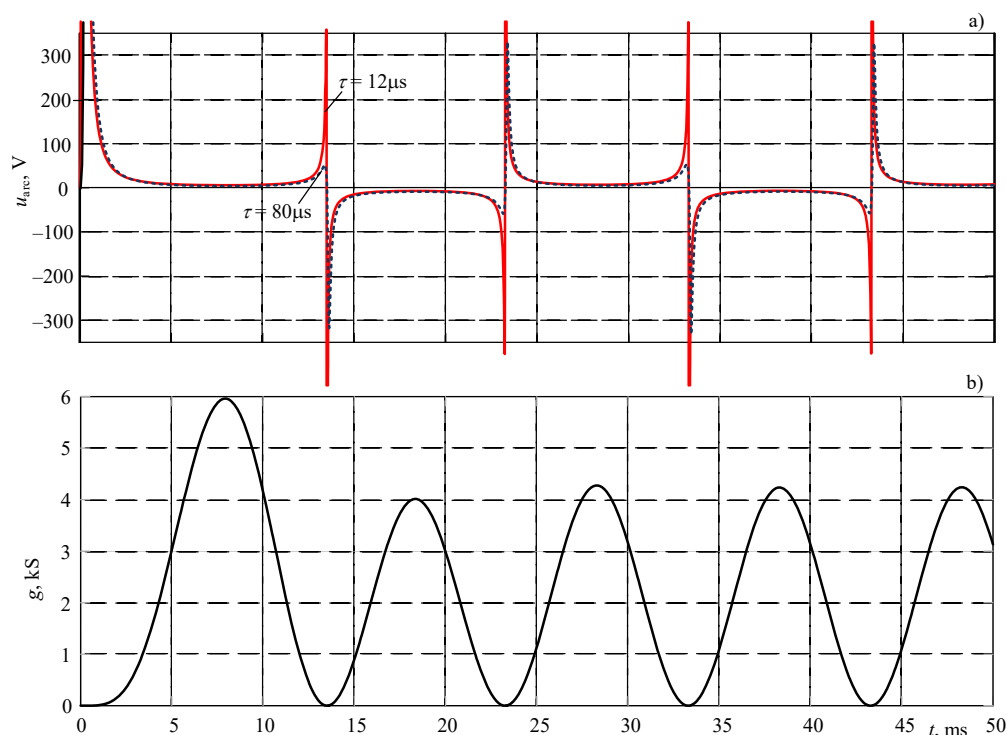
Schemat opracowanego modelu (Matlab/Simulink) jest pokazany na rys. 5.42. Fragment tego modelu odnoszący się do schematu sieci elektrycznej (dolna część struktury modelu) jest taki sam, jak na rys. 5.38. W górnej części rysunku znajduje się model łuku, sporządzony według zależności (5.47) w wersji zapisanej w postaci (5.49).

Przedstawiony model jest zapisany w pliku *model_mayr1.slx*.



Rys. 5.42. Schemat modelu Mayra łuku elektrycznego

Niektóre spośród uzyskanych przebiegów są pokazane na rys. 5.43. Widać występowanie intensywnych przebiegów (rys. 5.43a) w momentach, gdy przewodność łuku (rys. 5.43b) przyjmuje bardzo małą wartość (zanika przewodność). Przebiegi napięcia tylko nieznacznie różnią się dla dwóch rozpatrywanych wartości stałej czasowej τ . Różnice te praktycznie nie występują w przebiegach przewodności łuku (rys. 5.43b).



Rys. 5.43. Przebiegi zmian napięcia łuku (a) oraz jego przewodności (b) dla modelu Meyra

W modelu przedstawionym w przykładzie 5.9 (rys. 5.42), dynamiczna sieć elektryczna jest reprezentowana w postaci równania różniczkowego. Wynika stąd istotne ograniczenie, gdyż każda zmiana schematu sieci elektrycznej pociąga za sobą niekiedy dużą zmianę struktury modelu. W bloku Simulink Toolbox Simscape dostępne są modele sieci, które są reprezentowane w postaci schematów elektrycznych. Dostępne są także modele wyłączników z reprezentacją wybranych modeli łuku elektrycznego. Przykłady zastosowania tych modeli znajdują się w Dodatku 8 (str. 243).

Model Kizilcaya powstał w rezultacie modyfikacji modelu Mayra przez zastąpienie mocy elektrycznej łuku przez parametr odpowiadający stacjonarnej przewodności łuku. Podstawowa relacja związana z tym modelem została zaproponowana przez A. Grütza i A. Hochrainera⁵⁰, następnie została rozwinięta oraz rozpowszechniona w postaci modelu stosowanego w programie EMTP przez M. Kizilcaya⁵¹. Dynamiczna zmiana przewodności łuku jest określona przez następującą zależność:

⁵⁰ GRÜTZ A., HOCHRAINER A., *Rechnerische Untersuchung von Leistungsschaltern mit Hilfe einer verallgemeinerten Lichtbogen-theorie*, ETZ Archiv, Bd. 92, H.4, pp.185-191, 1971.

⁵¹ KIZILCAY M., PNIOK T., *Digital Simulation of Fault Arcs in Power Systems*, ETEP, Vol. 1, No 1, January/February 1991, pp. 55 – 60.

$$\frac{dg}{dt} = \frac{1}{\tau}(G - g) \quad (5.50)$$

gdzie: g – elektryczna przewodność łuku [S],
 τ – stała czasowa związana z elektrycznymi parametrami łuku [s],
 G – stacjonarna przewodność łuku [S], wyznaczana następująco:

$$G = \frac{|i_{arc}|}{(U_0 + R|i_{arc}|)l} \quad (5.51)$$

gdzie: i_{arc} – chwilowa wartość prądu łuku [A],
 R – stała wartość względnej rezystancji łuku [Ω/m],
 U_0 – stała wartość względnego spadku napięcia na łuku [V/m],
 l – długość łuku (stały parametr) [m].

Model (5.50) jest szeroko stosowany zwłaszcza do symulacji zwarć w liniach napowietrznych. Przez odpowiedni dobór parametrów w (5.51), model można łatwo dostosować do reprezentacji łuku wtórnego⁵², co jest ważne w przypadku analizy zwarć jednofazowych przy stosowaniu w zabezpieczeniach linii automatyki Samoczynnego Powtórznego Załączenia (SPZ) [40, 51].

Model Schwarza powstał w rezultacie modyfikacji modelu Mayra przez uzależnienie stałej czasowej τ oraz mocy chłodzenia łuku P (mocy oddawanej do otoczenia), od przewodności łuku g ⁵³:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g^{1-a}}{\tau} \left(\frac{i_{arc} u_{arc}}{P_0 g^b} - 1 \right) \quad (5.52)$$

gdzie: a – stały parametr, określający zależność stałej czasowej τ od przewodności g ;
 b – stały parametr, określający zależność mocy P_0 od przewodności g ;
pozostałe oznaczenia – jak w (5.48).

Współczynniki a , b są dobierane w drodze testowych pomiarów, pozwalających dostosować charakterystykę łuku do zadanych warunków. W charakterze typowych wartości tych parametrów można przyjąć: $a=0,15$ and $b=0,6$. Zauważmy, że stan ustalony (model statyczny) jest wyznaczony przez taki sam warunek, jak w modelu Mayra: $P_0 = u_{arc} i_{arc}$.

Model Habedanka powstał przez szeregowie połączenie elementów sieci wyznaczonych przez modele Cassiego oraz Mayra⁵⁴:

⁵² Łuk wtórny może powstać po wyłączeniu zwarcia jednofazowego w linii napowietrznej, gdy napięcie indukowane w wyłączzonej fazie przez prądy w fazach zdrowych, jest w stanie utrzymać przewodzący zjonizowany kanał zwarcia.

⁵³ SCHWARZ, J., *Dynamisches Verhalten eines Gasbeblasenen, Turbulenzbestimmten Schalllichtbogens*, ETZ Archiv, Bd. 92, pp. 389-391, 1971.

$$\begin{aligned}
\frac{dg_C}{dt} &= \frac{1}{\tau_C} \left(\frac{(u_{arc}g)^2}{U_C^2 g_C} - g_C \right), \\
\frac{dg_M}{dt} &= \frac{1}{\tau_M} \left(\frac{(u_{arc}g)^2}{P_0} - g_M \right), \\
\frac{1}{g} &= \frac{1}{g_C} + \frac{1}{g_M}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

gdzie: indeksy C, M wskazują, odpowiednio, na model Cassiego lub Mayra, u_{arc} jest spadkiem napięcia na łuku elektrycznym, g – przewodność łuku.

Model Schavemakera powstał przez modyfikację modelu Mayra przy założeniu, że stała czasowa τ oraz moc chłodzenia łuku P (moc oddawana do otoczenia), są stałymi parametrami, zależnymi od prądu przepływającego przez łuk⁵⁵:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g}{\tau} \left(\frac{i_{arc} u_{arc}}{\max(U_{arc} |i_{arc}|, P_0 + P_1 i_{arc} u_{arc})} - 1 \right) \tag{5.54}$$

gdzie: U_{arc} – parametr odpowiadający spadkowi napięcia na łuku przy dużej wartości prądu łuku i_{arc} [V],

P_1 – współczynnik związany z mocą oddawaną przez łuk do otoczenia, przy czym, $P_1 = 0$ gdy prąd łuku jest bardzo mały;

pozostałe oznaczenia jak w (5.48).

Stały parametr P_0 w (5.54) reprezentuje moc oddawaną do otoczenia, której wartość zależy od szczegółów otoczenia łuku (budowa komory wyłącznika, długość łuku). Współczynnik chłodzenia P_1 odwzorowuje powiązanie mocy elektrycznej łuku z czynnikami warunkującymi jego przewodność (dodatkowe chłodzenie, przedmuchiwanie, rodzaj gazu izolacyjnego). Całkowita moc chłodzenia łuku jest w dużym stopniu proporcjonalna do dostarczanej mocy elektrycznej, co jest zapewnione przez przyjęcie wartości współczynnika P_1 bliskiej jedności, np. $P_1 = 0,995$.

Można zauważyć, że w obszarze dużych wartości prądu i_{arc} , zależność (5.54) przyjmuje postać modelu Cassiego, natomiast przy bardzo małej wartości tego prądu, model Schavemakera jest równoważny modelowi Mayra. Liczne fizyczne testy potwierdzają zbieżność takiego podejścia z charakterem relacji zachodzących w rzeczywistych obwodach z łukiem zwarciovym.

⁵⁴ HABEDANK, U.: *On the Mathematical Description of Arc Behaviour in the Vicinity of Current Zero*, ETZ Archiv, Bd. 10, H. 11, 1988, pp. 339-343.

⁵⁵ SCHAVEMAKER P.H., and Van der SLUIS, L., *An Improved Mayr-Type Arc Model Based on Current-Zero Measurements*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 15, No. 2, April 2000, pp. 580-584.

Wspólną cechą przedstawionych modeli matematycznych łuku jest obecność parametrów, które odzwierciedlają lokalny charakter środowiska, w którym zachodzi badane zjawisko (dane materiałowe, warunki chłodzenia, konstrukcja układu i inne). Sprawia to, że obszar ich zastosowania jest ograniczony do przypadków, dla których zakres zmian parametrów modelu został udokumentowany na podstawie pomiarów rzeczywistych fizycznych procesów, zachodzących w podobnych warunkach.

5.5.6. Elektryczny łuk spawalniczy

Łuk elektryczny towarzyszący procesowi spawania elektrycznego jest wprawdzie związany z podobnym do omówionego powyżej zjawiskiem przewodzenia elektrycznego w zjonizowanym gazie, jednak występujące w obu przypadkach parametry modelu mogą się znacznie różnić. W przypadku spawania, zasadniczo różne są warunki bilansowania się ciepła związanego z powstałym łukiem, niż ma to miejsce w łuku elektrycznym wywołanym zwarcie lub utratą izolacji w sieci elektrycznej. Także parametry elektrycznego obwodu zasilania w obu przypadkach zazwyczaj znacznie się różnią. Przy założeniu ustalonej długości łuku, bilans mocy można określić za pomocą następującej zależności [45]:

$$\frac{dE}{dt} = P - P_0, \quad (5.55)$$

gdzie: E oznacza wewnętrzną energię łuku, P jest mocą dostarczaną przez obwód zasilający, P_0 jest mocą odprowadzaną do otoczenia w efekcie przewodzenia ciepła i promieniowania.

Moc elektryczna P może być wyrażona za pomocą parametrów i stanu obwodu:

$$P = R_{st} i_{arc}^2 = \frac{U(I_{arc})}{I_{arc}} i_{arc}^2, \quad (5.56)$$

gdzie: $U(I_{arc})$, I_{arc} – napięcie i prąd łuku w stanie ustalonym, wyznaczające statyczną charakterystykę rezystancji łuku (rys. 5.37), R_{st} – ustalona (statyczna) wartość rezystancji łuku, i_{arc} – bieżąca (dynamiczna) wartość prądu łuku, skąd:

$$u_{arc} = \frac{U(I_{arc})}{I_{arc}} i_{arc}, \quad (5.57)$$

W warunkach ustalonych obie moce w (5.55) są sobie równe, więc:

$$P_0 = U(I_{arc}) I_{arc} \quad (5.58)$$

Zakładając, że po odłączeniu zasilania, proces stygnięcia łuku zachodzi w sposób wykładniczy, można przyjąć, że zjawisko to zachodzi w podobny sposób w odniesieniu do prądu (kwadratu prądu):

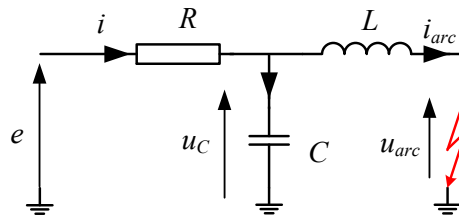
$$i_{arc*}^2 = I_{arc}^2 e^{-t/\tau}, \quad (5.59)$$

gdzie: τ – stała czasowa chłodzenia łuku, i_{arc*} – prąd dynamiczny w stanie chłodzenia łuku; przyjmuje się, że zmiana prądu I_{arc} zachodzi ze stałą czasową τ .

Na podstawie zależności (5.55) - (5.59) można uzyskać następujące równanie modelu elektrycznego łuku spawalniczego [45]:

$$\frac{dI_{arc}^2}{dt} = \frac{1}{\tau} (i_{arc}^2 - I_{arc}^2) \quad (5.60)$$

Równanie (5.60) wiąże ze sobą statyczne (ustalone) i dynamiczne wartości prądu łuku poprzez stałą czasową τ . Model stanu przejściowego w sieci zasilającej łuk spawalniczy zależy od szczegółowego schematu zastępczego tej sieci. Rozpatrywane są zazwyczaj schematy uproszczone, co pozwala wydobyć podstawowe relacje w takim układzie. Przykładowy schemat takiej sieci jest pokazany na rys. 5.44 [45].



Rys. 5.44. Schemat zastępczy sieci zasilającej elektryczny łuk spawalniczy

Uwzględniając zależności (5.55) - (5.59), otrzymamy następujące równania dynamiki tego obwodu:

$$\begin{aligned} \frac{di_{arc}}{dt} &= \frac{1}{L} \left(u_{arc} - \frac{U(I_{arc})}{I_{arc}} i_{arc} \right), \\ \frac{du_{arc}}{dt} &= \frac{1}{RC} (e - u_{arc} - Ri_{arc}), \\ \frac{dI_{arc}^2}{dt} &= \frac{1}{\tau} (i_{arc}^2 - I_{arc}^2) \end{aligned} \quad (5.61)$$

W celu uogólnienia analizy można wprowadzić bezwymiarowe zmienne w powyższym modelu:

$$t_\tau = \frac{t}{\tau}, \quad x = \frac{i_{arc}}{I_0}, \quad y = \frac{u_{arc}}{U_0}, \quad z = \frac{I_{arc}^2}{I_0^2}, \quad (5.62)$$

gdzie: I_0 , U_0 – początkowe ustalone wartości, odpowiednio, prądu i napięcia na statycznej charakterystyce łuku; w punkcie początkowym: $I_0 = I_{arc}$, $U_0 = U_{arc}$.

Ponadto, przyjmuje się, że statyczna charakterystyka łuku ma charakter wykładniczy:

$$U(i_{arc}) = U_0 \left(\frac{i_{arc}}{I_0} \right)^n, \quad (5.63)$$

natomiast pomiędzy parametrami modelu (5.61) zachodzi następujący związek:

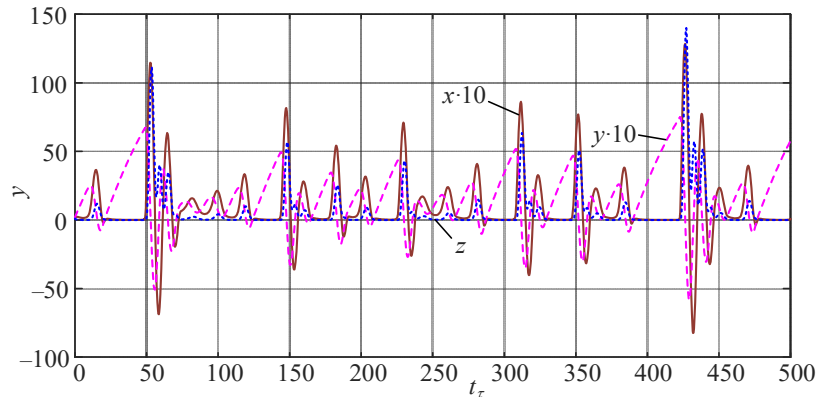
$$e = RI_0 + U_0, \quad (5.64)$$

Uwzględniając (5.62) - (5.64) w (5.61), otrzymamy następujące uogólnione równania modelu obwodu z elektrycznym łukiem spawalniczym:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{L} \left(y - xz^{\frac{n-1}{2}} \right), \\ \dot{y} &= \frac{1}{RC} (1 - y + R(1 - x)), \\ \dot{z} &= x^2 - z, \end{aligned} \quad (5.65)$$

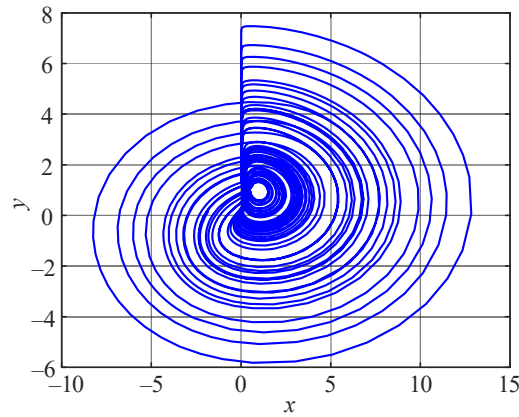
przy czym, różniczkowanie odbywa się względem czasu t_τ (5.62).

Podobnie, jak w rozważanych poprzednio przypadkach, nieliniowy układ trzeciego stopnia określony równaniami (5.65) będzie miał obszary zachowań chaotycznych. Rozważmy stan dynamiczny tego układu dla następujących parametrów: $R = 15$, $L = 1$, $C = 3,405$, $n = -1/3$. Dla wartości początkowych: $(x_0, y_0, z_0) = (0,2; 0,2; 1,0)$ otrzymamy przebiegi w czasie t_τ , jak na rys. 5.45.



Rys. 5.45. Przebiegi składowe x, y, z w obwodzie z modelem łuku spawalniczego

Widać, że mamy do czynienia z dynamiką chaotyczną. Potwierdzają to przebiegi trajektorii fazowych, dla pary zmiennych x, y rozważanego procesu (rys. 5.46).



Rys. 5.46. Trajektorie fazowe składowych x, y w obwodzie z modelem łuku spawalniczego

5.6. Zadania

- 5.1. Korzystając z programu `lorenz_1.m` (patrz Dodatek) wykonać symulacje modelu Lorenza. Sprawdzić wpływ poszczególnych parametrów na dynamikę układu.
- 5.2. Za pomocą programu `duff_1.m` zbadać wpływ poszczególnych parametrów modelu Duffinga na wystąpienie oscylacji chaotycznych. Zbadać warunki stabilności modelu przy braku wymuszenia.
- 5.3. W równaniach Rösslera (5.7) przyjąć stałe wartości parametrów : $a = b = 0,1$, natomiast parametr c zmieniać w zakresie: $c = 4, 6, 8,5, 8,7, 9, 12, 12,8, 13, 18$. Dla każdej z tych wartości wyznaczyć i przeanalizować trajektorie $y = f(x)$ – przebiegi czasowe. Jak zmieniają się częstotliwości generowanych oscylacji? Skorzystać z programu `drossler_1.m`, w którym całkowanie jest zredukowane do sumowania.
- 5.4. Wyjaśnić pojęcie: równanie logistyczne. Jaka jest charakterystyczna cecha takich równań?
- 5.5. Posługując się programem komputerowym przedstawionym w przykładzie 5.3, obliczyć wykładniki Lapunowa dla zmodyfikowanego systemu Rösslera:

$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + ay + w$$

$$\dot{z} = b + xz$$

$$\dot{w} = cw - dz$$

przy następujących parametrach: $a = 0,25$; $b = 3,0$; $c = 0,05$; $d = 0,5$ (hiperchaos).

Uwaga: należy odpowiednio zmienić procedury `rossler_ext.m` oraz `run_ross.m`.

- 5.6. Równania Rösslera występują w kilku modyfikacjach. Posługując się programem komputerowym przedstawionym w przykładzie 5.3, obliczyć wykładniki Lapunowa dla podanych równań systemu Rösslera [30]. Korzystając z programu `drossler_1.m`, wykreślić trajektorie tych systemów.

- a)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x \\ \dot{z} &= ay(1-y) - bz\end{aligned}$$
 z parametrami: $a = 0,386; b = 0,2;$
- b)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b - cz + xz\end{aligned}$$
 z parametrami: $a = 0,2; b = 0,2; c = 5,7;$
- c)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= bx - cz + xz\end{aligned}$$
 z parametrami: $a = 0,36; b = 0,4; c = 4,5;$

- 5.7. Powtórzyć symulacje stanów dynamicznych z przykładu 5.4, po zamianie w odpowiednich programach procedury całkowania *ode23s* na bardziej dokładną *ode45*. Porównać otrzymane wyniki.
- 5.8. Opracować model Simulink i wykonać badania symulacyjne, jak w przykładzie 5.8, modyfikując równanie modelu Cassiego zgodnie z podejściem zastosowanym w przykładzie 5.9. W tym przypadku równania modelu łuku są następujące:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{u_{arc} i_{arc}}{U_c e^x} - 1 \right), g = e^x, x = \ln g.$$

- 5.9. Korzystając z modelu łuku spawalniczego, przedstawionego w p. 5.5.6 sprawdzić, jak zmienia się dynamika badanego układu w zależności od warunków początkowych.
- 5.10. Posługując się programem komputerowym przedstawionym w przykładzie 5.3, obliczyć wykładniki Lapunowa dla układu równań stanu (5.65) związanych z modelem łuku spawalniczego. Przyjąć parametry układu i warunki początkowe jak w p. 5.5.6: $R = 15, L = 1, C = 3,405, n = -1/3, (x_0, y_0, z_0) = (0,2; 0,2; 1,0)$.

6. MODELE PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH

6.1. Wprowadzenie

Teoria prawdopodobieństwa (probabilistyka) zajmuje się opisem zdarzeń, które mają charakter losowy (przypadkowy). Pojedyncze zdarzenia są charakteryzowane przez zmienne losowe, które mogą tworzyć odpowiednie zbiory (ciągi zdarzeń losowych). Zmiennym losowym mogą być przyporządkowane wartości rzeczywiste ze zbioru $[0, 1]$, które są ich miarą probabilistyczną (prawdopodobieństwem). Zmienna losowa jest więc funkcją o wartościach rzeczywistych, zdefiniowaną na zbiorze zdarzeń elementarnych Ω .

W bardziej formalnym języku, zdarzenia (procesy) losowe zachodzą w przestrzeni probabilistycznej, która jest definiowana przez określenie następujących trzech zbiorów (trójki prawdopodobieństwa): (Ω, U, P) , gdzie: Ω jest niepustym zbiorem, zwanym przestrzenią zdarzeń elementarnych, U jest podzbiorem Ω , który określa przestrzeń zdarzeń losowych (elementy tego zbioru są zdarzeniami losowymi), P jest zbiorem prawdopodobieństw określonym na U , przy czym, dla dowolnego zdarzenia $A \in U$, zachodzi: $P(A) \geq 0$, a ponadto: $P(\emptyset)=0$, $P(\Omega)=1$, $(\Omega \in U)$ – prawdopodobieństwa zdarzenia pewnego.

Do takich elementarnych pojęć z zakresu teorii prawdopodobieństwa należy *rozkład zmiennej losowej*, co jest funkcją, za pomocą której zmiennej losowej ze zbioru zdarzeń elementarnych, przyporządkowane jest określone prawdopodobieństwo. Na przykład, w przypadku pojedynczego rzutu monetą, przestrzeń zdarzeń elementarnych jest utworzona przez dwa zdarzenia: orzeł oraz reszka: $\Omega = \{\text{orzeł}, \text{reszka}\}$. W przypadku ‘uczciwej’ monety otrzymujemy następujący rozkład: $P(\text{orzeł}) = 0,5$; $P(\text{reszka}) = 0,5$. W przypadku pojedynczego rzutu kostką mamy: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oraz: $P(i) = 1/6$, $i = 1, 2, \dots, 6$. W podanych przykładach zmienna losowa tworzy zbiór policzalny, co jest charakterystyczne dla *dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa*. W przypadku *rozkładu ciągłego*, zmienna losowa może przyjąć dowolne wartości z określonego przedziału zdefiniowanego przez przestrzeń zdarzeń elementarnych. Na przykład, jeśli definiowany jest rozkład prawdopodobieństwa nagrzania pomieszczenia (co wyraża się wartością mierzonej temperatury), to przestrzeń zdarzeń elementarnych może być ciągła (ciągłe wskazania termometru) lub dyskretna (dyskretnie wartości wskazań termometru).

W przypadku, gdy zbiór zdarzeń losowych jest uporządkowany względem czasu (zdarzenia są funkcją czasu, co definiuje proces zachodzący w czasie), to mamy do czynienia z procesem stochastycznym. Innymi słowy, proces stochastyczny jest zbiorem $\{\mathbf{X}(t)|t \geq 0\}$, gdzie $\mathbf{X}(t)$ jest wektorem zdarzeń zachodzących w czasie. Dla każdej zmiennej $\omega \in \Omega$, funkcja $\mathbf{X}(t, \omega)$ określa zbiór związany z procesem stochastycznym odnoszącym się do zdarzeń zdefiniowanych przez zmienną ω . Mamy tu do czynienia z procesem losowym, więc każda jego realizacja będzie definiowała inny zbiór $\mathbf{X}(t, \omega)$.

Teoria prawdopodobieństwa i procesy stochastyczne służą do opisu i reprezentacji niepewności lub niejednoznaczności. Podejście probabilistyczne nie jest w technice łatwo akceptowane, gdyż inżynier jest przywykły do jednoznacznych ocen i opisów konstrukcji, czy zjawisk. Z drugiej jednak strony wiemy, że idealny opis rzeczywistości zgodny z paradygmatem deterministycznym, w realnym świecie nie występuje: świat idealny, zgodny z zależnościami matematycznymi, ma miejsce tylko w naszej wyobraźni (świat platońskich idei). Ta dychotomia: prostota opisu i zagmatwana rzeczywistość, prowadzi nas do różnych prób poszukiwania bardziej adekwatnego, a jednocześnie prostego jej opisu. Jednym ze sposobów są właśnie modele probabilistyczne.

6.2. Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Poniżej wyjaśnione są podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa dla ciągłych i dyskretnych rozkładów. Rozkład dyskretny odnosi się do przypadku, gdy zdarzenia są policzalne, a ich liczba jest skończona, na przykład: liczba rzutów kostką, liczba wyników meczy itp.

Rozkład prawdopodobieństwa (rozkład zmiennej losowej) $P(A)$ jest miarą, pozwalającą przypisać prawdopodobieństwo zmiennej losowej lub zbiorom tej zmiennej według reguł określonych w A . Każdej zmiennej losowej można przypisać prawdopodobieństwo jej wystąpienia. W przypadku dyskretnej zmiennej losowej x , definicja prawdopodobieństwa jest intuicyjna:

$$P_{x_k} = P(X = x_k) = f(x_k) = \frac{f_k}{N} = \frac{f_k}{\sum_{j=1}^n f_j} \quad (6.1)$$

gdzie f_k jest liczbą przypadków wystąpienia wartości x_k , natomiast N jest sumą wszystkich możliwych prób.

Zapis (6.1) można rozszerzyć na odpowiedni zbiór wartości dyskretnych, na przykład:

$$P(6 \leq X < 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8).$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ jest funkcją rzeczywistą określającą prawdopodobieństwo wystąpienia określonego zdarzenia ze zbioru B (ang.: *Probability Density Function* – $pdf(B)$):

$$P(B) = \int_B f(x) dx \quad (6.2)$$

Na przykład: $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$. W szczególności, jeśli B pokrywa całą przestrzeń zdarzeń, to: $\int_B f(x) dx = 1$.

W przypadku dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa, funkcja $f(x)$, gdzie x przyjmuje konkretną wartość z przestrzeni zdarzeń X , określa szansę (prawdopodobieństwo) przyjęcia przez zmienną losową X konkretnej wartości x . (ang.: *Probability Mass Function*, $pmf(x)$).

Dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa $F(x)$ jest prawdopodobieństwem przyjęcia przez zmienną losową X wartości mniejszej od x :

$$F(x) = P(X < x) \quad (6.3)$$

gdzie $P(X < x)$ oznacza prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmuje wartość mniejszą od x (ang.: *Cumulative Distribution Function* – $cdf(x)$).

Inaczej mówiąc, dystrybuanta określa szansę przyjęcia przez zmienną losową X wartości mniejszej od x . W przypadku dyskretnej zmiennej losowej, $P(X < x)$ oblicza się przez sumowanie wszystkich prawdopodobieństw $P(X = x_k)$ dla $x_k < x$:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k) \quad (6.4)$$

gdzie
$$P(X = x_k) = p_k \quad (6.5)$$

jest funkcją prawdopodobieństwa zmiennej losowej X oznaczającą prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmie wartość x_k (dla zmiennych losowych dyskretnych).

Jeśli k w (6.4) wyczerpuje wszystkie wartości zmiennej dyskretnej, to:

$$\sum_{x_k} P(X = x_k) = \sum_{x_k} p_k = 1 \quad (6.6)$$

Dla zmiennej losowej ciągłej zachodzi relacja:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (6.7)$$

i odwrotnie:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \dot{F}(x) \quad (6.8)$$

Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą.

Na podstawie (6.7) można napisać:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1) \quad (6.9)$$

co jest równoważne obliczeniu całki oznaczonej z gęstości prawdopodobieństwa w przedziale $[x_1, x_2]$:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \quad (6.10)$$

Przykład 6.1. Określić rozkład zmiennej losowej, która przyjmuje wartości równe sumie oczek w dwukrotnym rzucie kostką. Wykreślić dystrybuantę tej zmiennej. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(7 < X \leq 12)$.

Prawdopodobieństwo uzyskania dowolnej wartości 1..6 w pojedynczym rzucie kostką wynosi 1/6. Zbiór wartości uzyskanych w dwóch rzutach kostką jest następujący: $A = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$. Łatwo określić prawdopodobieństwo uzyskania każdego z elementów tego zbioru:

$P(X=2) = (1/6)(1/6) = 1/36 = pmf(2) \rightarrow$ w obu rzutach muszą wystąpić jedynki: (1, 1);

$P(X=3) = (1/6)(1/6) + (1/6)(1/6) = 2/36 \rightarrow (1, 2) \vee (2, 1)$;

$P(X=4) = 3(1/6)(1/6) = 3/36 \rightarrow (1, 3) \vee (3, 1) \vee (2, 2)$;

$P(X=5) = 4(1/6)(1/6) = 4/36 \rightarrow (1, 4) \vee (4, 1) \vee (2, 3) \vee (3, 2)$;

$P(X=6) = 5(1/6)(1/6) = 5/36 \rightarrow (2, 4) \vee (4, 2) \vee (3, 3) \vee (5, 1) \vee (1, 5)$;

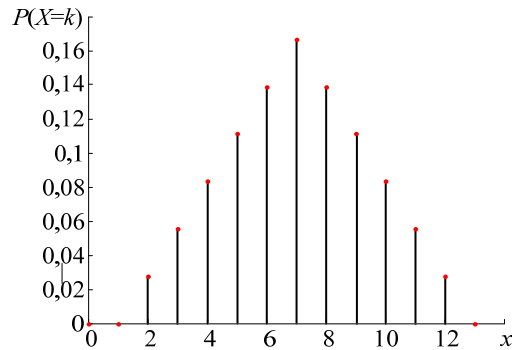
$P(X=7) = 6(1/6)(1/6) = 6/36 \rightarrow (3, 4) \vee (4, 3) \vee (2, 5) \vee (5, 2) \vee (1, 6) \vee (6, 1)$;

$P(X=8) = 5(1/6)(1/6) = 5/36 \rightarrow (2, 6) \vee (6, 2) \vee (3, 5) \vee (5, 3) \vee (4, 4)$;

i podobnie:

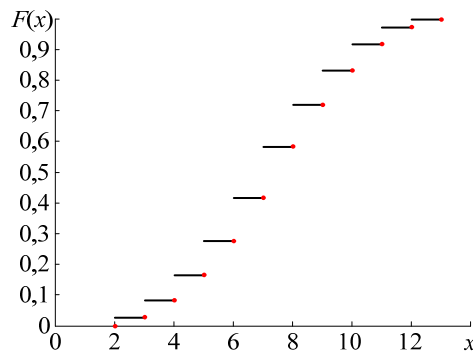
$P(X=9) = 4/36, P(X=10) = 3/36, P(X=11) = 2/36, P(X=12) = 1/36$.

Uzyskany rozkład prawdopodobieństwa jest pokazany na rys. 6.1, natomiast jej dystrybuanta ma postać, jak na rys. 6.2.



Rys. 6.1. Rozkład prawdopodobieństwa analizowanej zmiennej (pwf)

Rozkład prawdopodobieństwa jest symetryczny względem punktu $x = 7$, natomiast dystrybuanta zmierza do wartości $F(x) = 1$ w miarę wzrostu wartości zmiennej x .



Rys. 6.2. Dystrybuanta analizowanej zmiennej losowej

Prawdopodobieństwo $P(7 < X \leq 12)$ jest sumą prawdopodobieństw dla poszczególnych zmiennych ze zdefiniowanego przedziału:

$$P(7 < X \leq 12) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) \\ = 5/36 + 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36 = 15/36.$$

Wartość oczekiwana $E(X)$ zmiennej losowej X jest wartością średnią z n zmiennych x_i , $i = 1..n$, z których każda występuje z prawdopodobieństwem p_i :

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (6.11)$$

W przypadku ciągłym, wartość oczekiwana jest obliczana następująco:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \quad (6.12)$$

Wariancja $D^2(X)$:

$$D^2(X) = \sigma^2 = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (6.13)$$

Odchylenie standardowe $D(X) = \sigma$ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

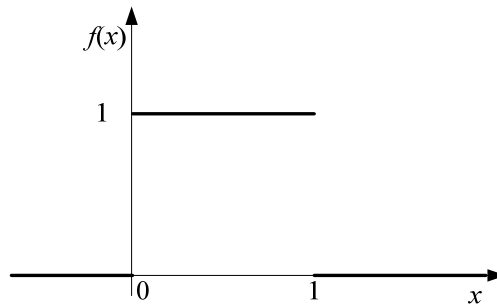
Moment rzędu l ($l = 1, 2, \dots$) zmiennej losowej X względem liczby c jest określany następująco:

$$\mu'_l = \begin{cases} \sum_k (x_k - c)^l p_k & \text{dla zmiennej losowej dyskretnej} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^l f(x)dx & \text{dla zmiennej losowej ciągłej} \end{cases} \quad (6.14)$$

Jeśli $c = 0$, to mówimy o momencie zwykłym. Moment zwykły pierwszego rzędu jest wartością średnią ((6.11) lub (6.12)). W przypadku, gdy $c = 1$, to mamy do czynienia z momentem centralnym rzędu l . Moment centralny rzędu drugiego jest wariancją, a pierwiastek z niego jest odchyleniem standardowym.

Rozkład równomierny (jednostajny). Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ w rozkładzie równomiernym na odcinku $[0, 1]$ jest równa (rys. 6.3):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (6.15)$$



Rys. 6.3. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu równomiernego

W przypadku dyskretnym, prawdopodobieństwo wylosowania każdej z wartości, przyjmowanych przez zmienną losową, jest jednakowe. W takim przypadku, zmienna

x przyjmuje wartości całkowite w zdefiniowanym przedziale. Przykładem jest rozkład wyników rzutu jedną kostką: każdy z sześciu wyników ma to samo prawdopodobieństwo, równe $1/6$.

W ogólnym przypadku, gdy zmienna losowa jest zdefiniowana w przedziale $[a, b]$, funkcja gęstości (6.15) jest określana następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (6.16)$$

natomiast dystrybuenta ma następującą postać:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)/(b-a) & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases} \quad (6.17)$$

Rozkład dwumianowy (Bernoulliego, *ang. binomial distribution*) opisuje liczbę sukcesów k w N niezależnych próbach, z których każda ma to samo prawdopodobieństwo sukcesu p .

Jeśli zmienna losowa X zostanie zdefiniowana, jako suma N zmiennych losowych:

$$X = \sum_{i=1}^N X_i,$$

z których każda może przyjąć wartość 1 z prawdopodobieństwem p albo wartość 0 z prawdopodobieństwem $1-p$, to zmienna X może przyjąć każdą wartość całkowitą z przedziału $\langle 0, N \rangle$, przy czym prawdopodobieństwo, że k spośród N zmiennych X_i przyjmie wartość 1, wynosi:

$$f_X(x) = P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad k = 0, 1, \dots, N; x = k, \quad (6.18)$$

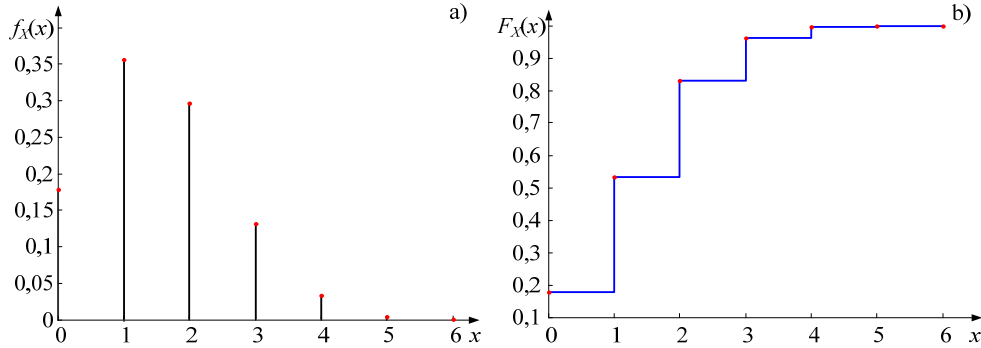
gdzie $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$.

Jest to także funkcja gęstości prawdopodobieństwa, przy założeniu, że $x = k$.

Podobnie można wyznaczyć dystrybuentę zmiennej losowej X o rozkładzie dwumianowym:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad x = k \quad (6.19)$$

Na poniższych rysunkach (rys. 6.4a,b) są pokazane funkcje gęstości prawdopodobieństwa rozkładu dwumianowego dla $N = 6$ oraz $p = 0,25$.



Rys. 6.4. Gęstość prawdopodobieństwa (a) oraz dystrybuanta (b) rozkładu dwumianowego;
 $N = 6, p = 0,25$

Wartość oczekiwana (średnia) może być obliczona następująco:

$$E_X = N \cdot p \quad (6.20)$$

Rozkład Poissona jest pewnym rozszerzeniem rozkładu dwumianowego. Zmienną losową definiuje się przy założeniu, że wartość $\lambda = N p > 0$ jest stała, natomiast N dąży do nieskończoności. Prawdopodobieństwo przyjęcia przez tę zmienną wartości k ($pmf(k)$) jest określone za pomocą wzoru Poissona:

$$f_X(x) = P(X = k) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(X_N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.21)$$

Widać, że wartość $x = k$, którą może przyjmować zmienna losowa, jest dowolną całkowitą liczbą nieujemną. Zauważmy także, że podobnie, jak w rozkładzie dwumianowym, parametr λ jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej (średnią liczbą zdarzeń w jednostce czasu).

Dystrybuanta jest określana następująco:

$$F_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}, x = k \quad (6.22)$$

Rozkład Poissona ma szerokie zastosowanie do modelowania różnych zdarzeń, które mają charakter policzalny: liczba nieprawidłowych produktów, liczba rozmów telefonicznych prowadzonych w określonej jednostce czasu, liczba wypromieniowanych cząstek w jednostce czasu i innych. W takim przypadku zmienna x we wzorach (6.21), (6.22) ma znaczenie liczby zdarzeń zachodzących w założonej jednostce czasu.

Rozkład wykładniczy charakteryzuje się następującą funkcją gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0 \quad (6.23)$$

oraz dystrybuantą:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (6.24)$$

Rozkład ten dobrze się nadaje do modelowania zgłoszeń telefonicznych lub oceny niezawodności. Jeśli zmienna x reprezentuje czas, to rozkład ten opisuje prawdopodobieństwo przejścia układu z jednego z dwóch możliwych stanów w drugi w określonym czasie. Jak widać, rozkład zależy tylko od jednego parametru λ , który opisuje odstęp czasu pomiędzy kolejnymi zdarzeniami. Tym samym, wielkość $1/\lambda$ oznacza liczbę niezależnych zdarzeń, które mają zajść w jednostce czasu. Jest to także wartość oczekiwana: $E_X(x) = 1/\lambda$.

Przykład 6.2. Czas oczekiwania na połączenie telefoniczne jest zmienną losową X o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną 10 s. Określić, jakie jest prawdopodobieństwo, że telefonująca osoba będzie czekała na połączenie nie krócej niż 5 s i nie dłużej niż 10 s.

Określamy parametr λ rozkładu. Wartość oczekiwana wynosi: $E_X(x) = 1/\lambda = 10$, skąd: $\lambda = 0,1$. Na podstawie (6.10), otrzymamy:

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 10) &= F(10) - F(5) = (1 - e^{-\lambda x_2}) - (1 - e^{-\lambda x_1}) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2} = e^{-0,1 \cdot 5} - e^{-0,1 \cdot 10} \\ &= e^{-0,5} - e^{-1} = 0,239. \end{aligned}$$

Rozkład Erlanga jest szczególnie przydatny do reprezentacji zdarzeń (na przykład, liczby rozmów telefonicznych), realizowanych w określonej jednostce czasu. Wywodzi się on z rozkładu wykładniczego. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest określana następująco ($x > 0$):

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, \quad (6.25)$$

a dystrybuantą:

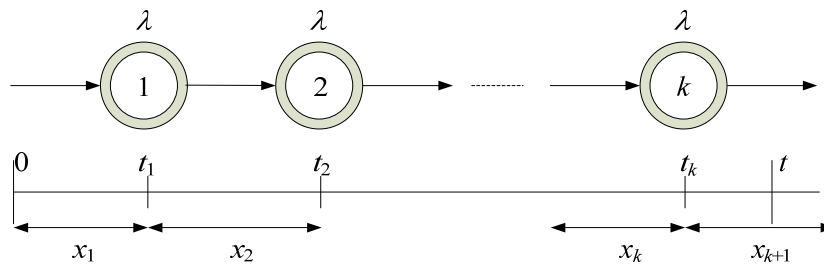
$$F_X(x) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!}, \quad (6.26)$$

gdzie: $k=m$ – liczba naturalna (parametr kształtu), $\lambda > 0$ – parametr skali.

Wartość oczekiwana:

$$E_X(x) = \frac{k}{\lambda} \quad (6.27)$$

Rozkład Erlanga jest pewną wersją rozkładu gamma [14]. Jest on stosowany do sytuacji, gdy analizowany proces jest podzielony na szereg k kolejno realizowanych faz i każda faza ma cechy rozkładu wykładniczego z wartością oczekiwaną $1/\lambda$ (rys. 6.5).



Rys. 6.5. Realizacja procesu Erlanga

Dla dużej wartości k , rozkład Erlanga zbliża się do właściwości rozkładu normalnego. Jest on często stosowany do reprezentowania czasu potrzebnego do wykonania wieloetapowego zadania. Ilustracja z rys. 6.5 może dotyczyć kolejki, w której pojawiają się klienci średnio co $1/\lambda$ czasu, lub wieloetapowego systemu obsługi, gdzie średni czas obsługi na każdym etapie wynosi $1/\lambda$.

Typowy rozkład Erlanga k -tego rzędu może być zilustrowany następującym przykładem (rys. 6.5):

- niech n oznacza zdarzenie, które zachodzi w czasie t_n ;
- niech zmienne losowe x_1, x_2, \dots, x_k oznaczają odcinki czasu pomiędzy kolejnymi zdarzeniami; zakładamy, że są to zmienne losowe o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ ;
- niech N oznacza liczbę zdarzeń w czasie t ; jest to zmienna losowa o rozkładzie Poissona;

W takim przypadku, do czasu t_k zajdzie k zdarzeń:

$$t_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

Zmienna losowa t_k ma rozkład Erlanga k -tego rzędu z parametrem λ . Prawdopodobieństwo, że w czasie t zajdzie k zdarzeń jest określone przez funkcję (6.26).

6.3. Generowanie liczb losowych

Generowanie liczb losowych o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa jest w systemie komputerowym zadaniem trudnym, gdyż nie można w tym celu korzystać z rutynowo wykonywanych algorytmów, które, siłą rzeczy powtarzają założone czynności. W takim przypadku należy się odwoływać do losowych zjawisk fizycznych, które występują poza algorytmiczną strukturą komputera. Uproszczone podejście do tworzenia przydatnych niby-losowych ciągów liczbowych polega na korzystaniu z itera-

cyjnych algorytmów generacji liczb pseudolosowych. Bazą do generacji liczb pseudolosowych o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa jest zazwyczaj ciąg takich liczb: $\{u_1, u_2, \dots\}$ o rozkładzie równomiernym w przedziale $[0, 1]$.

Generowanie liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym. Stosuje się w tym celu algorytmy liniowe lub nieliniowe. Przykłady algorytmów liniowych:

$$\begin{aligned} x_n &= (1176x_{n-1} + 1476x_{n-2} + 1776x_{n-3}) \bmod (2^{32} - 5) \\ x_n &= 2^{19}(x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + 1) \bmod (2^{35} - 1629) \end{aligned} \quad (6.28)$$

przy zadanych warunkach początkowych.

Przykłady generatorów nieliniowych:

$$\begin{aligned} x_n &= (a/x_n + b) \bmod m \\ x_n &= (a(n + n_0 + b)^{-1}) \bmod m \end{aligned} \quad (6.29)$$

przy zadanych wartościach parametrów a, b, n, n_0, m .

W przypadku generacji liczb pseudolosowych o zadanym rozkładzie, niekiedy można bezpośrednio korzystać z definicji rozkładu. Na przykład, analiza **rozkładu dwumianowego** o funkcji prawdopodobieństwa (6.18) prowadzi do następującego algorytmu:

1. Wygenerować zbiór N zmiennych pseudolosowych $U = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$.
2. Określić liczbę x elementów tego zbioru, dla których spełniony jest warunek:
 $u_i \leq p$.

W rezultacie, x jest poszukiwaną zmienną pseudolosową o rozkładzie dwumianowym.

Najpopularniejszym sposobem generowania liczb pseudolosowych o zadanym rozkładzie jest metoda odwracania dystrybucji. Jeśli znana jest dystrybucja danego rozkładu, to możemy napisać:

$$F(x_i) = \alpha \rightarrow x_i = F^{-1}(\alpha) \quad (6.30)$$

gdzie: $\alpha = u_i$ jest liczbą pseudolosową o rozkładzie równomiernym, $F^{-1}(\alpha)$ - funkcja odwrotna do $F(x)$.

Metodę tę uzasadnia się następującą relacją:

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(\alpha) \leq x) = P(\alpha \leq F(x)) = F(x) \quad (6.31)$$

W celu korzystania z metody (6.30) należy wyznaczyć funkcję odwrotną do dystrybucji, co niekiedy nie da się przeprowadzić dokładnie.

W przypadku **rozkładu wykładniczego**, funkcja odwrotna do dystrybucji (6.24) dana jest równaniem:

$$x_i = F^{-1}(u_i) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u_i) \quad (6.32)$$

Przykład 6.3. Na rys. 6.4a jest pokazana funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu dwumianowego dla $N = 6$ oraz $p = 0,25$. Opracować program do generacji liczb losowych według tego rozkładu dla tych samych parametrów. Wygenerować dużą liczbę zmiennych losowych i na ich podstawie przeprowadzić estymację funkcji gęstości.

Program do generacji zmiennych losowych według rozkładu dwumianowego został opracowany w programie Matlab zgodnie z podanym algorytmem. Program ten jest zamieszczony poniżej.

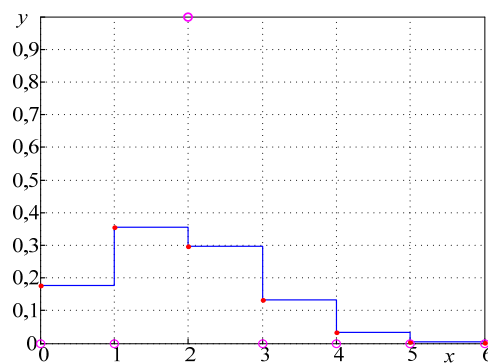
```
% Generator pseudolosowy: rozkład dwumianowy
% % liczba punktów i prawdopodobieństwo
N = 6;
p=0.25;
m=500;

for k=1:m,
    U=rand(N,1);
    xu=find(U<=p);
    x1(k)=size(xu,1);
end;

for k=0:N,
    d=find(x1==k);
    if isempty(d), y(k+1)=0; else y(k+1)=size(d,2); end
end;
y=y/m; % estymata gęstości prawdopodobieństwa
% porównanie funkcji gęstości i jej estymaty
x=[0 1 2 3 4 5 6];
P=[0.1780 0.3560 0.2966 0.1318 0.0330 0.0044 0.0002];

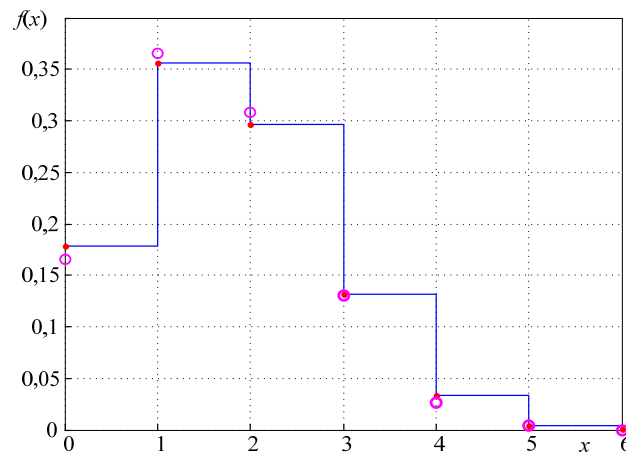
hold on;
stairs(x,P,'b-'); grid;
plot(x,P,'r. '); grid;
plot(x,y,'mo'); grid;
```

Do generacji pojedynczej zmiennej należy przyjąć wartość $m = 1$. Zmienna ta jest w programie dostępna, jako $x1(1)$, co na uzyskanym wykresie oznacza wartość na osi $0x$, dla której wartość $y = 1$ (zaznaczone kółkiem) – rys. 6.6.



Rys. 6.6. Generacja pojedynczej liczby losowej (wartość $x = 2$)

Na rys. 6.7 jest pokazana funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu dwumianowego oraz jej estymata uzyskana w powyższym programie w wyniku generacji $m = 500$ liczb losowych odpowiadających temu rozkładowi. W tym przypadku określana jest wartość średnia zmiennej y (na rys. rys. 6.7 jest ona oznaczona kółkiem).



Rys. 6.7. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa i jej estymata (kółka)

Znajomość funkcji (6.32) może posłużyć do generacji liczb pseudolosowych według dyskretnego **rozkładu Poissona**. W tym przypadku, pojedyncza liczba losowa x_i jest równa liczbie wartości rozkładu wykładniczego o średniej równej 1, które dodane razem przekraczają wartość oczekiwaną rozkładu Poissona λ . Stąd powstaje następujący algorytm:

1. $\text{sum} = 0; j = -1;$ % warunki początkowe
2. **while** ($\text{sum} \leq \lambda$),
3. $y = u_i; z = -\ln(1-y);$
4. $\text{sum} = \text{sum} + z;$
5. $j = j + 1;$
6. **endwhile**;

Wartość j jest generowaną zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Zauważmy, że w kroku 3 zmienna z przyjmuje wartość losową według rozkładu wykładniczego (6.32) o wartości oczekiwanej (średniej) równej 1.

Przykład 6.4. Utworzyć program do generacji liczb losowych o rozkładzie Poissona dla $\lambda=5$, według podanego algorytmu.

Program do generacji zmiennych losowych według rozkładu Poissona został opracowany w programie Matlab zgodnie z podanym algorytmem. Program ten jest zamieszczony poniżej. Znakami % oznaczona jest część programu związana z generowaniem liczby losowej według rozkładu Poissona.

```

% Generator pseudolosowy: rozkład Poissona
% liczba punktów i prawdopodobieństwo
lambda=5;
m=500;
%m=1;
N=15;

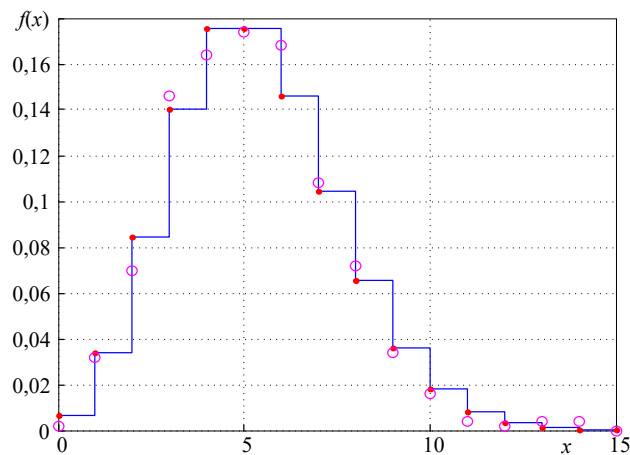
for k=1:m,
    sum=0;
    j=-1;
    while (sum<=lambda),
        u=rand(1,1);
        z=-log(1-u);
        sum=sum+z;
        j=j+1;
    end;
    x1(k)=j;
end;

for l=0:N,
    d=find(x1==l);
    if isempty(d), y(l+1)=0; else y(l+1)=size(d,2); end
end;
y=y/m; % estymata gęstości prawdopodobieństwa
% porównanie funkcji gęstości i jej estymaty
x=0:N;
P=exp(-lambda)*(lambda.^x)./factorial(x); % funkcja gęstości dla N=15

hold on;
stairs(x,P,'b-'); grid;
plot(x,P,'r. '); grid;
plot(x,y,'mo '); grid;

```

Pojedyncza liczba losowa jest generowana dla parametru $m = 1$, natomiast przyjmując, na przykład $m = 500$, można uzyskać estymatę funkcji gęstości prawdopodobieństwa (rys. 6.8). Jest ona porównywana graficznie z dokładnymi wartościami tej funkcji, uzyskanymi zgodnie z (6.21).



Rys. 6.8. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa i jej estymata (kółka) – rozkład Poissona

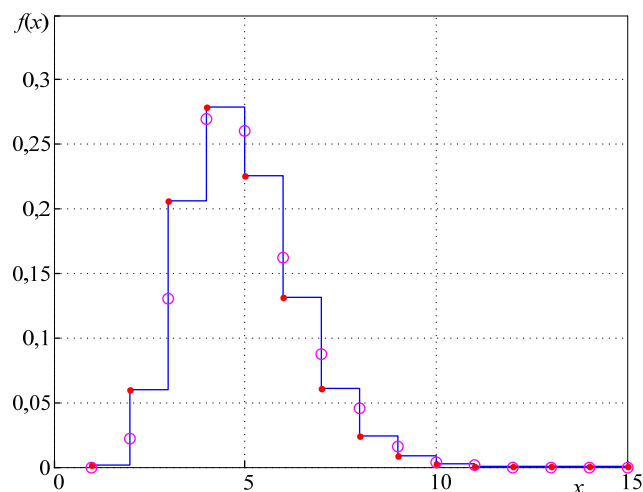
W przypadku **rozkładu Erlanga**, pseudolosowe liczby mogą być generowane na podstawie pseudolosowych liczb uzyskanych dla rozkładu równomiernego według następującej relacji:

$$x_n = F^{-1}(u_n) \approx -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\prod_{i=1}^k u_i\right) \quad (6.33)$$

Przykład 6.5. Utworzyć program do generacji liczb losowych o rozkładzie Erlanga dla procesu 9-tego rzędu ze współczynnikiem $\lambda=2$, według zależności (6.33).

Poniższy program do generacji zmiennych losowych według rozkładu Erlanga z podanymi parametrami został opracowany w programie Matlab.

Na rys. 6.9 jest pokazana funkcja gęstości prawdopodobieństwa utworzona na podstawie (6.25) oraz jej estymata uzyskana na podstawie uśrednionych wartości liczb pseudolosowych, generowanych zgodnie z (6.33).



Rys. 6.9. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa i jej estymata (kółka) – rozkład Erlanga

```
% Generator pseudolosowy: rozkład Erlanga
%
% liczba punktów i prawdopodobieństwo
lambda=2;
m=500;
N=15;
k=9;      % rząd rozkładu

y(1:N)=0;
for j=1:m,
    u=rand(k,1);    % zmienne pseudolosowe
    x=1;
```

```

for i=1:k,
    x=x*u(i,1);
end;
x=-log(x)/lambda;      % kolejna liczba pseudolosowa
l=ceil(x);
y(l)=y(l)+1;
end;

y=y/m; % estymata gęstości prawdopodobieństwa

% porównanie funkcji gęstości i jej estymaty
x=1:N;
P=exp(-lambda*x)*(lambda^k).*x.^(k-1)./factorial(k-1);

hold on;
stairs(x,P,'b-'); grid;
plot(x,P,'r. '); grid;
plot(x,y,'mo'); grid;

```

Różne systemy obliczeniowe, jak Matlab, Excel i inne, mają gotowe instrukcje do generacji liczb pseudolosowych o typowych rozkładach prawdopodobieństwa. W bloku *toolbox STATS* programu Matlab zawarta jest bogata biblioteka takich funkcji.

6.4. Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo (MC) została opracowana, jako narzędzie numeryczne do estymacji różnych parametrów procesów stochastycznych (np. wartości oczekiwanej) na podstawie ich realizacji w warunkach rzeczywistych lub symulowanych [28]. Jej powstanie łączy się ze znanym projektem *Manhattan* podczas II-giej Wojny Światowej, związanym z budową bomby jądrowej. Pomysł tej metody wiąże się z polskim matematykiem Stanisławem Ulamem, który pracował w projekcie [49].

Metoda MC jest zazwyczaj ilustrowana przykładami związanymi z obliczaniem całek oznaczonych. Załóżmy, że należy oszacować wartość całki funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, b]$, co zapisujemy następująco:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (6.34)$$

Wartość całki jest równa polu wyznaczonemu przez funkcję $f(x)$, co można także obliczyć, jako pole pod wartością średnią tej funkcji w granicach całkowania (rys. 6.10), a zatem:

$$\bar{f}_{ab} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \quad (6.35)$$

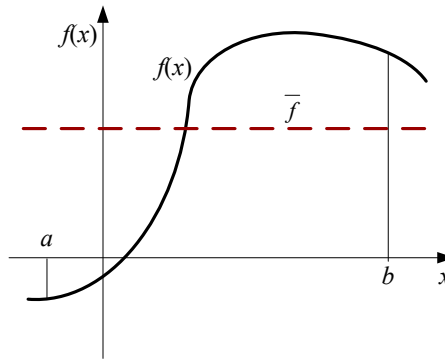
$$S = (b - a) \bar{f}_{ab} \quad (6.36)$$

Wartość średnią można estymować statystycznie przez wyznaczenie wartości funkcji $f(x)$ w N punktach wybranych według rozkładu równomiernego:

$$\hat{f}_{ab} = \frac{\sum_{n=1}^N f(x_n)}{N}, \quad (6.37)$$

co pozwala oszacować wartość obliczanej całki:

$$\hat{S} = (b - a) \frac{\sum_{n=1}^N f(x_n)}{N} \quad (6.38)$$



Rys. 6.10. Ilustracja sposobu obliczania całki oznaczonej

Stosując do obliczeń standardowe procedury należy zauważyć, że zazwyczaj funkcja przeznaczona do generacji liczb pseudolosowych wyznacza te liczby w przedziale $[0, 1]$. Należy więc przeskalować otrzymany zbiór liczb pseudolosowych do przedziału określonego przez granice całkowania. W odniesieniu do przykładu z rys. 6.10 można zastosować następującą procedurę:

$$\mathbf{x} = a + (b - a)\mathbf{x}_0, \quad (6.39)$$

gdzie \mathbf{x}_0 jest wektorem liczb pseudolosowych w przedziale $[0, 1]$.

Przykład 6.6. Stosując metodę MC obliczyć wartość podanej całki

$$S = \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^1 x e^x dx$$

W obliczeniach będziemy się posługiwać programem Matlab. Ustalamy liczbę generowanych punktów $N = 100$. Losowe wartości w przedziale $[-2, 1]$ o rozkładzie równomiernym są ustalane następująco:

```
x = a + (b-a).*rand(N,1);
```

gdzie: $a = -2$, $b = 1$.

W powyższej instrukcji x jest wektorem zawierającym argumenty funkcji podcałkowej:

$$f(x) = xe^x$$

Pełny tekst programu jest następujący:

```
% Obliczanie całki metodą Monte Carlo 1
%
% przedzial:
a = -2;
b = 1;

% liczba punktów
N = 100;
x = a + (b-a).*rand(N,1);

% funkcja
f=x.*exp(x);
% srednia
sr=mean(f);

S=(b-a)*sr,

plot(x,f,'b. ');
line([a b],[sr sr]);
grid;

% rzeczywista wartosc:
S1=(b-1)*exp(b)-(a-1)*exp(a),
```

W wierszach:

```
% funkcja
f=x.*exp(x);
% srednia
sr=mean(f);
```

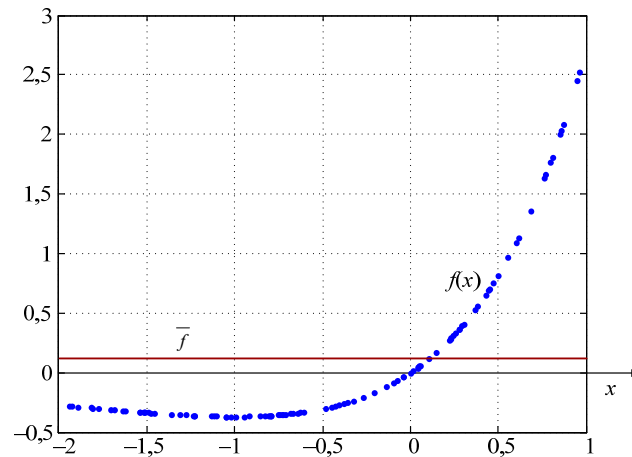
określane są wartości funkcji podcałkowej dla argumentów z wektora x oraz obliczana jest wartość średnia. Wyniki tej części programu są pokazane na rys. 6.11.

W wyniku obliczeń otrzymujemy estymatę całki $S = 0,343329818074488$, podczas, gdy dokładna wartość wynosi: $S_r = 0,406005849709838$.

W zależności od formy dostępnych danych, zadanie to może być modyfikowane. Na przykład, zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest dostępna w regularnych odstępach, natomiast jej wartości są losowe i spełniają rozkład normalny z odchyleniem standardowym równym $\sigma = 0,1$. Funkcja podcałkowa będzie wówczas określona następująco:

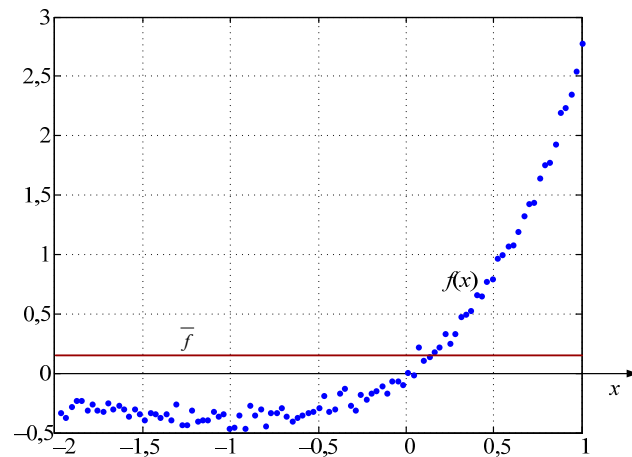
$$f(x) = f_p(x) + 0,05 \text{ randn}(x),$$

gdzie: $f_p(x) = xe^x$, $\text{randn}(x)$ – funkcja generująca liczby losowe o rozkładzie normalnym w liczbie, określonej przez wektor x .



Rys. 6.11. Przebieg funkcji podcałkowej na podstawie losowych argumentów

Przebieg uzyskanej funkcji jest pokazany na rys. 6.12.



Rys. 6.12. Przebieg funkcji podcałkowej o losowych wartościach

W wyniku obliczeń otrzymujemy estymatę całki $S = 0,436051697513460$. Tekst programu jest zamieszczony poniżej.

```
% Obliczanie całki metodą Monte Carlo
%
% przedział:
a = -2;
b = 1;
```

```
% liczba punktów
N = 100;
sigm=0.05;
dN=(b-a)/N;
x=0:N;
xa=a+x*dN;
% funkcja
f=xa.*exp(xa);
fa=f+sigm.*randn(1,N+1);

% srednia
sr=mean(fa);

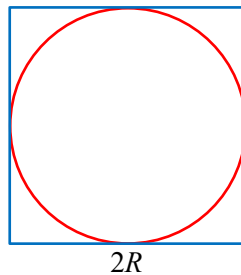
S=(b-a)*sr,
plot(xa,fa,'b. ');
line([a b],[sr sr]);
grid;

% rzeczywista wartosc:
S1=(b-1)*exp(b)-(a-1)*exp(a),
```

Zauważmy, że dokładność estymacji zależy od rodzaju funkcji podcałkowej. Gwałtowne zmiany funkcji (także na granicach przedziału) nie sprzyjają jakości estymacji.

Przykład 6.7. Stosując metodę MC obliczyć wartość liczby π . Wykorzystać relację pomiędzy polem okręgu i polem wpisanego w okrąg kwadratu.

Ilustracja tego problemu jest pokazana na rys. 6.13.



Rys. 6.13. Przebieg funkcji podcałkowej o losowych wartościach

Porównując pola obu figur, otrzymamy:

$$p = \frac{S_k}{S_o} = \frac{4R^2}{\pi R^2} = \frac{4}{\pi} \quad (\text{niezależnie od długości promienia}), \text{ skąd:}$$

$$\pi = \frac{4}{p} = 4 \frac{S_o}{S_k} = 4 \frac{(S_k - S_{no})}{S_k} = 4 \left(1 - \frac{S_{no}}{S_k} \right)$$

gdzie: S_o – pole okręgu; S_k – pole kwadratu; S_{no} jest polem obszaru między kwadratem i okręgiem.

Do estymacji tej wartości metodą MC można zaproponować następujący schemat postępowania.

1. Generujemy N par niezależnych liczb losowych x_i, y_i w przedziale $[-1, 1]$ o rozkładzie równomiernym, które traktujemy jako współrzędne punktów leżących w kwadracie o boku $2R$.
2. Liczymy liczbę punktów leżących poza okręgiem. Są to te spośród wygenerowanych punktów, które spełniają warunek:

$$x_i^2 + y_i^2 > 1, i = 1, 2, \dots, N$$

Tekst programu w kodzie Matlab jest następujący:

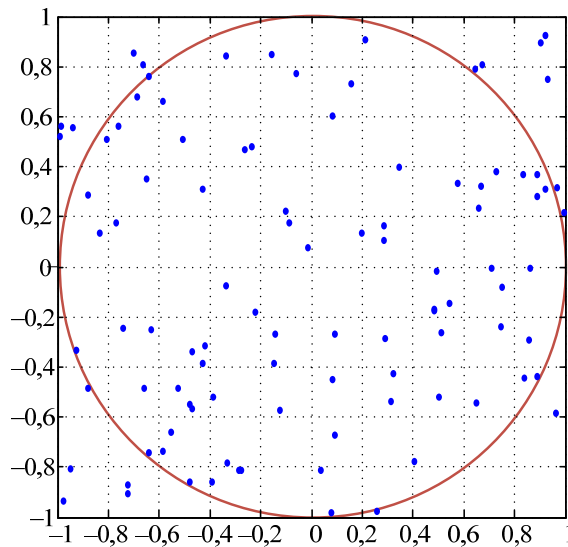
```
% Obliczanie liczby pi metodą Monte Carlo
%
% liczba punktów
N = 100;

% generacja liczb pseudolosowych
x = -1+2*rand(N,1);
y = -1+2*rand(N,1);
x1=x.*x+y.*y;

% warunek
kx=find(x1>1);
p=size(kx,1);
e_pi=4*(1-p/N);

plot(x,y,'b. '); grid;
```

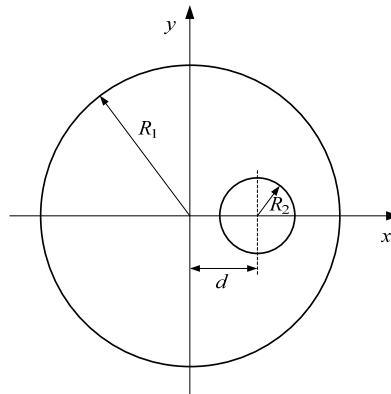
Na rys. 6.14 pokazane jest rozmieszczenie punktów uzyskane po uruchomieniu programu. Przy liczbie punktów $N = 100$ uzyskano przybliżenie liczby $\pi \approx 3,24$. Wynik ten w dużym stopniu zależy od liczby punktów: dla $N = 10000$ można otrzymać $\pi \approx 3,1468$.



Rys. 6.14. Ilustracja do programu estymacji liczby π

Kolejny przykład ilustruje bardziej praktyczny problem.

Przykład 6.8. Stosując metodę MC obliczyć masę, środek ciężkości oraz moment inercji krążka z otworem, jak na rys. 6.15. Przyjąć następujące parametry badanego obiektu: $R_1 = 1$, $R_2 = 0,2$, $d = 0,5$, $\rho = 1$ (gęstość materiału).



Rys. 6.15. Widok badanego krążka

Żądane w zadaniu wielkości są definiowane następująco (przyjmuje się, że gęstość materiału krążka może być niejednorodna):

- masa krążka: $M = \iint_S \rho(x, y) dx dy$,

- środek ciężkości: $X_0 = \frac{1}{M} \iint_S x \rho(x, y) dx dy$, $Y_0 = \frac{1}{M} \iint_S y \rho(x, y) dx dy$,

- moment bezwładności: $J = \iint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$.

W powyższych wzorach zakłada się, że zmienne x, y wyznaczają współrzędne leżące w materiale krążka o powierzchni S , który obraca się wokół osi Oz .

Przechodząc do dyskretnych postaci powyższych wyrażeń zauważymy, że obszar krążka może być podzielony na N małych elementów, których masa przyjmuje wartość:

$$m_j = \frac{S}{N} \rho(x_j, y_j) \approx \rho(x, y) dx dy \Big|_{x=x_j, y=y_j},$$

gdzie: $S = \pi(R_1^2 - R_2^2)$.

Wobec tego, otrzymamy:

- masa krążka: $M = \frac{S}{N} \sum_{j=1}^N \rho(x_j, y_j)$,

- środek ciężkości: $X_0 = \frac{S}{NM} \sum_{j=1}^N x_j \rho(x_j, y_j), Y_0 = \frac{S}{NM} \sum_{j=1}^N y_j \rho(x_j, y_j),$

- moment bezwładności: $J = \frac{S}{N} \sum_{j=1}^N (x_j^2 + y_j^2) \rho(x_j, y_j),$

przy czym, indeks j odnosi się do współrzędnych (x_j, y_j) , które wskazują punkty mieszczące się na krążku, z pominięciem powierzchni wewnątrz okręgu o promieniu R_2 .

Następująca procedura w programie Matlab zapewnia rozwiązanie zadania według metody MC.

```
% parametry zadania:
N = 100000; % liczba punktów
ro = 1;      % gestosc materialu
R1 = 1;
R2 = 0.2;
d = 0.5;

S = pi*(R1*R1-R2*R2);
Y0 = 0;

% petla
M = 0; X0 = 0; J = 0;
j=0;
while j < N,
    % generowanie liczb pseudolosowych
    x = R1*(2*rand(1)-1);
    y = R1*(2*rand(1)-1);
    % warunek
    if ((norm([x,y],2) < R1) & (norm([x-d,y],2) > R2)),
        M = M+ro;
        X0 = X0+x*ro;
        J = J+(x*x+y*y)*ro;
        j = j+1;
    end;
end;
M = S*M/N,
X0 = S*X0/N,
J = S*J/N,
```

Uzyskane rezultaty:

$N = 1000, \quad M = 3,0159, \quad X_0 = -0,0593, \quad J = 1,5464;$

$N = 100000, \quad M = 3,0159, \quad X_0 = -0,0673, \quad J = 1,5345.$

Korzystając z ogólnych reguł obliczania momentu bezwładności⁵⁶, można analitycznie wyznaczyć jego wartość dla rozpatrywanej figury (dla jednorodnego materiału):

$$J = \frac{\pi \rho}{2} (R_1^4 - R_2^4 - 2R_2^2 d^2),$$

co, dla przyjętych parametrów, daje następującą wartość: $J = 1,5369$.

Wprawdzie w zadaniu rozpatruje się problem momentu bezwładności płaskiej figury, to załączony program można także stosować do walca o dowolnej długości o rozpatrywanym prze-

⁵⁶ Na przykład: https://pl.wikipedia.org/wiki/Moment_bezwładności

kroju. W takim przypadku, długość walca należy uwzględnić w proporcjonalnym zwiększeniu gęstości ρ (kg/m^3). Podobnie, przez odpowiednią zmianę położenia d oraz promienia R_2 wyciętego okręgu (rys. 6.15), powyższa procedura może służyć także do obliczania momentu bezwładności J ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$) pełnego walca ($R_2 = 0$) lub walca wydrążonego w środku ($d = 0$).

Metoda MC nie jest stosowana do standardowych obliczeń, gdy zadanie jest dobrze zdefiniowane: model analizowanego procesu jest w pełni określony za pomocą zależności deterministycznej. Jej stosowanie jest uzasadnione raczej w przypadkach przeciwnych: gdy analizowane zjawisko (funkcja, proces) nie jest w pełni określone za pomocą zależności matematycznych, natomiast można je opisać za pomocą dostępnych danych statystycznych.

6.5. Modele deterministyczne czy stochastyczne?

Powyższe pytanie jest ważne przynajmniej w dwóch aspektach:

- jaki charakter mają zjawiska zachodzące w Naturze (a tym samym, w technice)?
- jakiego charakteru model należy zastosować do opisu tych zjawisk?

W odniesieniu do pierwszej kwestii ciągle toczą się spory, które barwnie ilustruje słynna wypowiedź A. Einsteina⁵⁷: „Bóg nie gra w kości”, która była jego komentarzem w odniesieniu do umacniającej się probabilistycznej interpretacji równania funkcji falowej Schrödingera, które jest podstawą mechaniki kwantowej. Wielki sukces tej teorii w opisie zjawisk fizycznych wydawał się przesądzać sprawę na korzyść właśnie probabilistycznego podejścia do matematycznego opisu zjawisk. Ta interpretacja jest ostatnio poddawana w wątpliwość (co do jej rzeczywistej uniwersalności) w związku z nowymi osiągnięciami matematyki, związanymi w szczególności z teorią deterministycznych układów chaotycznych (teorią systemów dynamicznych) oraz fizyki – w związku z kryzysem wywołanym wykryciem nowych zjawisk, które, jak dotychczas, nie znalazły stosownych interpretacji teoretycznych (ciemna materia, ciemna energia). Także w obliczu postępów w biologii, formułowane są pytania, czy dotychczasowa fizyka (w tym, mechanika kwantowa) potrafi opisać procesy związane z wysokim stopniem samoorganizacji, którego przejawem jest fenomen życia, świadomości, czy też inteligencji?

Problem związany z drugim pytaniem ma charakter techniczny i głównie skupimy się właśnie na nim. Jest on związany ze sposobem odzwierciedlenia w modelu niepewności danych, jego parametrów oraz szczegółowych zależności. Przyjmuje się, że modele deterministyczne nie odzwierciedlają tak rozumianej niepewności – co najwy-

⁵⁷ Ta uwaga znalazła się w liście do Maxa Borna z 1926 roku: „Ta teoria daje wiele (mowa o mechanice kwantowej), ale wcale nie przybliżyła nas do poznania tajemnicy Stwórcy. W każdym razie ja jestem przekonany, że On nie gra w kości”. – Na podstawie: PENROSE R., *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 2000.

żej, mogą uwzględniać błędy w postaci szumów lub przewidywanych odchyłek pomiarowych. W takim przypadku można mówić o rozszerzeniu modeli deterministycznych na obszar niepewności przez stosowanie odpowiednich technik estymacji (oceny) w procesie identyfikacji parametrów modeli, np. mają tu zastosowanie różne formy metody najmniejszych kwadratów. Problem ten jest zazwyczaj podnoszony, jako główny czynnik, przemawiający za stosowaniem modeli probabilistycznych, w których niepewność (danych, parametrów procesu, charakteru procesu) może być opisana i włączona do algorytmu tworzenia modelu i przez to nadzorowana. Innym czynnikiem przemawiającym za stosowaniem modeli probabilistycznych jest rozmiar zadania. W tym przypadku zakłada się, że pojedyncze relacje w złożonym procesie są dobrze znane i opisane według deterministycznych reguł. Jednak ich wielka liczba uniemożliwia podążanie za śledzeniem całego procesu, wyciąganiem ogólnych wniosków, czy też określenie tendencji bądź dynamiki w praktycznie dostępnym czasie. W takim przypadku pomocne może być podejście probabilistyczne, w którym pomijane są jednostkowe relacje, a w ich miejsce wprowadzane są uogólnione parametry i zależności, uzyskane na podstawie wiarygodnych charakterystyk stochastycznych.

Powyższe zagadnienie nie może być zatem jednoznacznie rozstrzygnięte. W praktycznych sytuacjach stosuje się jedno z ukazanych powyżej podejść, przy tym, przy jego wyborze można kierować się następującymi wskazówkami, które w skróty sposób charakteryzują oba rodzaje modeli.

Modele deterministyczne:

- charakteryzują się dokładną znajomością przebiegu opisywanego procesu i znajomością związanych z nim parametrów: odpowiedź układu jest w pełni określona przez jego parametry oraz warunki początkowe;
- mogą być nadzorowane (kontrolowane) przy wystąpieniu złożonych sytuacji, charakteryzujących się koniecznością podejmowania wielu decyzji cząstkowych z uwzględnieniem dobrze zdefiniowanych ograniczeń;
- nadzorowany system ma niewiele wejść (wymuszeń), które mają niepewny charakter (są źle zdefiniowane);
- rezultaty przebiegu i kontroli obserwowanego procesu mogą być łatwo interpretowane;
- obserwacja przebiegu procesu pozwala poprawiać wstępnie zdefiniowany model.

Modele probabilistyczne:

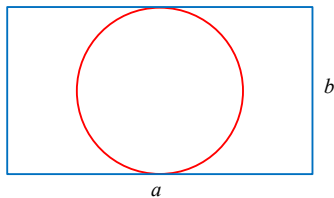
- charakteryzują się występowaniem wielkości wejściowych (wymuszeń), które mają niepewny charakter, co oznacza, że zmieniają się w nieprzewidywalny sposób: jednakowe wymuszenia i warunki początkowe mogą prowadzić do różnych odpowiedzi układu;
- występująca niepewność co do wymuszeń oraz parametrów modelu może być opisana za pomocą probabilistycznych charakterystyk;

- obserwowany proces jest zazwyczaj złożony, o niejasnych zależnościach pomiędzy wymuszeniami i jego przebiegiem, natomiast dostępne są rezultaty wielokrotnej jego realizacji.

<w opracowaniu>

6.6. Zadania

- Na podstawie przykładu 6.1 wyznaczyć rozkład zmiennej losowej, która przyjmuje wartości równe sumie oczek w trzykrotnym rzucie kostką. Wykreślić dystrybucję tej zmiennej. Obliczyć prawdopodobieństwo:
 - $P(7 < X \leq 12)$;
 - $P(11 < X \leq 17)$;
 - $P(14 < X \leq 18)$;
 - $P(2 < X \leq 12)$;
 - $P(X \leq 12)$;
 - $P(X \leq 17)$;
 - $P(14 < X)$;
 - $P(6 < X)$.
- Narysować przebiegi funkcji masy prawdopodobieństwa (*pmf*) rozkładu Poissona dla parametru $\lambda = 4, 6, 10$.
- Założmy, że czas obsługi kierowców w stacji benzynowej ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej E_x [min]. Określić prawdopodobieństwo zdarzenia, że kierowca będzie czekał nie więcej niż b [min] przy następujących danych:
 - $E_x = 5,0, b = 3$;
 - $E_x = 4,0, b = 3$;
 - $E_x = 5,0, b = 1$;
 - $E_x = 6,0, b = 3$;
 - $E_x = 4,0, b = 2$;
 - $E_x = 4,0, b = 5$;
 - $E_x = 5,0, b = 2$;
 - $E_x = 6,0, b = 4$.
 (Posłużyć się wynikami przykładu 6.2).
- Powtórzyć obliczenia z zadania 6.2 przy założeniu, że obsługa kierowców jest dwuetapowa (napełnianie zbiornika i opłata w kasie), a proces ma charakter rozkładu Erlanga.
- Stosując metodę MC obliczyć wartość całki z podanej funkcji w granicach wyznaczonych przez jej miejsca zerowe. Porównać wynik z wartością rzeczywistą. Wykonać odpowiednie ilustracje graficzne. Obliczenia powtórzyć przy tej samej i zmienionej liczbie punktów.
 - $y = 2x^2 - 5x - 21$;
 - $y = x^2 - 5x - 26$;
 - $y = -2x^2 + 5x + 19$;
 - $y = 2x^2 + 5x - 21$;
 - $y = 3x^2 - 5x - 26$;
 - $y = -2x^2 - 5x + 19$;
 - $y = -2x^2 + 5x + 21$;
 - $y = x^2 + 5x - 26$;
 - $y = -2x^2 - 5x + 14$.
- Na podstawie przykładu 6.7 opracować program do obliczania liczby π według metody MC, stosując relację pomiędzy okręgiem i prostokątem, jak na podanym rysunku. Wykonać obliczenia dla podanych wymiarów prostokąta.



- a) $a/b = 2,5$; b) $a/b = 2,5$; c) $a/b = 2,5$; d) $a/b = 0,5(1 + \sqrt{5})$;
e) $a/b = 1,25$; b) $a/b = 5,0$; f) $a/b = 4,0$; g) $a/b = \sqrt{3}$.
- 6.7. Powtórzyć przykład 6.7 przy założeniu, że kwadrat jest wpisany w okrąg. Wymaga to generacji liczb pseudolosowych w polu koła, do czego można zastosować współrzędne biegunowe o losowych wartościach.
- 6.8. Zmodyfikować program z przykładu 6.8 tak, aby obliczyć moment bezwładności połowy okręgu względem osi Oz (pominąć okrąg wewnętrzny: $R_2 = 0$). Porównać wynik z rezultatem formuły analitycznej:
 $J = 0,25\pi(R_1)^4$.

7. MODELE ZALEŻNE OD ZDARZEŃ

7.1. Wprowadzenie

W systemach zależnych od zdarzeń, wyzwalanie określonego zachowania się układu jest inicjowane przez dyskretne zdarzenia. Modelowanie takich sytuacji ma na celu symulacyjną analizę procedur postępowania (działania dynamiki układu w przypadku wystąpienia inicjujących je zdarzeń. Typowym przykładem takiego układu jest kolejka, która działa na zasadzie ‘pierwszy przyszedł, pierwszy obsłużony’ (*ang. first-in-first-out* – FIFO). Sposób obsługi kolejki może być także inny, np. ‘ostatni przyszedł – pierwszy obsłużony’ lub może działać na zasadzie określonych preferencji. Czas pomiędzy poszczególnymi zdarzeniami może być bardzo różny.

Kolejkowanie jest terminem odnoszącym się do sposobu obsługi kolejek, rozumianych jako szeregowanie zadań wymagających obsługi. Zagadnienie to stało się niezmiernie ważne z chwilą powstania złożonych systemów, w których określone usługi (urządzenia) są wykonywane (stosowane) w różnych procesach (przez wielu klientów). Przykłady są dobrze znane: systemy komunikacyjne, systemy komputerowe, taśmy montażowe, ruch uliczny i inne. Niektóre z nich są zebrane w Tabeli 7.1.

Tabela 7.1. Przykłady systemów zależnych od zdarzeń

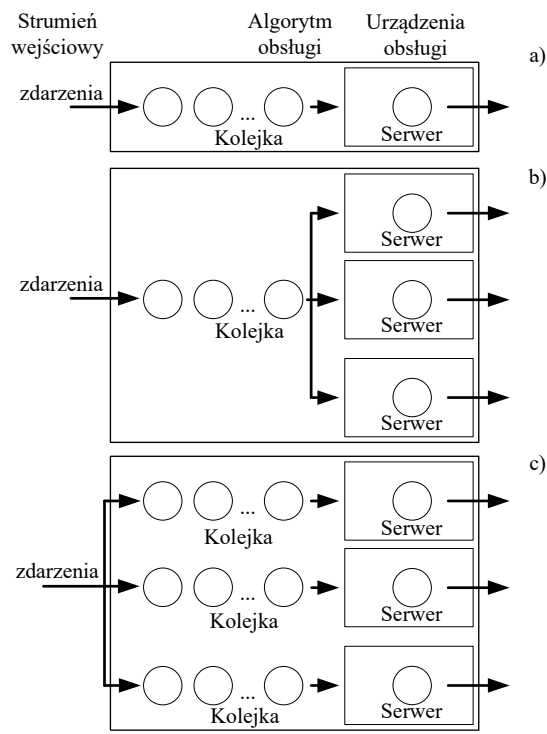
System	Elementy/zdarzenia	Atrybut	Zadanie
Ruch uliczny	Samochody	Prędkość i odległość	Jazda
Bank	Klienci	Stan konta	Wpłata/wypłata
System telefoniczny	Rozmowy	Długość rozmowy	Połączenie
Sklep	Klient	Zakupy	Obsługa kasowa
Kontrola jakości	Wyroby	Jakość	Kontrola
System produkcji	Produkty	Zamówienia	Realizacja zamówień
Obsługa ruchu lotniczego	Samolot	Przepustowość sektora	Dostęp do sektora

Przy analizie systemów zależnych od zdarzeń należy, w szczególności oszacować dwa podstawowe parametry:

- ilu zdarzeń (wyzwalających działanie systemu) należy się spodziewać w określonym przedziale czasowym;
- jak długi może być okres czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zdarzeniami.

Z samej natury tych pytań wnioskujemy, że mamy tu do czynienia z procesami losowymi, które należy opisywać w kategoriach probabilistycznych. Systemy kolejkowania należą do szerokiej grupy zagadnień określanych wspólnym terminem *badania operacyjne*, które należą do zakresu informatyki. Ze względu na charakter zastosowania takich systemów, używany jest też termin *systemy obsługi masowej*.

Problemy obsługi kolejek są bezpośrednio związane z zagadnieniem kosztów realizowania określonych procesów (zadań). Gdy w systemie występuje wiele takich samych procedur; ich liczbę można ograniczyć przez odpowiedni podział zadań, które są do wykonania. Mamy tu do czynienia z dylematem: koszt – szybkość wykonania (obsługi). Problem ten jest ogólnie znany: jazda samochodem w zatłoczonym mieście, nadawanie listu poleconego na pocztę, zgłoszenie się do lekarza i w wielu innych sytuacjach. W niektórych przypadkach sposób rozwiązania tego problemu może decydować o przydatności całego systemu, dlatego optymalizacja rozwiązania jest ważnym, praktycznym zagadnieniem. Ze względu na jego złożoność, najczęściej nie można tu zastosować metod analitycznych. To sprawia, że rośnie zainteresowanie metodami symulacji komputerowej.



Rys. 7.1. Przykłady organizacji systemów kolejkowych

Systemy obsługi masowej są opisywane za pomocą trzech pojęć (rys. 7.1).

- Strumień wejściowy jest tworzony przez uporządkowany zbiór zdarzeń wejściowych. Jest on określony przez rozkład prawdopodobieństwa długości okresów czasu pomiędzy kolejnymi zdarzeniami oraz przez liczbę jednostek, które mogą się pojawić jednocześnie. Wyjściowym założeniem jest przyjęcie, że przedziały te są ściśle zdeterminowane lub, że są losowe.
- Procedura obsługi kolejki opisuje sposób wyboru oczekujących zgłoszeń do obsługi. Mogą tu być stosowane różne rozwiązania, jak:
 - wspomniana już zasada ‘pierwszy przyszedł – pierwszy do obsługi’ (FIFO);
 - zasada: ‘ostatni przyszedł – pierwszy do obsługi’ (ang. *last in first out* – LIFO);
 - losowy wybór do obsługi (ang. *selection in random order* - SIRO);
 - wybór na zasadzie preferencji, np. zadania o krótkim czasie obsługi są wybierane częściej.

Kolejka może być charakteryzowana przez rozmaite wskaźniki, jak: średni czas oczekiwania, średnia i rzeczywista liczba oczekujących, liczba miejsc w kolejce (ograniczona lub nieskończona) i inne.

- Urządzenie obsługi jest charakteryzowane przez liczbę i konfigurację kanałów obsługi, przyjęty rozkład prawdopodobieństwa odnoszący się do czasu obsługi jednego zgłoszenia lub liczby obsłużonych jednostek w odcinku czasu (wydajność).

Oznaczenia stosowane do opisu systemów kolejkowych.

$N(t)$ – liczba oczekujących na obsługę, łącznie z obsługiwanym (liczba jednostek w systemie), określona w chwili t .

N_t – średnia długość kolejki do chwili t :

$$N_t = \frac{1}{t} \int_0^t N(\tau) d\tau \quad (7.1)$$

$N = \lim_{t \rightarrow \infty} N_t$ – średnia długość kolejki w ogóle.

$a(t)$ – liczba zgłoszeń do momentu t .

λ_t – średnia liczba zgłoszeń do chwili t :

$$\lambda_t = \frac{a(t)}{t} \quad (7.2)$$

$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$ – średnia liczba zgłoszeń w ogóle.

T_t – średni czas realizacji zadania w systemie:

$$T_t = \frac{1}{a(t)} \sum_{i=1}^{a(t)} T_i, \quad (7.3)$$

T_i – czas obsługi i -tego zgłoszenia w systemie.

$T = \lim_{t \rightarrow \infty} T_t$ – ogólny czas działania systemu.

Dla dowolnego systemu kolejkowego zachodzi relacja:

$$N = \lambda T \quad (7.4)$$

W przypadku, gdy zdarzenia w strumieniu wejściowym rządzą się rozkładem Poissona (6.21):

$$f_X(x) = P(X = k) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(X_N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

k – oznacza liczbę zdarzeń (klientów), które mogą wystąpić w jednostce czasu, natomiast parametr rozkładu λ jest średnią liczbą zdarzeń w jednostce czasu.

Należy rozróżnić oznaczenia stosowane w rozdz. 6 w odniesieniu do różnych rozkładów prawdopodobieństwa, od ich oznaczeń w przypadku określania parametrów kolejki lub obsługi. Na przykład, jeśli czas obsługi opiszemy rozkładem wykładniczym, to zależność (6.23) zapiszemy w postaci:

$$f_X(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0, \mu > 0,$$

gdzie μ oznacza intensywność obsługi (liczba obsłużonych jednostek w czasie), natomiast $1/\mu$ jest średnim czasem obsługi. W takim przypadku, prawdopodobieństwo obsługi zdarzenia w czasie $[t_1, t_2]$ wynosi:

$$P(t_1 \leq T \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mu e^{-\mu x} dx = e^{-\mu t_1} - e^{-\mu t_2} \quad (7.5)$$

7.2. Klasyfikacja systemów kolejkowych

W celu uporządkowania opisu systemów kolejkowych wprowadzono oznaczenie, które zaproponował D. Kendall:

1/2/3/4/5...,

gdzie:

Parametr 1 – symbol rozkładu strumienia zgłoszeń:

M – markowski (rozkład Poissona) czas zgłoszenia;

D – deterministyczny czas zgłoszenia;

E_l – rozkład Erlanga rzędu l .

Parametr 2 – symbol rozkładu czasu obsługi:

M – markowski (rozkład Poissona) czas obsługi;

G – dowolny rozkład obsługi;

D – deterministyczny czas obsługi.

E_l – rozkład Erlanga rzędu l .

Parametr 3 – liczba stanowisk obsługi.

Parametr 4 – liczba miejsc w systemie (stanowiska obsługi + kolejka): jeśli liczba jest nieskończona, parametr jest pomijany.

Parametr 5 – liczba źródeł strumienia zgłoszeń.

Na przykład, zapis: M/M/1 oznacza system z pojedynczym kanałem obsługi, w którym zgłoszenia i obsługa mają rozkład Poissona (jest to nawiązanie do tzw. procesu Markowa, gdy kolejne zdarzenia losowe zależą od stanów bieżących, a nie zależą od stanów przeszłych).

(Sprawdzić: Bogusław Filipowicz, Modele stochastyczne w badaniach operacyjnych, WNT, Warszawa, 1996, str. 27)

Brak symbolu na którejś pozycji oznacza, że liczba zgłoszeń nie jest limitowana, lub, że obowiązuje zasada FIFO obsługi kolejki.

7.3. Przykłady systemów kolejkowych

7.3.1. System M/M/1

Charakterystyka systemu:

- zgłoszenia: proces Poissona z intensywnością λ (średnia liczba nowych zgłoszeń w jednostce czasu);
- czas obsługi: rozkład wykładniczy z parametrem μ (średnia liczba obsłużonych jednostek w czasie);
- pojedyncze stanowisko obsługi;
- czas obsługi nie zależy od czasu odstępu między zgłoszeniami;
- nieskończona kolejka, stąd, jest to system M/M/1/ ∞ .

Parametry systemu:

Współczynnik wykorzystania (intensywność ruchu):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (7.6)$$

Zauważmy, że warunek stabilności systemu kolejkowego wymaga, aby: $\rho < 1$, co oznacza, że: intensywność obsługi (μ) > intensywność zgłoszeń (λ). Można to także zapisać względem czasu: średni czas obsługi ($1/\mu$) < średni czas zgłoszeń ($1/\lambda$).

Działanie rozpatrywanego systemu kolejkowego jest zazwyczaj ilustrowane za pomocą grafu przepływowego (rys. 7.2), w którym węzły reprezentują stany systemu, przy czym, numer stanu n oznacza liczbę jednostek, znajdujących się w systemie (suma jednostek w kolejce oraz obsłużiwanych). Stan zerowy oznacza, że w systemie nie ma żadnych jednostek. Oznaczmy przez p_n prawdopodobieństwo, że w systemie znajduje się n jednostek:

$$p_n = P(X = n) \quad (7.7)$$

Zauważmy, że stan n może być osiągnięty, gdy w stanie $n - 1$ pojawi się zgłoszenie na wejściu (parametr λ) lub, gdy w stanie $n + 1$ obsługiwana jednostka opuści system na wyjściu (parametr μ). Na podstawie schematu z rys. 7.2, dla kolejnych stanów możemy napisać następujące równości:

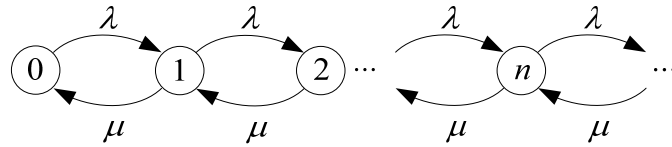
$$\begin{aligned} n = 0: & \lambda p_0 = \mu p_1 \\ n = 1: & \lambda p_0 + \mu p_2 = (\mu + \lambda) p_1 \\ n = 2: & \lambda p_1 + \mu p_3 = (\mu + \lambda) p_2 \\ & \vdots \\ n > 1: & \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} = (\mu + \lambda) p_n \end{aligned} \quad (7.8)$$

Dla kolejnych stanów otrzymamy:

$$\text{dla } n = 0: p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0,$$

$$\text{dla } n = 1: p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 = \rho^2 p_0,$$

$$\text{ogólnie: } p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \rho^n p_0.$$



Rys. 7.2. Graf funkcjonowania systemu kolejkowego M/M/1

Prawdopodobieństwo p_0 można wyznaczyć z ogólnego warunku (normalizacja):

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1, \text{ skąd:}$$

$$p_0 + \rho p_0 + \rho^2 p_0 + \dots + \rho^n p_0 + \dots = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = p_0 \frac{1}{1 - \rho} = 1, \text{ zatem:}$$

$$p_0 = 1 - \rho \text{ i ostatecznie:}$$

$$p_n = (1 - \rho) \rho^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.9)$$

Równanie (7.9) określa prawdopodobieństwo zdarzenia, że w systemie kolejkowym znajduje się n jednostek (klientów). Ponieważ $0 \leq \rho < 1$, więc p_n jest wielkością eksponentialną, monotonicznie malejącą. Wielkość ta, ma zatem charakter rozkładu

geometrycznego [14, 19], przy czym, średnia liczba jednostek w systemie może być estymowana następująco:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^n = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \quad (7.10)$$

Wynika stąd ważna obserwacja: gdy intensywność obsługi μ zmniejsza się do wartości bliskiej intensywności zgłoszeń λ ($\mu \rightarrow \lambda$), to wzrasta liczba jednostek przebywających w systemie: $L_s \rightarrow \infty$.

Średni czas przebywania jednostki (zadania) w systemie:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \quad (7.11)$$

Wynika to z tzw. twierdzenia Little'a⁵⁸ [20].

Średnia długość kolejki (liczba jednostek):

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad (7.12)$$

Średni czas oczekiwania w kolejce:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \quad (7.13)$$

Powyżej zdefiniowane parametry systemu można, więc przedstawić za pomocą intensywności ruchu (ρ).

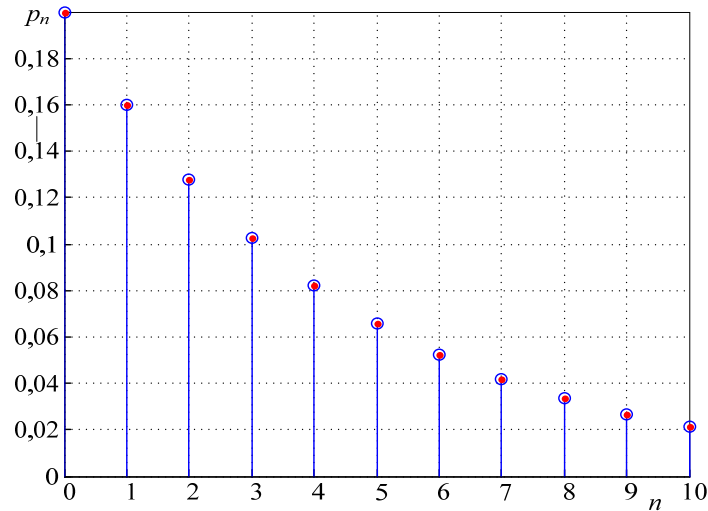
Przykład 7.1. Myjnia samochodowa przeciętnie obsługuje jeden samochód w czasie 12 min. Do myjni przyjeżdżają średnio 4 samochody w ciągu godziny. Określić podstawowe parametry tego systemu: intensywność zgłoszeń, intensywność obsługi, intensywność ruchu (stopień wykorzystania), średnią długość kolejki, średni czas przeznaczony na mycie samochodu. Wyznaczyć rozkłady prawdopodobieństw: liczby samochodów w systemie oraz czasu całej procedury (kolejka + mycie).

Zapiszmy parametry związane z rozpatrywanym systemem kolejkowym:

- intensywność zgłoszeń $\lambda = 4$ [1/godz];
- intensywność obsługi $\mu = 1/12$ min = 5 [1/godz];
- stopień wykorzystania (0.6) $\rho = \lambda/\mu = 4/5 = 0,8$ (system jest stabilny);
- średnia liczba samochodów w myjni (łącznie z kolejką) $L_s = \rho/(1-\rho) = 4$;

⁵⁸ Twierdzenie Little'a mówi, że przy danej intensywności zdarzeń na wejściu λ , czas w systemie jest proporcjonalny do czasu W_s przebywania jednostki w systemie: $L_s = \lambda W_s$, czyli: średnia liczba jednostek w systemie jest równa iloczynowi średniego czasu przebywania w systemie oraz średniego tempa ich przybywania na wejście.

- średnia długość kolejki (0.12) $L_q = \rho^2/(1-\rho) = 3,2$ (liczba samochodów w kolejce);
 - średni czas przeznaczony na mycie (kolejka + mycie) (0.11) $W_s = 1/\mu/(1-\rho) = 0,25/0,2 = 1,0$ godz, z czego w kolejce kierowcy tracą W_q czasu (0.13): $W_q = W_s - 1/\mu = 1,0 - 0,2 = 0,8$ godz.
 Rozkład prawdopodobieństwa liczby samochodów znajdujących się w systemie jest pokazany na rys. 7.3. Można zauważyć, że jest to rozkład geometryczny.



Rys. 7.3. Rozkład prawdopodobieństwa liczby samochodów w systemie

Otrzymane powyżej parametry kolejki odnoszą się do średniego stanu ustalonego. Bardziej realistyczne dane można otrzymać w drodze symulacji procesu z wykorzystaniem programu `symulacja_M_M_1`, opracowanego w systemie Matlab (DODATEK), gdzie można śledzić dynamikę omawianego procesu kolejkowego.

Na początku tekstu programu (plik `symulacja_M_M_1.m`) wprowadzono parametry procesu:

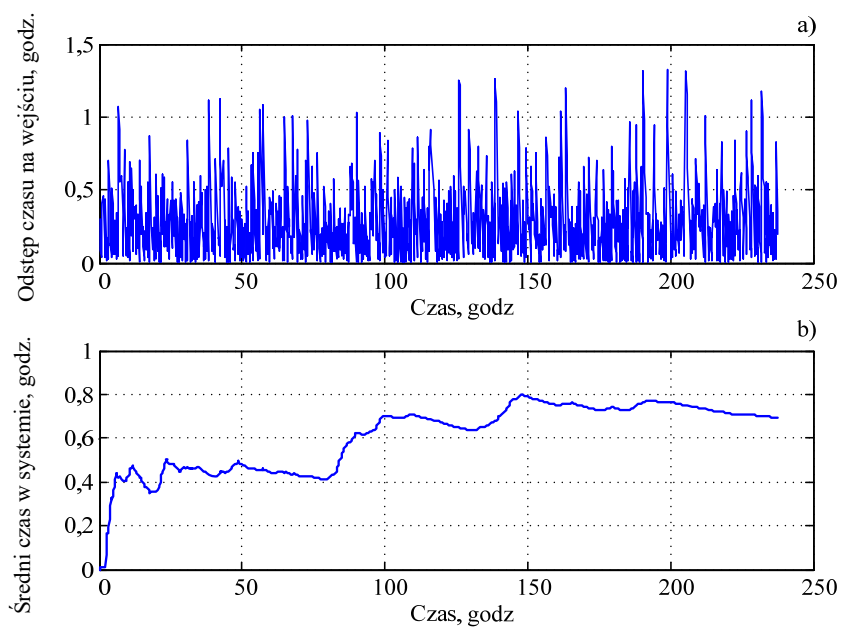
```
Q_Granica=200;           % graniczna długość kolejki
delT_in=1/4;             % odstęp czasu między zgłosz. (godz)
delT_out=12/60;          % czas obsługi (godz)
s_liczba_sym_zdarzen=1000; % liczba symulowanych zdarzeń (łącznie na wej i wyj)
```

Można zauważyć, że: $\text{delT_in} = 1/\lambda$ oraz: $\text{delT_out} = 1/\mu$. Przyjęto dużą długość kolejki (200), aby nie wystąpiło przepełnienie. Sumaryczna liczba symulowanych zdarzeń obejmuje sumę zdarzeń na wejściu i wyjściu (= 1000).

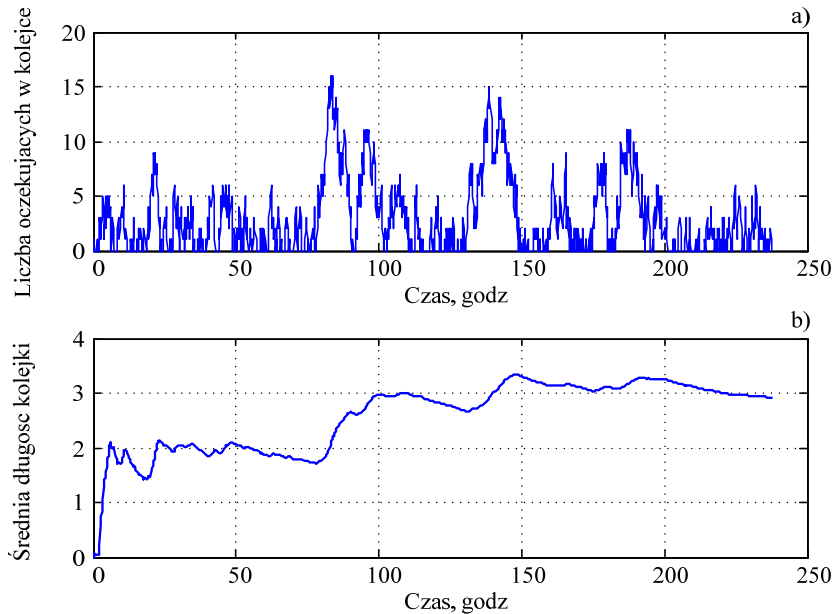
Losowy proces na wejściu do systemu jest pokazany na rys. 7.4a. Widać, że przy średniej wartości odstępów pomiędzy zdarzeniami, niektóre odstępy wynoszą powyżej 1 godz. Przebieg średniego czasu realizacji zadania jest pokazany na rys. 7.4b. Jest to średni czas pobytu jednostki w systemie (kolejka + obsługa) liczony dla tych jednostek, które przeszły cały proces od początku rozpatrywanego testu). Na końcu przeprowadzonego testu wynosi on ok. 40 min ($\approx 0,7$ godz.).

Zmiana w czasie liczby jednostek oczekujących w kolejce jest pokazana na rys. 7.5a. Można zauważyć, że niekiedy w kolejce czeka ponad 10 samochodów; można także znaleźć okresy, gdy

parking przed myjnią jest pusty. Średnia długość kolejki (rys. 7.5b) pod koniec testu wynosi ok. 3 samochodów.



Rys. 7.4. Przebieg procesu wejściowego (a) oraz średni czas pobytu w systemie (b)



Rys. 7.5. Liczba oczekujących w kolejce (a) oraz średnia długość kolejki (b)

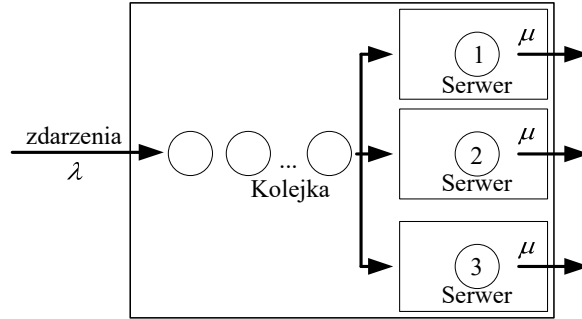
Program generuje także następujący raport tekstowy, który potwierdza uzyskane wyniki graficzne na koniec symulacji:

```
>> symulacja_M_M_1
Średni czas w systemie : 0.6925 godz.
Średnia długość kolejki : 2.9114
Wykorzystanie obsługi : 0.84523
Czas wykonania symulacji: 237.8634
```

Ostatnia informacja oznacza, że czas wykonania 1000 zdarzeń (łącznie na wejściu i wyjściu) trwa niemal 238 godzin. Odbywa się to przy założeniu, że w tym czasie nie zmieniają się przyjęte parametry kolejki. Jest to założenie mało realistyczne, gdyż z pewnością chęć do korzystania z myjni samochodowej zmienia się w ciągu doby. Aby ten czynnik uwzględnić, należałoby uzależnić podstawowe parametry kolejki: intensywność zgłoszeń na wejściu (λ) oraz intensywność obsługi (μ) od pory dnia.

7.3.2. System M/M/s

Wydajność powyższego systemu M/M/1 można zwiększyć przez zwiększenie liczby stanowisk obsługi. W systemie z s stanowiskami obsługi (rys. 7.1b), intensywność na wyjściu (parametr μ) zwiększy się s – krotnie (rys. 7.6), co istotnie wpływa na intensywność ruchu, przez co może on zwiększyć liczbę zgłoszeń, pozostając stabilnym.



Rys. 7.6. Schemat systemu M/M/3

Podstawowe właściwości systemu mogą być analizowane zgodnie z założeniami, stosowanym w odniesieniu do systemu z jedną stacją obsługi. Przyjmujemy następujące założenia:

- zdarzenia na wejściu pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ ;
- proces wyjściowy jest określony przez intensywność μ ;
- na wyjściu znajduje się s niezależnych, jednakowych stacji;
- pojemność systemu nie jest ograniczona;
- odbiór z kolejki odbywa się według zasady FIFO.

Mówimy, że w stanie ustalonym proces przyjmuje stan n , jeśli w systemie znajduje się n jednostek. Na podstawie rys. 7.7, kolejne stany systemu można opisać następującym schematem:

$$n = 0: \lambda p_0 = \mu p_1,$$

$$n = 1: \lambda p_1 + \mu p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2 \Leftrightarrow (\lambda + \mu)p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2,$$

$$n = 2: \lambda p_2 + 2\mu p_2 = \lambda p_1 + 3\mu p_3 \Leftrightarrow (\lambda + 2\mu)p_2 = \lambda p_1 + 3\mu p_3,$$

$$n = 3: \lambda p_3 + 3\mu p_3 = \lambda p_2 + 4\mu p_4 \Leftrightarrow (\lambda + 3\mu)p_3 = \lambda p_2 + 4\mu p_4,$$

...

$$n = s: \lambda p_s + s\mu p_s = \lambda p_{s-1} + s\mu p_{s+1} \Leftrightarrow (\lambda + s\mu)p_s = \lambda p_{s-1} + s\mu p_{s+1},$$

$$n = s+1: \lambda p_{s+1} + s\mu p_{s+1} = \lambda p_s + s\mu p_{s+2} \Leftrightarrow (\lambda + s\mu)p_{s+1} = \lambda p_s + s\mu p_{s+2},$$

...

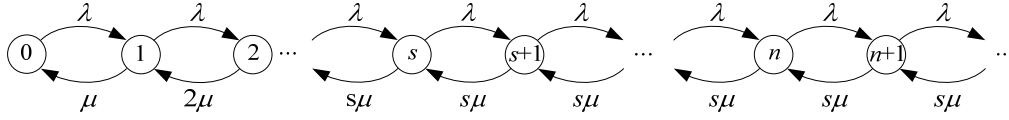
$$n > s+1: \lambda p_n + s\mu p_n = \lambda p_{n-1} + s\mu p_{n+1} \Leftrightarrow (\lambda + s\mu)p_n = \lambda p_{n-1} + s\mu p_{n+1}.$$

Prowadzi to do następujących ogólnych zależności:

$$p_n = \left(\rho^n / n! \right) p_0 \text{ dla } n < s,$$

$$p_n = \left(\rho^n / (s! s^{n-s}) \right) p_0 \text{ dla } n \geq s.$$

gdzie ρ – jak w (7.6).



Rys. 7.7. Graf funkcjonowania systemu kolejkowego M/M/s

Prawdopodobieństwo wystąpienia pustego systemu można określić podobnie, jak w systemie M/M/1: $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1$, skąd:

$$p_0 = \left(1 + \rho + (\rho^2 / 2) + \dots + \rho^n s! s^{n-s} + \dots \right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(s-\rho)(s-1)!} \right)^{-1}, \quad \frac{\rho}{s} = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

Ostatecznie otrzymujemy:

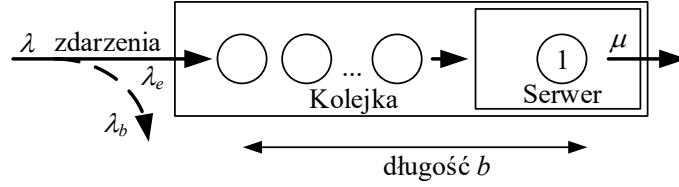
$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0 & n < s \\ p_n &= \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} p_0 = \frac{\lambda^n}{s! s^{n-1} \mu^n} p_0 & n \geq s \end{aligned} \quad (7.14)$$

Znając p_0 , λ , μ , można określić pozostałe parametry systemu:

- średnia liczba jednostek w systemie: $L_s = \rho + \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}$;
- średnie wykorzystanie obsługujących stacji: $L_B = \lambda W_B = \rho$, $W_B = 1/\mu$ - średni czas wykorzystania stacji obsługi;
- średnia liczba jednostek w kolejce: $L_q = L_s - L_B = L_s - \rho$;
- średnie wykorzystanie systemu: $U = P(n > 0)$, $U = 1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{s-1}$;
- średni czas jednostki w systemie: $W_s = L_s / \lambda$;
- średni czas jednostki w kolejce: $W_q = L_q / \lambda$.

7.3.3. System M/M/1/b

W powyższych rozważaniach zakładaliśmy, że długość kolejki jest nieograniczona. Zazwyczaj jednak, rejestr kolejkowy ma skończoną liczbę miejsc i dodatkowe zgłoszenia nie są przyjmowane. Załóżmy, że maksymalna długość kolejki wynosi b miejsc (rys. 7.8).

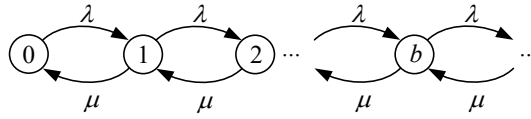


Rys. 7.8. Schemat systemu M/M/1/b

Do analizy tego systemu przyjmujemy następujące założenia:

- zdarzenia na wejściu pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ ;
- na wyjściu znajduje się jedna stacja o intensywności obsługi μ ;
- pojemność systemu nie jest ograniczona do b jednostek;
- odbiór z kolejki odbywa się według zasady FIFO.

Mówimy, że w stanie ustalonym proces przyjmuje stan n , jeśli w systemie znajduje się n jednostek. Na podstawie rys. 7.8, kolejne stany systemu można opisać następującym schematem:



Rys. 7.9. Graf funkcjonowania systemu M/M/1/b

$$n = 0: \lambda p_0 = \mu p_1,$$

$$n = 1: \lambda p_1 + \mu p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2 \Leftrightarrow (\lambda + \mu) p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2,$$

$$n = 2: \lambda p_2 + \mu p_2 = \lambda p_1 + \mu p_3 \Leftrightarrow (\lambda + \mu) p_2 = \lambda p_1 + \mu p_3,$$

$$n = 3: \lambda p_3 + \mu p_3 = \lambda p_2 + \mu p_4 \Leftrightarrow (\lambda + \mu) p_3 = \lambda p_2 + \mu p_4,$$

...

$$n = b: \mu p_b = \lambda p_{b-1} \Leftrightarrow \mu p_b = \lambda p_{b-1}.$$

Ogólnie: $\mu p_b = \lambda p_{b-1}$, skąd: $p_b = \frac{\lambda}{\mu} p_{b-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^b p_0 = \rho^b p_0.$

Łatwo sprawdzić następujący związek:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^b\right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{n=0}^b \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^b \rho^n}.$$

Ostatecznie:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{b+1}} \quad (7.15)$$

$$p_n = \rho^n p_0 = \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{b+1}} \quad (7.16)$$

oraz:

- efektywna intensywność na wejściu: $\lambda_e = \lambda(p_0 + p_1 + \dots + p_{b-1}) = \lambda(1 - p_b)$;
- średnia liczba jednostek w systemie: $L_s = \sum_{n=0}^b np_n$;
- średnie wykorzystanie stacji obsługi: $L_B = 1 - p_0 = 1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{b+1}}$;
- średni czas wykorzystania obsługi: $W_B = 1/\mu$;
- średnia liczba jednostek w kolejce: $L_q = L_s - L_B$;
- średnie wykorzystanie systemu: $U = P(n > 0)$, $U = 1 - p_0$;
- średni czas jednostki w systemie: $W_s = L_s / \lambda_e$;
- średni czas jednostki w kolejce: $W_q = L_q / \lambda_e$.

Zauważmy, że system może pracować także przy spełnieniu warunku: $\rho > 1$.

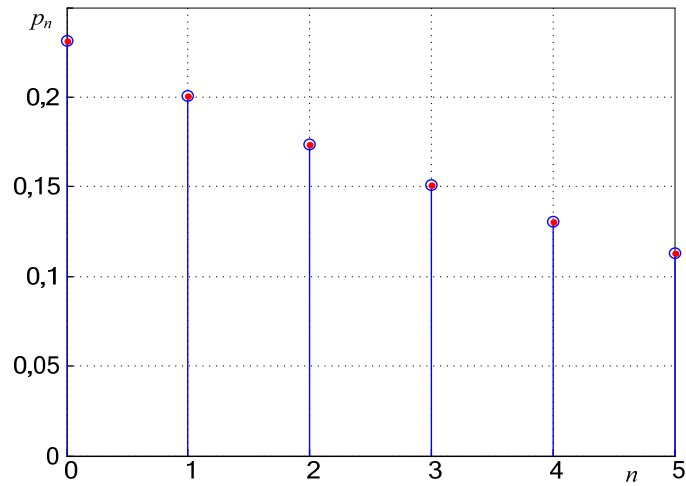
Przykład 7.2. Rozpatrzmy przypadek z myjnią samochodową z przykładu 7.1, w której kolejka jest ograniczona przez liczbę miejsc parkingowych do $b = 5$ samochodów. Czas obsługi wydłuża się o 1 min, co jest związane z koniecznością dojazdu z parkingu do myjni. Pozostałe parametry pozostają niezmienione.

Powtórzmy podstawowe dane:

- intensywność zgłoszeń $\lambda = 4$ [1/godz];
 - intensywność obsługi $\mu = 60/(12+1) = 60/13$ min/min = 4,6154 [1/godz];
 - graniczna długość kolejki $n = b = 5$;
 - stopień wykorzystania (7.6) $\rho = \lambda/\mu = 4 \cdot 13/60 = 0,8667$ (system jest stabilny).
- Na podstawie (7.16) określamy rozkład prawdopodobieństwa liczby samochodów w systemie:

$$p_n = \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{b+1}} = \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^6}$$

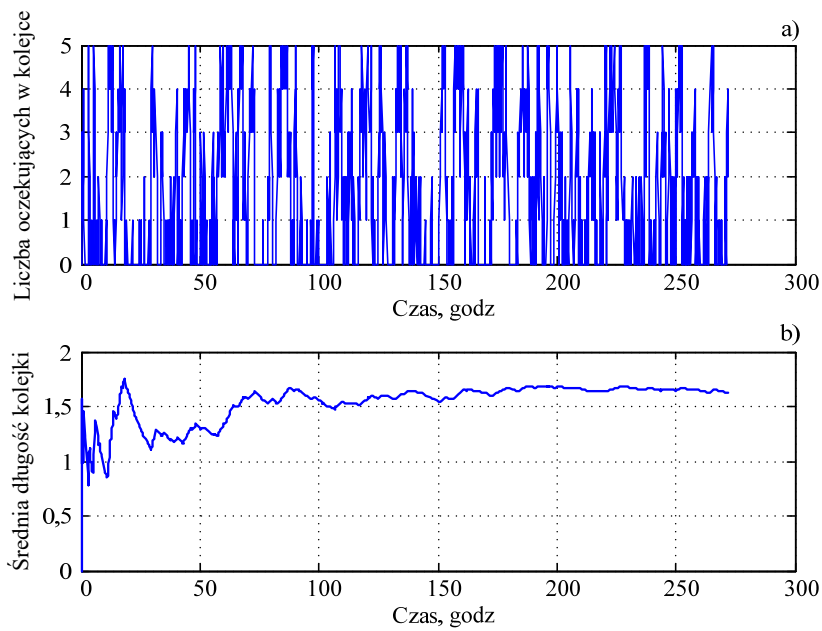
Rozkład ten jest pokazany na rys. 7.10. Jest on ograniczony do $n = s = 5$ stanów.



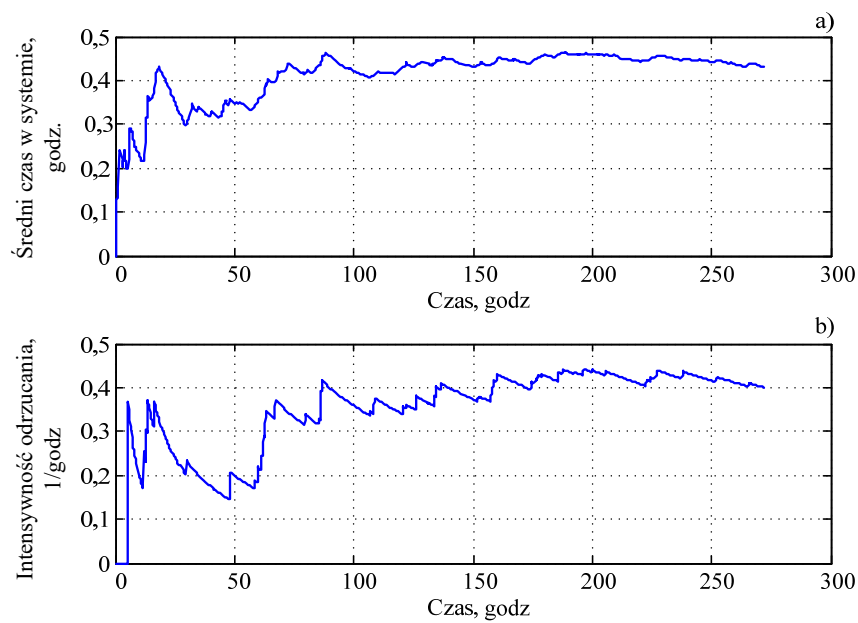
Rys. 7.10. Rozkład prawdopodobieństwa liczby samochodów w systemie M/M/1/5

- efektywna intensywność na wejściu: $\lambda_e = \lambda(1 - p_5) = \lambda - \lambda\rho^5 \frac{1-\rho}{1-\rho^6} = 3,5475$;
- średnia liczba samochodów w myjni (łącznie z kolejką): $L_s = \sum_{n=0}^5 np_n = 2,0878$;
- średnie wykorzystanie stacji obsługi: $L_B = 1 - p_0 = 1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^6} = 0,7686$;
- średnia liczba jednostek w kolejce: $L_q = L_s - L_B = 1,3192$;
- średni czas obsługi w systemie: $W_s = L_s / \lambda_e = 0,5885$
- średni czas przebywania w kolejce: $W_q = L_q / \lambda_e = 0,3719$.

Do symulacji pracy kolejki zastosowano program *symulacja_M_M_1_b*, który jest nieco zmodyfikowaną wersją programu *symulacja_M_M_1* z przykładu 7.1. Modyfikacja polega na wprowadzeniu ograniczenia długości kolejki w procedurze *wejście*. Jeśli następuje przekroczenie długości kolejki (parametr *Q_Granica*) – jednostka jest odrzucana.



Rys. 7.11. Losowy proces wejściowy: liczba jednostek w kolejce (a) oraz średnia długość kolejki (b)



Rys. 7.12. Ilustracja średniego czasu pobytu w systemie (a) oraz intensywności odrzucania jednostek na wejściu (b)

Podstawowe parametry symulacji należy podać na początku głównej procedury (plik *symulacja_M_M_1_b.m*):

```
Q_Granica=5;           % graniczna długość kolejki
delT_in=1/4;           % odstęp czasu między zgłoszeniami (godz)
delT_out=13/60;        % czas obsługi (godz)
s_liczba_sym_zdarzen=1000; % liczba symulowanych zdarzeń
```

Losowy proces wejściowy jest pokazany na rys. 7.11a. Łatwo zauważyć, że liczba oczekujących w kolejce jest ograniczona do zadanej wartości 5 jednostek. Jednostki odrzucone nie biorą udziału w dalszym przetwarzaniu. Porównując rysunki rys. 7.11b oraz rys. 7.5b widać, że ograniczenie liczby jednostek w kolejce wpłynęło także podobnie na jej średnią długość. Z tego samego powodu obniżył się średni czas pobytu w systemie, co jest także związane z odrzuceniem 109 jednostek. Ta ostatnia informacja jest zamieszczona w raporcie tekstowym:

```
>> symulacja_M_M_1_b
Dane odnoszące się do ostatniej iteracji:
Średni czas w systemie : 0.47212 godz.
Średnia długość kolejki : 1.7739
Wykorzystanie obsługi : 0.80357
Liczba odrzuceń : 109
Intensywność odrzucania : 0.39898
Czas wykonania symulacji: 273.1976
```

Ograniczenie długości kolejki prowadzi także do zmniejszenia stopnia wykorzystania obsługi. Właściciel myjni powinien się zastanowić nad sposobem zwiększenia liczby miejsc parkingowych.

7.4. Zadania

- 7.1. Wykonać obliczenia wskaźników systemu M/M/1/b (jak w przykładzie 7.2), przyjmując parametry $\lambda = 4$, $\mu = 5$, $b = 5$. Przeprowadzić analizę zmian wskaźników tego systemu w zależności od zmiany długości kolejki: $b = 5, 10, 20, 50, 100$. Sprawdzić, że wskaźniki te zbliżają się do wskaźników systemu M/M/1.
- 7.2. Przeprowadzić porównawczą analizę systemów kolejkowych M/M/1 oraz M/M/1/b, jak w zadaniu 7.1, przy następujących danych systemu podstawowego:
 - a) $\lambda = 10$, $\mu = 14$, $b = 8$ i zmianie b w zakresie: 8, 10, 20, 50, 100;
 - b) $\lambda = 8,5$, $\mu = 12$, $b = 8$ i zmianie b w zakresie: 8, 10, 20, 50, 100;
 - c) $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $b = 5$ i zmianie b w zakresie: 5, 10, 20, 50;
 - d) $\lambda = 12$, $\mu = 14$, $b = 12$ i zmianie b w zakresie: 12, 20, 50, 100;
 - e) $\lambda = 10$, $\mu = 15$, $b = 12$ i zmianie b w zakresie: 12, 20, 50, 100.

DODATEK

1. Model układu mechanicznego wirującego

Program do symulacji układu napędowego z przykładu 2.2. Użyta procedura rozwiązywania równań różniczkowych: *ode45* z opcjami określonymi za pomocą procedury *odeset* (zwiększona dokładność rozwiązania: parametr 'RelTol', 1.0E-6 oraz niedopuszczenie do ujemnych wartości prędkości kątowej obciążenia: parametr 'NonNegative', [6]). Prawa strona równania różniczkowego (pochodna) jest obliczana w procedurze $f(t,x)$.

```
function przyklad_2_2
% Dynamika układu napędowego
clear all;
close all;
% Parametry układu:
dr = 0.05;           % współczynnik oporów silnika
dm = 0.045;          % współczynnik oporów obciążenia
kw = 30000;          % stała skretu sprzęgła
dw = 250.0;          % wsp. oporów skretu sprzęgła

Ten= 2013.5;          % znamionowy moment silnika
Te0 = 803.6;          % rozruchowy moment silnika
Tm0 = 730.0;          % początkowy moment obciążenia
Jr = 47.72;           % moment bezwładności silnika
Jm = 28.0;            % moment bezwładności obciążenia

sn=(1500-1465)/1500;  % poslizg znamionowy
pM=2.14;              % przeciążalność silnika (pM=Tek/Ten)
sk=sn*(pM+sqrt(pM^2-1)); % poslizg przy Tek: Te=2*pM*Ten./(sk/s+s/sk)
kn = 1.564;           % współcz. w modelu obciążenia
omg1=pi;

A=[-(dr+dw)/Jr -kw/Jr dw/Jr kw/Jr;1 0 0 0;
   dw/Jm kw/Jm -(dm+dw)/Jm -kw/Jm;0 0 1 0];

% Parametry symulacji

tmax = 2;              % okres symulacji, s
x0 = [0 0 0 0];        % warunki początkowe
tspan = linspace(0,tmax,500); % punkty rozwiązania
options = odeset('RelTol',1.0E-6,'NonNegative',[3]);

[t x] = ode45(@f,tspan,x0,options); % rozwiązanie równania
```

```

hold on
plot(tspan,x(:,1)*1500/pi,'r-'); % omgr, obr/min
plot(tspan,x(:,3)*1500/pi,'b-'); % omgm, obr/min
set(gca,'yLim',[0 1500]);
grid;
set(gca,'xLim',[0 tmax]);
figure
hold on
plot(tspan,x(:,2),'r-'); % gammar, rad
plot(tspan,x(:,4),'b-'); % gammam, rad
grid;
set(gca,'xLim',[0 tmax]);
figure
hold on
plot(tspan,(x(:,2)-x(:,4))*(25*180/pi)/pi,'r-'); % del_gamma, deg
grid;
set(gca,'xLim',[0 tmax]);

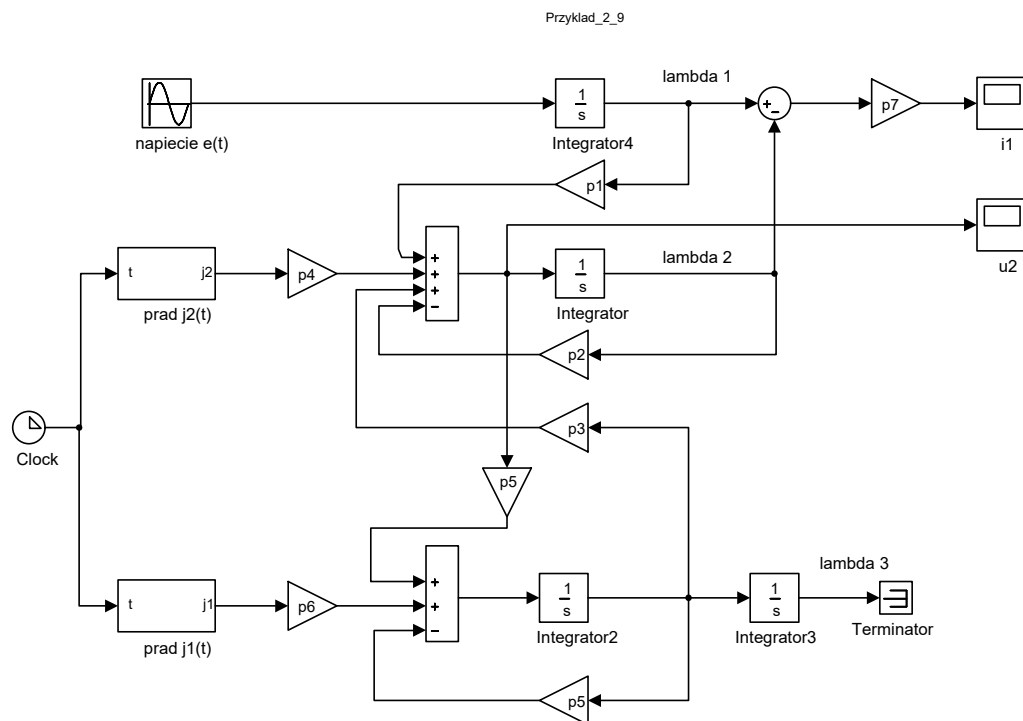
% -----
% Funkcja prawej strony rownania rozniczkowego
%
function dxdt = f(t,x)
% Pochodne funkcji
s=(omg1-x(1))/omg1;
Te=2*pM*Ten/(s/sk+sk/s);
if t>1, Te=0; end % wyłączenie napędu
Tm=Tm0*((x(3)/omg1)*(1+kn*(x(3)/omg1)^2));
u=[Te/Jr 0 -Tm/Jm 0]';
dxdt = A * x + u;
end
end

```

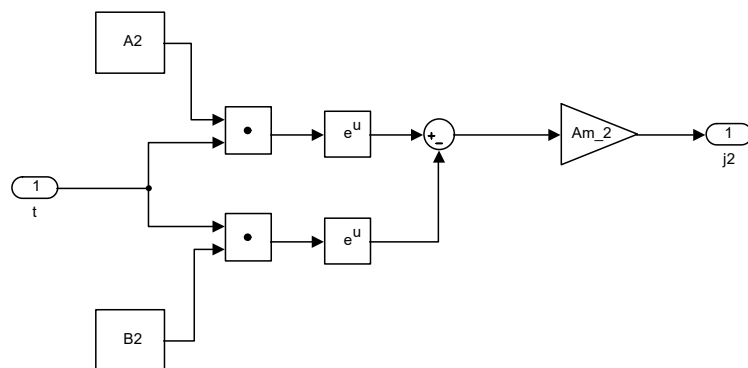
2. Model obwodu elektrycznego zgodnie z formalizmem Lagrange’a – metoda węzłowa

Model matematyczny sieci elektrycznej jest przedstawiony w przykładzie 2.9 (str. 54). Poniżej zamieszczone są procedury modelu w programie Matlab/Simulink. Źródła prądowe są reprezentowane w postaci oddzielnych bloków modelu. Ich struktura jest przedstawiona na rys. D.2.

Zadawanie parametrów modelu odbywa się przez uruchomienie programu typu script: przykl_2_9_param.m, który należy uruchomić przed rozpoczęciem symulacji z zastosowaniem głównej procedury przyklad_2_9.mdl.



Rys. D.1. Schemat modelu sieci z rys. 2.24

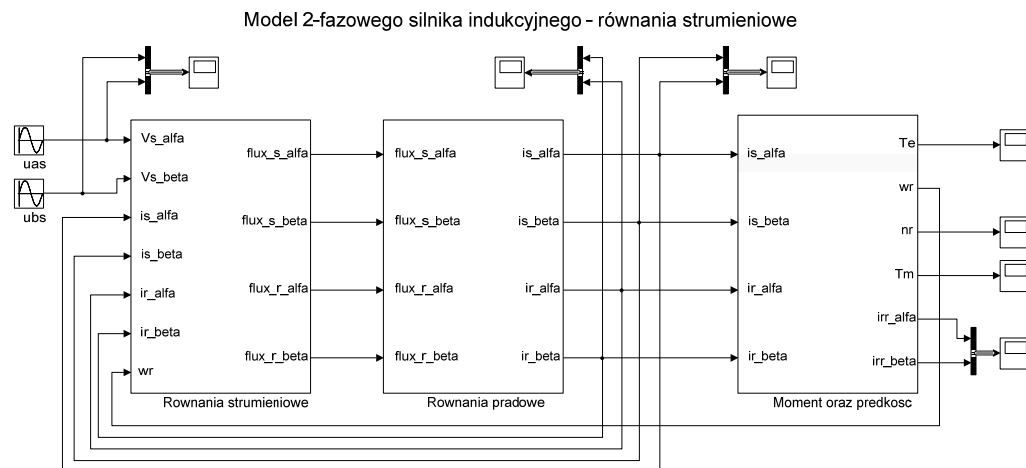
Rys. D.2. Schemat bloku prąd $j_2(t)$

Przebiegi uzyskane podczas symulacji są pokazane na rysunkach 2.25 oraz 2.26.

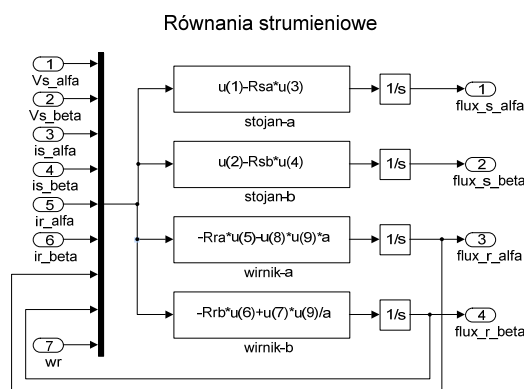
3. Model silnika 2-fazowego

Model matematyczny silnika 2-fazowego utworzony zgodnie z metodą węzłową został przedstawiony w przykładzie 2.10 (str. 57). Poniżej zamieszczone są procedury modelu w programie Matlab/Simulink. Model tworzą trzy bloki (rys. D.3), w których realizowane są procedury zgodnie ze schematami na rysunkach: D.4 - D.6: w procedurze 'Równania strumieniowe' są rozwiązywane równania (2.43), w procedurze 'Równania pradowe' - równania (2.45), natomiast w bloku 'Moment oraz predkosc' - równania (2.46) - (2.48).

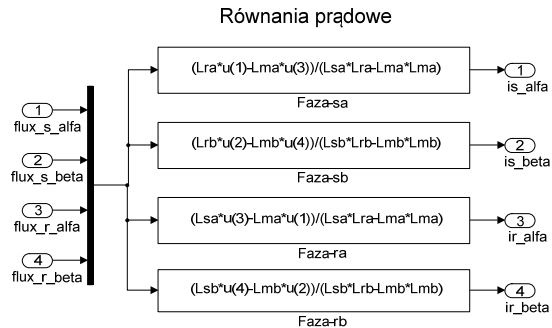
Program do symulacji jest umieszczony w pliku `silnik_2_fazowy_strumien.mdl`. Dodatkowo, parametry modelu oraz dane do symulacji znajdują się w pliku `silnik_2_fazowy_f50.m`.



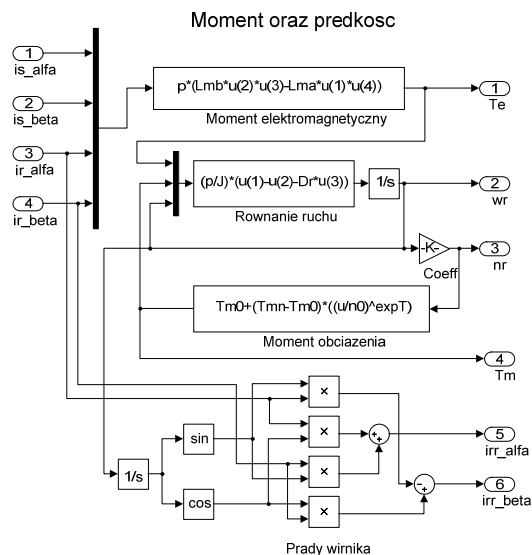
Rys. D.3. Schemat modelu Simulink do symulacji silnika 2-fazowego



Rys. D.4. Schemat procedury 'Równania strumieniowe' w modelu Simulink



Rys. D.5. Schemat procedury ‘Równania prądowe’ w modelu Simulink



Rys. D.6. Schemat procedury ‘Moment oraz predkosc’ w modelu Simulink

Przed rozpoczęciem symulacji według programu `silnik_2_fazowy_strumien.mdl`, należy uruchomić procedurę `silnik_2_fazowy_f50.m`, dzięki której wszystkie parametry modelu zostaną umieszczone w przestrzeni *Workspace* i będą dostępne w modelu Simulink. Przyjęto, że amplituda napięcia fazy *a* jest większa od amplitudy napięcia fazy *b* w stopniu określonym przez współczynnik *a*.

Plik danych i parametrów symulacji: `silnik_2_fazowy_f50.m`:

```
% parametry do programu: silnik_2_fazowy_strumien.mdl
clear all;
close all;
```

```
Un = 110; % napięcie zasilania, V
```

```

Unm=Un*sqrt(2);    % amplituda napięcia ubs
k_u=1.25;          % współczynnik niesymetrii zasilania: k_u=Ua/Ub, Ub = Unm
a=1.18;            % współczynnik niesymetrii uzwojen: a = Nsa/Nsb
f=50;              % częstotliwość napięcia zasilającego
p=2;               % liczba par biegunów silnika
n0=1465;           % znamionowa predkosc obrotowa, obr/min
Rsa=7.14;           % rezystancja fazy a uzwojenia stojana, ohm
Rsb=2.02;
Rra=5.74;
Rrb=4.12;

Lsa=0.2549;        % indukcyjnosc fazy a uzwojenia stojana, H
Lsb=0.1846;
Lra=0.2542;
Lrb=0.1828;
Lma=0.2464;
Lmb=0.1772;
J=2.92E-3;         % moment bezwladnosci, kg-m^2
Dr=0.0000025;      % współczynnik oporów ruchu, N-m-s-rad^-1
Tm0=0.1;           % początkowy moment obciążenia, N-m
Tmn=0.95;          % znamionowy moment obciążenia, M-m
expT=1.5;          % wykładnik w modelu obciążenia

```

W zbiorze plików z procedurami związanymi z przykładem 2.10 znajduje się także plik `silnik_2_fazowy_prad.mdl`, który zawiera model indukcyjnego silnika 2-fazowego, w którym równania różniczkowe względem strumienia elektromagnetycznego zostały zastąpione przez równania względem prądu. Utworzony w ten sposób model dynamiczny jest opisany w przykładzie 2.10, równania (2.51).

W przykładzie 2.11, (str. 66) jest przedstawiony podobny model silnika indukcyjnego 2-fazowego, przy czym, model matematyczny został wyprowadzony według formalizmu Lagrange'a, zgodnie z metodą węzłową. W tym przypadku, równania różniczkowe modelu matematycznego są zapisane względem odpowiednich strumieni elektromagnetycznych. Opracowany w programie Matlab/Simulink model jest umieszczony w pliku `silnik_2_fazowy_wezel.mdl`. Jest on równoważny modelowi z przykładu 0.10.

4. Równanie Duffinga

Program do rozwiązywania nieliniowego równania Duffinga i prezentacji wyniku w postaci przebiegu w czasie oraz trajektorii na płaszczyźnie fazowej. Program utworzony jest z procedury głównej w postaci zbioru `duff_1.m` oraz funkcji wewnętrznej `funct1`. Poniżej zamieszczony jest pełny tekst procedury. Parametry równania są wyszczególnione w wierszach ograniczonych znakami: `% *-----*`

```
% function [t,y]=duff_1
```

```

clear all;
close all;

% Rozwiazywanie rownania Duffinga
opts = odeset('RelTol',1e-5,'AbsTol',1e-5);

% *-----*
delta=0.2;
betha=0.1;
F=0.8;
omg=1;
omg02=-1;
% *-----*
tspan = [0; 100];           % okres symulacji
y0 = [0.001; 0];           % warunki poczatkowe

[t,y] = ode45(@funct1,tspan,y0,opts);

figure;
% przebiegi w czasie
plot(t,y(:,1),'-r',t,y(:,2),'-b'); grid
xlabel('czas t, s');
ylabel('y_1, y_2');

figure
% trajektoria fazowa
plot(y(:,1),y(:,2),'-b'); grid
title(['Rownanie Duffinga']);
xlabel('y_1');
ylabel('y_2');

% -----
function dydt = funct1(t,y)
    % Wartosci pochodnych
    dydt = [
        y(2)
        -omg02*y(1)-betha*y(1)^3-delta*y(2)+F*cos(omg*t)];
end
end % diff_1

```

5. Model Lorenza

Program `lorenz_1.m` do rozwiązywania równań Lorenza. Zastosowano procedurę całkowania `ode45`. Program korzysta z dodatkowej procedury `lorenz_0.m`, gdzie zapisane są parametry modelu oraz pochodne (prawe strony) równań. Poniżej zamieszczone są teksty obu zbiorów.

```

% Rownania Lorenza
% Do rozwiazania ukladu rownan Lorenza zastosowano metode ode45.
% Przedzial czasu: [0 okres] s, warunki poczatkowe: [0 1 5].
% Rownanie i parametry sa zdefiniowane w pliku lorenz_0.m

```

```

close all

options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
okres=20; % przedzial czasu modelowania
[T,Y] = ode45(@lorenz_0,[0 okres],[0 1 5],options);
% Wykres we wspolrzednych y1, y2, y3
plot3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3));
xlabel('Y1');
ylabel('Y2');
zlabel('Y3');
grid;
figure
plot(Y(:,1),Y(:,3)); grid;
% wykres przebiegow czasowych
figure
plot(T,Y(:,1), '-g',T,Y(:,2), '-m',T,Y(:,3), '-');
grid;

```

Oddzielny zbiór dyskowy: równania Lorenza

```

% -----
function dy = lorenz_0(t,y)
a=10;
b=28;
c=8/3;
dy = zeros(3,1); % a column vector
dy(1) = a*(y(2) - y(1));
dy(2) = b*y(1) - y(2) - y(1)*y(3);
dy(3) = -c*y(3) + y(1) * y(2);

```

6. Równania Rösslera

Program do symulacji dyskretnego systemu Rösslera jest zapisany w pliku `drossler_1.m`. Procedura odpowiada dyskretniej postaci równań.

```

% Rownania dyskretnie Rosslera
% do rozwiazania ukladu rownan Rosslera w wersji dyskretniej.

close all
clear all;

% parametry:
e=0.2;
m=5.7;
g=9;
f=0.1;
% warunki poczatkowe:
Y(1,:)= [0.2 0.01 0.01];
n=4000; % liczba punktow rozwiazania
T(1)=1;
for k=2:n,

```

```

Y(k,1)= Y(k-1,1)-(Y(k-1,2)+Y(k-1,3))/g;
Y(k,2)= Y(k-1,2)+(Y(k,1)+e*Y(k-1,2))/g;
Y(k,3)= Y(k-1,3)+(f+Y(k,1)*Y(k-1,3)-m*Y(k-1,3))/g;
T(k)=k;
end;
% Wykres we wspolrzednych y1, y2, y3
plot3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3));
xlabel('y1'); ylabel('y2'); zlabel('y3');
grid;
figure
plot(Y(:,2),Y(:,3));
xlabel('y2'); ylabel('y3');
grid;
% wykres przebiegow czasowych
figure
plot(T,Y(:,1), '-g',T,Y(:,2), '-m',T,Y(:,3), '-');
grid;

```

7. Program lyapunov

Program ten służy do obliczania wykładników Lapunowa dla systemu zadanego za pomocą równań stanu. Program jest zapisany w postaci trzech zbiorów dyskowych: `run_rossler.m`, `rossler_ext.m` oraz `lyapunov.m`. Dwa pierwsze pliki odnoszą się do przygotowanego przykładu z systemem równań Rösslera, który jest opisany w przykładzie 5.3. Użytkownik powinien odpowiednio zredagować te zbiory dla przygotowywanego zadania. Podstawowa procedura obliczeniowa w postaci funkcji `lyapunov` znajduje się w zbiorze `lyapunov.m`, która jest tu przytoczona w wersji dostępnej w Internecie⁵⁹:

Skrypt `run_rossler.m`:

```

% Start procedury lyapunov.m
n = 3; % liczb rownan systemu
tstart = 0; % czas poczatu obliczen
stept = 0.5; % krok procedury renormalizacji Gram-Schmidt
tend = 1000; % dlugosc symulacji, s
ystart = [0.2 0.3 0.5]; %warunki poczatkowe
ioutp = 10; % krok drukowania wynikow na ekranie MATLAB

[T,Res]=lyapunov(n,@rossler_ext,@ode45,tstart,stept,tend,ystart,ioutp);
plot(T,Res);
grid
title('Dynamika wykladnikow Lapunowa');
xlabel('Czas'); ylabel('Wykladniki Lapunowa');

```

⁵⁹

<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4628-calculation-lyapunov-exponents-for-ode/content/lyapunov.m>

Funkcja rossler_ext.m:

```
function f=rossler_ext(t,X)

% wartosci parametrow rownan Rosslera:
a = 0.15; b = 0.20; c = 10.0; % system chaotyczny
% a = 0.2; b = 0.2; c = 3.0; % system okresowy

x=X(1); y=X(2); z=X(3);
Y= [X(4), X(7), X(10);
    X(5), X(8), X(11);
    X(6), X(9), X(12)];
f=zeros(9,1);
% rownanie Rosslera:
f(1)=-y - z;
f(2)=x + a*y;
f(3)=b + z*(x - c);
% Jakobian systemu:
J=[0 -1 -1;
   1 a 0;
   z 0 x-c];
% rownanie wariacyjne:
f(4:12)=J*Y;
% wyjscie ma postac wektora kolumnowego
```

Funkcja lyapunov.m:

```
function [Texp,Lexp]=lyapunov(n,rhs_ext_fcn,fcn_integrator,.
                             tstart,stept,tend,ystart,ioutp);

%
%   Lyapunov exponent calculation for ODE-system.
%
%   The alogrithm employed in this m-file for determining Lyapunov
%   exponents was proposed in:
%       A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano,
%       "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series," Physica D,
%       Vol. 16, pp. 285-317, 1985.
%   For integrating ODE system can be used any MATLAB ODE-suite methods.
%   This function is a part of MATDS program:
%   - toolbox for dynamical system investigation
%   See: http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/matds/
%
%   Input parameters:
%       n - number of equation
%       rhs_ext_fcn - handle of function with extended ODE-system.
%                   This function must include RHS of ODE-system coupled with
%                   variational equation (n items of linearized systems, see Example).
%       fcn_integrator - handle of ODE integrator function, for example: @ode45
%       tstart - start values of independent value (time t)
%       stept - step on t-variable for Gram-Schmidt renormalization procedure.
%       tend - finish value of time
%       ystart - start point of trajectory of ODE system.
%       ioutp - step of print to MATLAB main window. ioutp==0 - no print,
```



```

%           if ioutp>0 then each ioutp-th point will be print.
%
%   Output parameters:
%       Texp - time values
%       Lexp - Lyapunov exponents to each time value.
%
%   Users have to write their own ODE functions for their specified
%   systems and use handle of this function as rhs_ext_fcn - parameter.
%
%   Example. Lorenz system:
%       dx/dt = sigma*(y - x)      = f1
%       dy/dt = r*x - y - x*z     = f2
%       dz/dt = x*y - b*z         = f3
%
%   The Jacobian of system:
%       | -sigma  sigma  0 |
%   J = |  r-z    -1   -x |
%       |   y     x   -b |
%
%   Then, the variational equation has a form:
%
%   F = J*Y
%   where Y is a square matrix with the same dimension as J.
%   Corresponding m-file:
%       function f=lorenz_ext(t,X)
%           SIGMA = 10; R = 28; BETA = 8/3;
%           x=X(1); y=X(2); z=X(3);
%
%           Y= [X(4), X(7), X(10);
%              X(5), X(8), X(11);
%              X(6), X(9), X(12)];
%           f=zeros(9,1);
%           f(1)=SIGMA*(y-x); f(2)=-x*z+R*x-y; f(3)=x*y-BETA*z;
%           Jac=[-SIGMA,SIGMA,0; R-z,-1,-x; y, x,-BETA];
%           f(4:12)=Jac*Y;
%
%   Run Lyapunov exponent calculation:
%       [T,Res]=lyapunov(3,@lorenz_ext,@ode45,0,0.5,200,[0 1 0],10);
%       See files: lorenz_ext, run_lyap.
%
% -----
% Copyright (C) 2004, Govorukhin V.N.
% This file is intended for use with MATLAB and was produced for MATDS-program
% http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/matds/
% lyapunov.m is free software. lyapunov.m is distributed in the hope that it
% will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY.
%
%       n=number of nonlinear odes
%       n2=n*(n+1)=total number of odes
%
n1=n; n2=n1*(n1+1);
%   Number of steps
nit = round((tend-tstart)/stept);

```

```

% Memory allocation
y=zeros(n2,1); cum=zeros(n1,1); y0=y;
gsc=cum; znorm=cum;
% Initial values
y(1:n)=ystart(:);
for i=1:n1 y((n1+1)*i)=1.0; end;
t=tstart;

% Main loop
for ITERLYAP=1:nit

% Solution of extended ODE system
[T,Y] = feval(fcn_integrator,rhs_ext_fcn,[t t+stept],y);
t=t+stept;
y=Y(size(Y,1),:);
for i=1:n1
    for j=1:n1 y0(n1*i+j)=y(n1*j+i); end;
end;

%
%      construct new orthonormal basis by Gram-Schmidt
%
znorm(1)=0.0;
for j=1:n1 znorm(1)=znorm(1)+y0(n1*j+1)^2; end;
znorm(1)=sqrt(znorm(1));
for j=1:n1 y0(n1*j+1)=y0(n1*j+1)/znorm(1); end;
for j=2:n1
    for k=1:(j-1)
        gsc(k)=0.0;
        for l=1:n1 gsc(k)=gsc(k)+y0(n1*l+j)*y0(n1*l+k); end;
    end;
    for k=1:n1
        for l=1:(j-1)
            y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)-gsc(l)*y0(n1*k+l);
        end;
    end;
    znorm(j)=0.0;
    for k=1:n1 znorm(j)=znorm(j)+y0(n1*k+j)^2; end;
    znorm(j)=sqrt(znorm(j));
    for k=1:n1 y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)/znorm(j); end;
end;

%
%      update running vector magnitudes
%
for k=1:n1 cum(k)=cum(k)+log(znorm(k)); end;

%
%      normalize exponent
%
for k=1:n1
    lp(k)=cum(k)/(t-tstart);
end;

% Output modification
if ITERLYAP==1
    Lexp=lp;
end;

```

```

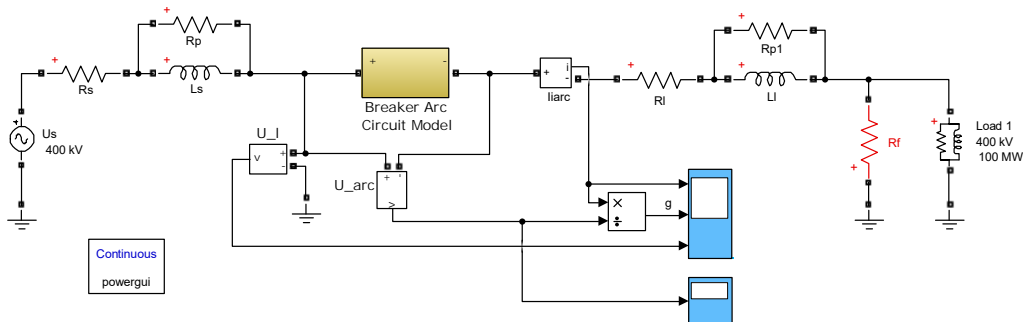
    Texp=t;
else
    Lexp=[Lexp; lp];
    Texp=[Texp; t];
end;

if (mod(ITERLYAP,ioutp)==0)
    fprintf('t=%6.4f',t);
    for k=1:n1 fprintf(' %10.6f',lp(k)); end;
    fprintf('\n');
end;
for i=1:n1
    for j=1:n1
        y(n1*j+i)=y0(n1*i+j);
    end;
end;
end;
end;

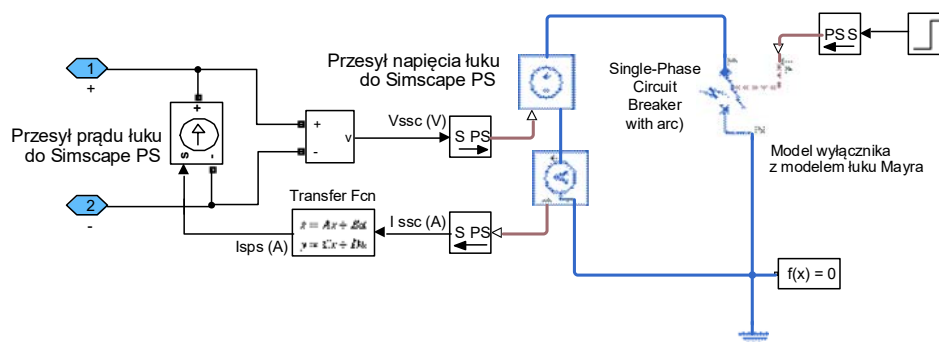
```

8. Model sieci elektrycznej z wyłącznikiem na bazie modelu Mayra

Model sieci elektrycznej z wyłącznikiem odwzorowującym model łuku Mayra jest pokazany na rys. D.7. Szczegóły modelu wyłącznika (blok Breaker Arc Circuit Model - BACM) są pokazane na rys. D.8. Elementy oznaczone na rysunku kolorem niebieskim są modelami dostępnymi w Matlab Toolbox Simscape. Cały program jest dostępny w pliku `model_mayr2.slx`. Model przedstawia fragment sieci napowietrznej 400kV (dla uproszczenia rozpatruje się tylko układ jednofazowy), w którym symulowane jest zwarcie (opornik $R_f = 0,1 \Omega$ jest załączony od początku symulacji). W chwili $t_{wył} = 12\text{ms}$ następuje wyłączenie wyłącznika BACM (rys. D.8). Towarzyszy temu procesowi łuk elektryczny, z którym związany jest stan przejściowy w sieci (rys. D.9 i rys. D.10).

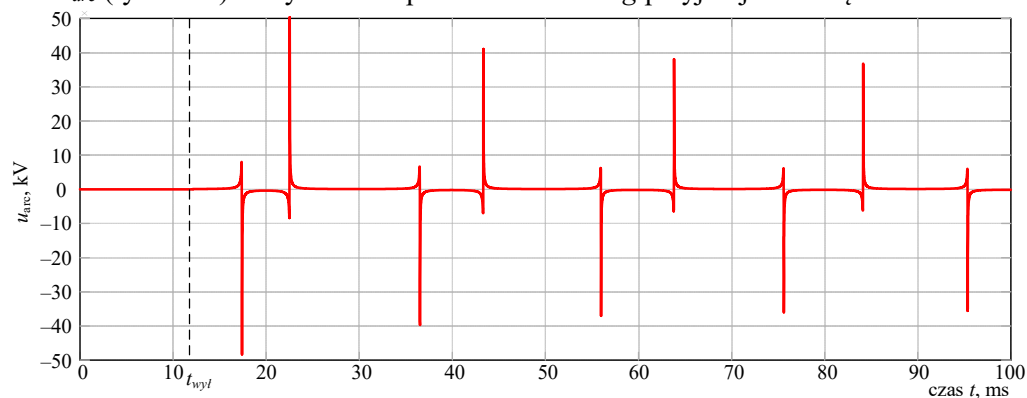


Rys. D.7. Schemat modelu sieci z modelem łuku Mayra

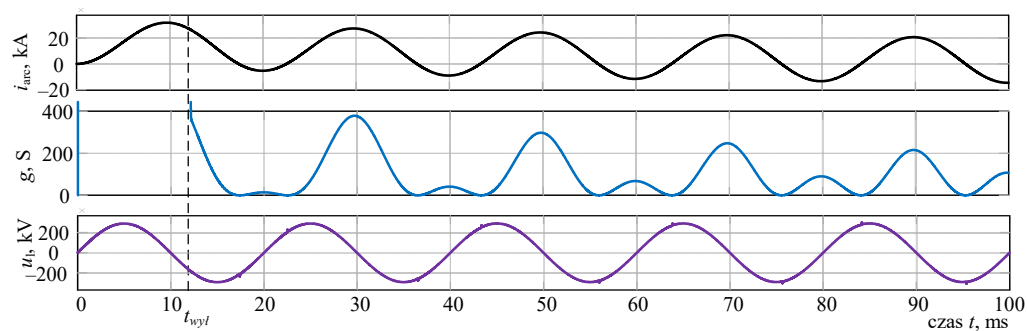


Rys. D.8. Schemat modelu wyłącznika z modelem łuku Mayra

Przebieg napięcia łuku u_{arc} jest pokazany na rys. D.9. Po otwarciu wyłącznika widoczne są charakterystyczne przepięcia, które występują w chwilach zmiany kierunku prądu łuku i_{arc} (rys. D.10). W tym czasie przewodność łuku g przyjmuje zerową wartość.

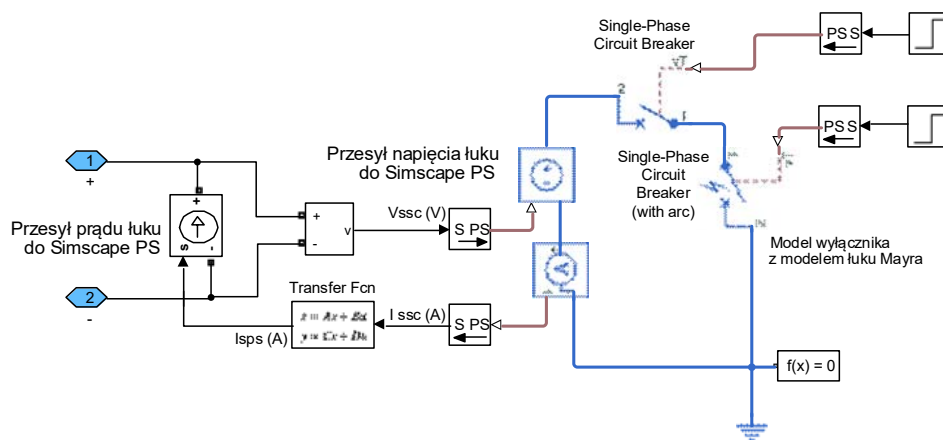


Rys. D.9. Przebieg napięcia łuku



Rys. D.10. Zarejestrowane wyniki symulacji: i_{arc} – prąd łuku, g – przewodność łuku, u_l – napięcie linii

Można zauważyć, że otwarcie wyłącznika inicjuje proces palenia się łuku (zgodnie z przyjętym modelem Mayra), co jednak nie przerywa obwodu, gdyż proces ten wznowia się w kolejnych okresach. Do odtworzenia bardziej naturalnego przebiegu zjawiska wyłączenia zwarcia niezbędna jest dodatkowa rozbudowa modelu wyłącznika (rys. D.11). Model Simulink z tym zmodyfikowanym modelem wyłącznika jest zapisany w pliku `model_mayr2b.slx`. W tym przypadku, dodany model wyłącznika Single-Phase Circuit Breaker powoduje jego wyłączenie w momencie zmiany kierunku przepływającego prądu.



Rys. D.11. Schemat zmodyfikowanego modelu wyłącznika z modelem łuku Mayra

Szczegóły odnoszące się do właściwości poszczególnym modeli elementów z bloku Toolbox Simscape można uzyskać w opcji Help, po dwukrotnym kliknięciu na ikonę odpowiedniego modelu na ekranie edycji Simulink. Należy zauważyć, że koncepcja tworzenia modeli układów fizycznych w Toolbox Simscape w niektórych aspektach znacznie odbiega od zasad stosowanych w standardowej bibliotece modeli Simulink.

9. Model elektrycznego łuku spawalniczego

Program do symulacji obwodu elektrycznego z modelem łuku spawalniczego, który jest prezentowany w p. 5.5.6 składa się z dwóch zbiorów: `luk_spawl.m` oraz `row_spaw.m`. Różniczkowe równania zmiennych stanu są zdefiniowane w tym drugim zbiorze. Równania modelu są utworzone na podstawie analizy prowadzonej w p. 5.5.6 (str. 179). Parametry obwodu elektrycznego oraz warunki początkowe zostały dobrane z punktu widzenia wywołania w układzie drgań chaotycznych. Poniżej zamieszczono teksty obu procedur.

Skrypt luk_spaw1.m:

```
% Rownania obwodu z elektrycznym lukiem spawalniczym
% Do rozwiazania rownan stanu zastosowano metode ode15s.
% Przedzial czasu: [0 1000] s, warunki poczatkowe: [0.2;0.2;1].
% Rownanie jest zdefiniowane w pliku row_spaw.m

close all
% parametry modelu
czas = [0, 1000];
y0=[0.2;0.2;1];
L = 1;
R = 15;
C = 3.405;
n = -1/3;
% rozwiazywanie rownan stanu
options = odeset('RelTol',1e-10,'AbsTol',[1e-12 1e-12 1e-12]);
ode = @(t,y) row_spaw(t,y,L,n,R,C);
[t,y] = ode15s(ode, czas, y0, options);

figure(1)
plot(t,10*y(:,1),'-r',t,10*y(:,2),'-k',t,y(:,3),'-b');
title('Przebiegi zmiennych stanu');
set(gca,'XLim',[0 500])
xlabel('t'); ylabel('y')
legend(gca,'10x','10y','z');
grid

figure(2)
% portret fazowy
plot(y(:,1),y(:,3),'-b');
title('Portret fazowy x-z');
xlabel('x'); ylabel('z')
grid

figure(3)
% portret fazowy
plot(y(:,2),y(:,3),'-b');
title('Portret fazowy y-z');
xlabel('y'); ylabel('z')
grid

figure(4)
% portret fazowy
plot(y(:,1),y(:,2),'-b');
title('Portret fazowy x-y');
xlabel('x'); ylabel('y')
grid
```

Funkcja row_spaw.m:

```
% -----
function dydt = row_spaw(t,y,L,n,R,C)
```

```
% rownanie luku spawalniczego wg p. 5.5.6
% pochodne = układ równan:
dydt = [(y(2)-y(1)*y(3)^(n/2-0.5))/L;
        (1-y(2)+R*(1-y(1)))/(R*C);
        y(1)*y(1)-y(3)];

% zmienne:
% y(1) = x
% y(2) = y
% y(3) = z
```

10. Model kolejki M/M/1

Program do symulacji kolejki składa się z dwóch zbiorów programu Matlab: symulacja_M_M_1.m oraz funkcji uruchom.m. Poniżej zamieszczone są teksty obu zbiorów.

Start programu odbywa się przez uruchomienie procedury symulacja_M_M_1.m.

```
% Model symulacyjny kolejki z jednym stanowiskiem obsługi (serwerem): M/M/1

% Na podstawie: McGraw Hill - Simulation Modeling and Analysis -
% Averill M. Law - W. David Kelton, 2003

% Wywoływane funkcje:   uruchom.m (główna procedura)
% Czas przybycia i obsługi są definiowane w procedurach wejscie oraz obsluga

clear all
close all

global Q_Granica          % graniczna długość kolejki
global Lambda            % intensywnosc zgłoszeń (1/godz)
global Mu                % intensywnosc obsługi (1/godz)
global s_liczba_sym_zdarzen % srednia liczba symulowanych zdarzeń
global rodz_n_zdarzenia  % rodzaj następnego zdarzenia
global liczba_w_syst      % liczba zdarzeń w systemie do bieżącego czasu
global l_r_zdarzen        % liczba rodzajów zdarzeń
global liczba_w_q         % liczba zdarzeń w kolejce
global status_obsługi    % status obsługi
global czas_kolejki       % czas oczekiwania w kolejce
global obszar_obsługi     % czas pracy obsługi
global czas_b            % czas bieżący
global czas_z_wej         % czas zdarzenia na wyjściu
global czas_o_zdarzenia   % czas wystąpienia ostatniego zdarzenia
global czas_n_zdarzenia   % czas następnego zdarzenia
global ogolny_czas        % czas trwania symulacji
global sr_czas_sys        % sredni czas jednostki w systemie

% parametry symulacji
Q_Granica=200;           % graniczna długość kolejki
```

```

delT_in=1/4;           % czas miedzy zglosz. (godz)
delT_out=12/60;        % czas obslugi (godz)
s_liczba_sym_zdarzen=1000; % liczba symulowanych zdarzeń

obszar_obsługi=0;      % zerowanie licznika
l_r_zdarzen=2;         % liczba rodzajow zdarzeń:
                        % 1 - wejscie, 2 - obsluga, 0 - brak zdarzen
Lambda=1/delT_in;      % intensywnosc zgłoszen (1/godz)
Mu=1/delT_out;         % intensywnosc obsługi (1/godz)

uruchom(l_iter);       % uruchomienie symulacji

% sporządź raport

disp(['Dane odnoszace sie do ostatniej iteracji:']);
disp(['Średni czas w systemie : ',num2str(ogolny_czas/liczba_w_syst),' godz.']);
disp(['Średnia długość kolejki : ',num2str(czas_kolejki/czas_b)]);
disp(['Wykorzystanie obsługi : ',num2str(obszar_obsługi/czas_b)]);
disp(['Czas wykonania symulacji: ',num2str(czas_b)]);
disp([' ']);

Plik uruchom.m z funkcjami: uruchom(), zegar, wejście, obsługa,

% Funkcja inicjująca
% Wywoływane funkcje:   wewnetrzne

% Wywołanie z:          symulacja M_M_1.m (główna procedura)

function uruchom(l_iter)

global Lambda           % intensywnosc zgłoszen
global s_liczba_sym_zdarzen % srednia liczba symulowanych zdarzeń
global rodz_n_zdarzenia   % rodzaj nastepnego zdarzenia
global liczba_w_syst      % liczba zdarzen w systemie do biezacego czasu
global liczba_w_q         % liczba zdarzen w kolejce
global status_obsługi     % status obslugi
global czas_kolejki       % czas oczekiwania w kolejce
global obszar_obsługi     % czas pracy obslugi
global czas_b            % czas biezacy
global czas_o_zdarzenia   % czas wystapienia ostatniego zdarzenia
global czas_n_zdarzenia   % czas nastepnego zdarzenia
global ogolny_czas        % czas trwania symulacji
global W_s               % sredni czas jednostki w systemie

% dla kolejnych iteracji
for ni=1:l_iter,
    N_iter(ni)=0;          % srednia liczba oczekujących w iteracji
    czas_b=0.0;           % zegar, czas biezacy

    status_obsługi=0;      % stan obslugi
    liczba_w_q=0;          % długość kolejki
    czas_o_zdarzenia=0.0;

```



```

liczba_w_syst=0;           % początkowa liczba klientów w systemie
ogolny_czas=0.0;           % początkowa wartość czasu
czas_kolejki=0.0;
obszar_obslugi=0.0;
t=[]; L_q=[]; T=[]; Tq=[];
W_s=[];

% Pseudolosowy czas zdarzenia: funkcja wykładnicza
u = rand(1);
czas_n_zdarzenia(1) = czas_b - log(u)/Lambda;
czas_n_zdarzenia(2) = 1.0*exp(30);

%
k=0;
% prowadź symulację gdy obsłużono mniejszą liczbę klientów niż założono
while(liczba_w_syst < s_liczba_sym_zdarzen)
    k=k+1;
    zegar;           % następne zdarzenie

    % zapisz dane statystyczne

    delta_czas = czas_b - czas_o_zdarzenia;
    czas_o_zdarzenia = czas_b;

    czas_kolejki = czas_kolejki + liczba_w_q * delta_czas;
    obszar_obslugi = obszar_obslugi + status_obslugi * delta_czas;
    %
    if (rodz_n_zdarzenia==1)
        wejscie;           % wywołaj procedurę wejścia (kolejki)
    elseif (rodz_n_zdarzenia==2)
        obsluga;           % wywołaj procedurę obsługi (wyjścia)
    end

    t(k)=czas_b;
    L_q(k)=liczba_w_q;
    % odstęp czasu pomiędzy zdarzeniami na wejściu:
    T(k)=czas_n_zdarzenia(1)-czas_o_zdarzenia(1);
    Tq(k)=czas_kolejki/czas_b;           % srednia dlugosc kolejki
    W_s(k)=ogolny_czas/liczba_w_syst;   % sredni czas w systemie
    N_iter(ni)=N_iter(ni) + L_q(k);

end % while

N_iter(ni)=N_iter(ni)/k;

end; % ni=1:l_iter,

% raport graficzny dla ostatniej iteracji

figure
subplot(2,1,1);
plot(t,L_q);
xlabel('Czas, godz')
```

```

ylabel('Liczba oczekujących w kolejce')
grid
subplot(2,1,2)
plot(t,Tq);
xlabel('Czas, godz')
ylabel('Srednia dlugosc kolejki')
grid

figure;
subplot(2,1,1);
plot(t,T);
xlabel('Czas, godz')
ylabel('Odstep czasu na wejsciu, godz.')
grid
subplot(2,1,2)
plot(t,W_s);
xlabel('Czas, godz')
ylabel('Sredni czas w systemie, godz.')
grid

% -----
% Funkcje

function zegar

global rodz_n_zdarzenia l_r_zdarzen czas_b czas_n_zdarzenia

    min_czas_n_zdarzenia=1.0*exp(29);

    rodz_n_zdarzenia=0;

    % określenie następnego rodzaju zdarzenia

    for i=1:l_r_zdarzen

        if(czas_n_zdarzenia(i)<min_czas_n_zdarzenia)
            min_czas_n_zdarzenia = czas_n_zdarzenia(i);
            rodz_n_zdarzenia = i;
        end;

    end

    if(rodz_n_zdarzenia == 0)
        disp(['Lista zdarzeń pusta w czasie ',num2str(czas_b)]);
    end

    czas_b=min_czas_n_zdarzenia;

% -----
function wejscie
% Funkcja generująca zdarzenie na wejściu

global Q_Granica Lambda Mu liczba_w_syst liczba_w_q status_obslugi ...

```

```

        czas_b czas_z_wej czas_n_zdarzenia

% Pseudolosowy czas zdarzenia: funkcja wykladnicza
u = rand(1);
czas_n_zdarzenia(1) = czas_b - log(u)/Lambda; % czas następnego wejścia

% sprawdź, czy obsługa jest zajęta
if(status_obsługi == 1) % obsługa jest zajęta

    liczba_w_q = liczba_w_q + 1 ; % zwiększ liczbę oczekujących w kolejce

    if(liczba_w_q > Q_Granica)
        disp(['długość kolejki = ', num2str(liczba_w_q)]);
        disp(['Przepełnienie długości kolejki w: ', num2str(czas_b)]);
        pause
    end

    czas_z_wej(liczba_w_q) = czas_b;

else % obsługa nie jest zajęta

    liczba_w_syst = liczba_w_syst + 1;
    status_obsługi = 1;

    % Pseudolosowy czas obsługi: funkcja wykladnicza
    u = rand(1);
    czas_n_zdarzenia(2) = czas_b - log(u)/Mu; % czas następ. wyjścia

end

% -----
function obsługa
% Funkcja generująca zdarzenie na wyjściu

global Mu liczba_w_syst liczba_w_q status_obsługi ...
    czas_b czas_z_wej czas_n_zdarzenia ogolny_czas

if(liczba_w_q == 0)
    % kolejka jest pusta więc usun obsługę oraz działania na wyjściu

    status_obsługi = 0;
    czas_n_zdarzenia(2) = 1.0*exp(30);

else
    % kolejka nie jest pusta, więc zmniejsz liczbę jednostek

    liczba_w_q = liczba_w_q - 1;

    delta = czas_b - czas_z_wej(1);
    ogolny_czas = ogolny_czas + delta;

    liczba_w_syst = liczba_w_syst + 1;

```

```
% Pseudolosowy czas obslugi: funkcja wykladnicza
u = rand(1);
czas_n_zdarzenia(2) = czas_b - log(u)/Mu;

% przesun rejestr czasu zdarzen na wejsciu
for i = 1:liczba_w_q
    czas_z_wej(i)=czas_z_wej(i+1);
end

end
```

LITERATURA

1. ALLIGOOD K.T., SAUER T.D., YORKE J.A., *Chaos. An introduction to dynamical systems*. Springer-Verlag New York, Inc. 2000.
2. ARNOLD W.I., *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*. PWN. Warszawa 1981.
3. AWREJCEWICZ J., *Matematyczne modelowanie systemów*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa 2007.
4. AWREJCEWICZ J., *Tajemnice nieliniowej dynamiki*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1997.
5. BIAŁYNICKI-BIRULA I., BIAŁYNICKA-BIRULA I., *Modelowanie rzeczywistości. Jak w komputerze przegląda się świat*. WNT, Warszawa 2007.
6. BIRTA L.G., ARBEZ G., *Modelling and Simulation*, Springer-Verlag London Limited 2007.
7. CHATURVEDI D.K., *Modeling and Simulation of Systems Using MATLAB and Simulink*. CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2010.
8. CHUA L.O., *The Genesis of Chua's Circuit*, AEU 46, 250 (1992).
9. CZEMPLIK A., *Modele dynamiki obiektów fizycznych*, WNT, Warszawa 2008.
10. De SILVA C.W., *Modeling and Control of Engineering Systems*. CRC Press, Boca Raton 2009.
11. EMIRSAJŁOW Z., *Teoria układów sterowania*. Część I. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, 2000.
12. FERRACI P., *Ferroresonance*. Cahier technique no. 190, Groupe Schneider, March 1998.
13. FORTUNA Z., MACUKOW B., WAŚOWSKI J., *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa, 2003.
14. GERSTENKORN T., ŚRÓDKA T., *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*. PWN Warszawa 1983.
15. GHOLIZADEH H., HASSANNIA A., AZARFAR A., *Chaos detection and control in a typical power system*. Chin. Phys. B Vol. 22, No. 1 (2013), 010503.
16. GOGOLEWSKI Z., KUCZEWSKI Z., *Napęd elektryczny*. WNT Warszawa 1971.
17. GOULD H., TOBOCHNIK J., CHRISTIAN W., *An Introduction to Computer Simulation Methods*. Dostępne w: <http://www.compadre.org/OSP/document/ServeFile.cfm?ID=7375>
18. HALLIDAY D., RESNICK R., WALKER J., *Podstawy fizyki*, t. 1 - 5, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003 - 2015.
19. JAKUBOWSKI J., SZTENCEL R., *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. SCRIPT, Warszawa 2001.
20. JÓZEFOWSKA J., *Badania operacyjne i teoria optymalizacji*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2012.
21. KACZOREK T., *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*, WNT, Warszawa, 1998.
22. KACZOREK T., DZIELIŃSKI A., DĄBROWSKI W., ŁOPATKA R., *Podstawy teorii sterowania*. WNT Warszawa 2016.
23. KANAMARU T., *Duffing oscillator*. Scholarpedia, 2008, 3(3):6327. Dostępne w: http://www.scholarpedia.org/article/Duffing_oscillator.

24. KENNEDY P., *Genealogy of Chua's Circuit*. W: *Chaos, CNN, Memristors and Beyond: A Festschrift for Leon Chua*. Edited by Adamatzky A. et al. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013, pp. 3–24.
25. KORSCH H.J., JODL H.-J., HARTMANN T., *Chaos. A Program Collection for the PC*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008.
26. KRAUSE P.C., WASYN CZUK O., SUDHOFF S.D., *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2002.
27. KRÓLIKOWSKI Cz. *Technika łączenia obwodów elektroenergetycznych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1990.
28. KRUPKA J., MORAWSKI R.Z., OPALSKI L.J., *Wstęp do metod numerycznych dla studentów elektroniki i technik informacyjnych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1999.
29. KUDREWICZ J., *Nieliniowe obwody elektryczne. Teoria i symulacja komputerowa*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
30. KUZNETSOV N., LEONOV G., *Numerical justification of Leonov conjecture on Lyapunov dimension of Rossler attractor*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 19, Issue 4, April 2014, pp. 1027–1034.
31. КУЗНЕЦОВ А.П., КУЗНЕЦОВ С.П., РЫСКИН Н.М., *Нелинейные колебания*. Физматлит, 2002.
32. LEONHARD W., *Control of electrical drives*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
33. MACHADO J.T., LOPES A.M., VALÉRIO D., GALHANO A.M., *Solved Problems in Dynamical Systems and Control*. The Institution of Engineering and Technology, London 2017.
34. MACHOWSKI J., *Regulacja i stabilność systemu elektroenergetycznego*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007.
35. MARION J.B., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Academic Press Inc., London 1965.
36. MARTINEZ-VELASCO J.A.(editor), *Power system transients: parameter determination*. CRC Press. Taylor & Francis Group, Boca Raton 2010.
37. PARKER T.S., CHUA L.O., *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer-Verlag; 1989. Dostępne w: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-3486-9>
38. REDDY T.A., *Applied Data Analysis and Modeling for Energy Engineers and Scientists*. Springer Science+Business Media, New York, LLC 2011.
39. ROSENSTEIN M. T., COLLINS J. J., De LUCA C. J., *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*. Physica D. 1993;65:117–134.
40. ROSOŁOWSKI E., *Komputerowe metody analizy elektromagnetycznych stanów przejściowych*. http://zas.ie.pwr.wroc.pl/ER/Komp_metody.pdf
41. ROSOŁOWSKI E., *Automatyczne sterowanie i regulacja. Procesy ciągłe i dyskretne*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2020.
42. RUBINOWICZ W., KRÓLIKOWSKI W., *Mechanika teoretyczna*. Wydawnictwa Naukowe PWN. Warszawa 2012. Dostępne w: <http://libra.ibuk.pl/book/93523>
43. САМАРСКИЙ А.А., МИХАЙЛОВ А.П., *Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры*. Физматлит, Москва, 2001. (Angielskie tłumaczenie: Samarskii A.A., Mikhailov A.P., *Principles of mathematical modeling. Ideas. Methods. Examples*. Taylor & Francis, London and New York, 2002).
44. SEVERANCE F.L., *System Modeling and Simulation. An Introduction*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester 2001.
45. СИДОРЕЦ В.Н., ПЕНТЕГОВ И.В., *Детерминированный хаос в нелинейных цепях с электрической дугой*. Международная ассоциация «Сварка», Киев, 2013.

46. SKIADAS C.H., SKIADAS C., *Chaotic Modelling and Simulation. Analysis of Chaotic Models, Attractors and Form*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009.
47. STOER J., BULRISCH R., *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa, 1987.
48. STROGATZ S.H., *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Perseus Books Publishing, L.L.C., 1994.
49. ULAM S., *Przygody matematyka*. Prószyński i S-ka, Warszawa 1996.
50. WELLSTEAD P.E., *Introduction to physical system modelling*. Control Systems Principles, 2000. Dostępne w: <http://docplayer.net/20829691-Introduction-to-physical-system-modelling.html>
51. WINKLER W., WISZNIEWSKI A., *Automatyka zabezpieczeniowa w systemach elektroenergetycznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2018.
52. ZHANG H., LIU D., *Fuzzy Modeling and Fuzzy Control*, Birkhäuser, Boston, 2006.
53. ZIÓŁKO M., *Modelowanie zjawisk falowych*. Wydawnictwa AGH, Kraków 2000.
54. ŻARDECKI D., *Piecewise Linear luz(...) and tar(...) Projections. Part 2 – Application in Modelling of Dynamic Systems with Freeplay and Friction*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 44, 1, 2006, pp. 185-202.
55. ŻARDECKI D., DĘBOWSKI A., *Methods of Simulation Investigations of Non-linear Vibrations in the Steering System of a Motorcycle*. In: Dynamical Systems in Applications, J. Awrejcewicz (ed.), Springer International Publishing AG, part of Springer Nature 2018, pp. 497 – 506.

Inne ciekawe strony internetowe:

56. <http://www.csit.fsu.edu/~burkardt/> – wiele ciekawych programów numerycznych, BURKARDT J.
57. <http://public.lanl.gov/mewall/kluwer2002.html> – omówienie zagadnienia SVD.
58. <http://www.intechopen.com/books> – InTech - Open Access Publisher (dostępnych jest wiele ciekawych książek).
59. http://www.scholarpedia.org/article/Chua_circuit – chaotyczny obwód Chua.
60. <http://sprott.physics.wisc.edu/chaostsa/>
61. <http://mathworld.wolfram.com/DuffingDifferentialEquation.html> – równanie modelu Duffinga.
62. http://213.184.15.149/wwwkipr/Wyklady_PDF/Modelowanie%20systemow/Modelowanie%20%283%29.pdf – MYHAN R., Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych, cz. I.
63. http://213.184.15.149/wwwkipr/Wyklady_PDF/Modelowanie%20systemow/Modelowanie%20%284%29.pdf – MYHAN R., Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych, cz. II.
64. https://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_exponent – wskaźniki Lapunowa.
65. <http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/matds/> – badanie systemów dynamicznych; przykłady w programie MATLAB.
66. <http://sprott.physics.wisc.edu/technote.htm> – przykłady numeryczne do analizy systemów dynamicznych, SPROTT J.C. [60].
67. <http://www.czm.mif.pg.gda.pl/wp-content/uploads/baza%20wiedzy/mtzmd2014/Zardecki.pdf> – materiały z konferencji: "Między teorią a zastosowaniami: Matematyka w działaniu", Będlewo 2014.
68. <https://docs.google.com/file/d/0B7gb0hh2qhqBX1g4RGR2MWROS0k/preview> - Fundamentals of physics / David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker.—9th ed. – znana książka w wersji internetowej.
69. <http://home.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/> **e-Fizyka AGH** Podstawy Fizyki, copyright @ Zbigniew Kąkol, Jan Żukrowski, 2002-2017

SKOROWIDZ

A

atraktor, 77
dziwny, 77
prosty, 77

B

bifurkacja, 77, 143

C

chaos deterministyczny, 131
charakterystyka magnesowania, 83

D

diagram bifurkacji, 143
dioda Chua, 139
dynamiczne systemy nieliniowe, 71, 131, 208
dystrybuanta, 187

E

efekt motyla, 133

F

ferrorezonans, 156
formalizm
Hamiltona, 42
Lagrange'a, 33, 38
funkcja
Hamiltona, 41
Lagrange'a, 36
funkcja gęstości prawdopodobieństwa, 187

G

generowanie liczb losowych, 194

H

hiperchaos, 145

Ł

łuk elektryczny
model, 166, 179
Cassiego, 170
dynamiczny, 169
Habedanka, 177
Kizilcaya, 176
Mayra, 174
Schavemakera, 178
Schwarza, 177
statyczny, 167
Warringtona, 167
wtórny, 177
zwarcioowy, 167

M

metoda
charakterystyk, 120
Monte Carlo, 200
model
charakterystyki magnesowania, 158
ciągły, 14
cyfrowy, 14
linii elektrycznej, 121
dyskretny, 14
linii
bezstratnej, 120
długiej, 118
łuku elektrycznego, *zobacz* łuk elektryczny
matematyczny, 11
przepływu ciepła, 129
przepływu płynu, 130
strat w żelazie, 157
tarcia lepkiego, 96
tarcia suchego, 92

moduł Younga, 113
moment centralny, 190

O

obsługa kolejki, 214
obwód Chua, 139
odchylenie standardowe, 190
odzworowanie Poincarégo, 87

P

prawo
 Feigenbauma, 144
 Kirchhoffa, 19, 43, 53
 niezmienniczości, 43
proces Markowa, 217
proces stochastyczny, 186
przestrzeń konfiguracyjna, 33

R

rozkład
 dwumianowy, 191
 Erlanga, 193, 199
 Poissona, 192, 197
 prawdopodobieństwa, 186
 równomierny, 190
 wykładniczy, 192, 195
rozkład zmiennej losowej, 185
równanie
 Duffinga
 liniowe, 86
 nieliniowe, 85, 134
 Hamiltona, 40
 Lagrange'a, 36, 38
 logistyczne, 143
 Lorenza, 132
 Newtona, 38
 Rösslera, 142
 Van der Pola, 83
 więzów, 34
równoważność modeli, 20, 26, 115

S

stopień swobody układu, 34

symulacja, 12
system
 kolejkowy, 215
 klasyfikacja, 216
 M/M/1, 217
 M/M/1/b, 224
 M/M/s, 222
 obsługi masowej, 214
 zależny od zdarzeń, 213
system dynamiczny, 14
system zachowawczy, 77

T

teoria chaosu, 131

U

układ
 mechaniczny
 obrotowy, 25
 posuwisty, 20
 nieliniowy
 punkt równowagi, 78, 82
 stan ustalony, 77

W

wartość oczekiwana, 189
wektor Poyntinga, 117
współczynnik
 sprężystości, 113
współrzędne
 biegunowe, 35
 kartezjańskie, 34
 obwodu elektrycznego, 43
 sferyczne, 34
 uogólnione, 36
wykładnik Lapunowa, 145, 147, 149, 164
wzór Klossa, 28

Z

zabezpieczenie odległościowe linii, 167
zmienna losowa, 185, 187
 ciągła, 187
 dyskretna, 187

