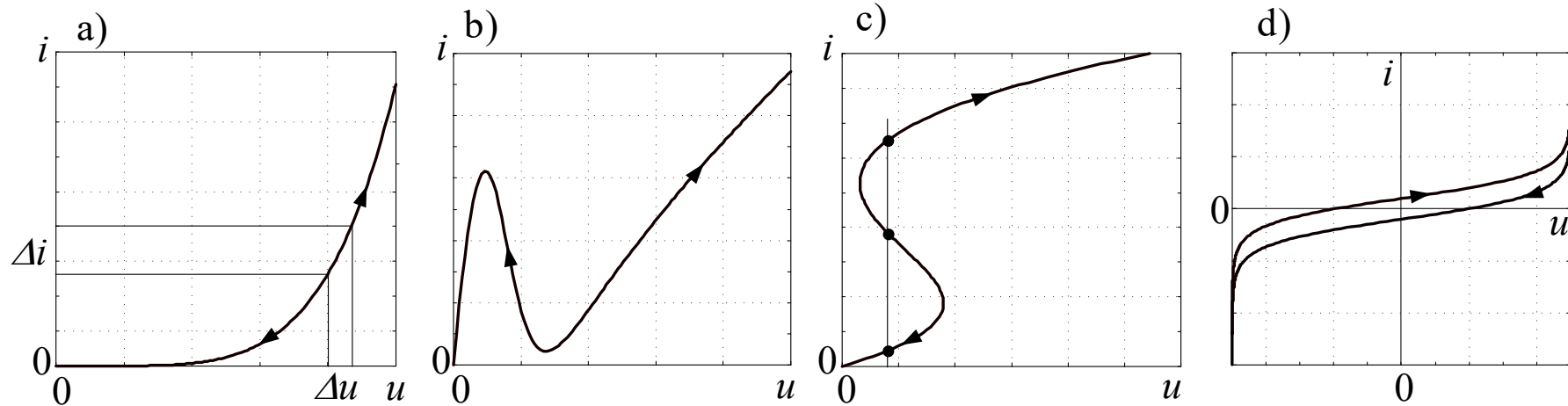


Modelowanie sieci nieliniowej

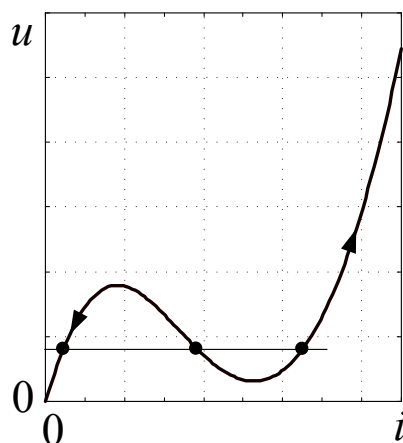
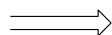
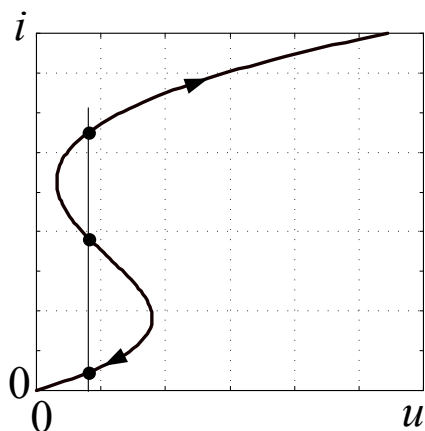
Sieć zawierająca chociażby jeden element nieliniowy jest siecią nieliniową. Matematyczny model takiej sieci wymaga zastosowania specjalnego podejścia, który powinien zapewnić jej rozwiązanie. Przykłady charakterystyk elementów nieliniowych:



$$G(u) = \left. \frac{\Delta i}{\Delta u} \right|_{\Delta u \rightarrow 0} = \frac{di}{du}$$

Modelowanie sieci nieliniowej

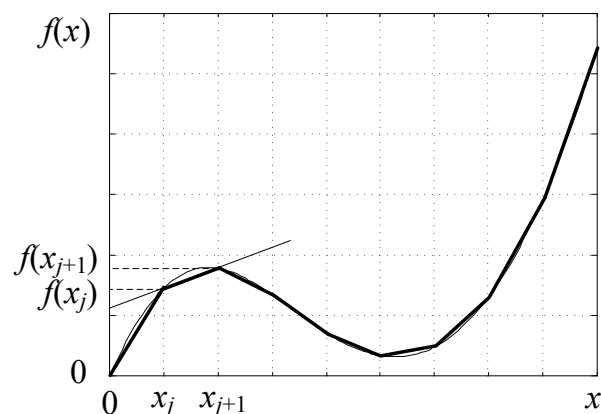
Charakterystyka elementu powinna być jednoznaczna:



$$G(u) = \left. \frac{\Delta i}{\Delta u} \right|_{\Delta u \rightarrow 0} = \frac{di}{du}$$

$$R(i) = \left. \frac{\Delta u}{\Delta i} \right|_{\Delta i \rightarrow 0} = \frac{du}{di}$$

Reprezentacja odcinkowo-liniowa charakterystyki nieliniowej:



$$f_j(x) = f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} (x - x_j)$$

$$\frac{df_j(x)}{dx} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

Modelowanie sieci nieliniowej

Rozwiązywanie równań nieliniowych: metoda Newtona

- funkcja nieliniowa: $f(x) = 0$
- zakłada się, że x_1 leży w pobliżu miejsca zerowego α , więc:

$$f(\alpha) = f(x_1) + f'(x_1)(\alpha - x_1) + \frac{1}{2} f''(x_1)(\alpha - x_1)^2 + \dots$$

- linearyzacja funkcji: $f(\alpha) \approx f(x_1) + f'(x_1)(\alpha - x_1)$
- wobec czego α jest lepszym przybliżeniem rozwiązania niż x_1 ., co prowadzi do rekurencyjnej procedury iteracyjnej:

$$\alpha = x^n = x^{n-1} - \frac{f(x^{n-1})}{f'(x^{n-1})}$$

- z warunkiem zbieżności: $|x^n - x^{n-1}| < \varepsilon$
- Wielowymiarowy algorytm znany jest jako metoda Newtona-Raphsona.

Modelowanie sieci nieliniowej

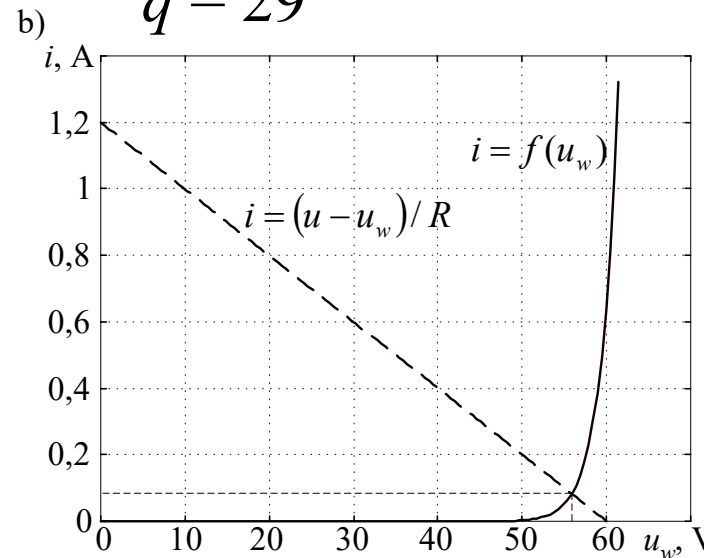
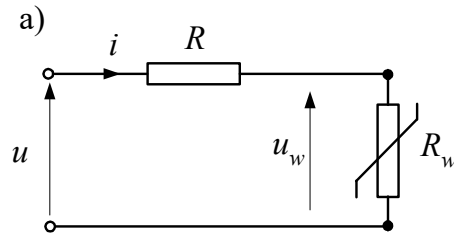
Przykład nl 1. Określić wartość prądu płynącego w przedstawionym obwodzie dla następujących parametrów: $u = 60 \text{ V}$, $R = 50 \Omega$, nieliniowy opornik (warystor) jest określony za pomocą funkcji:

$$i = k_i \left(\frac{u_w}{u_{ref}} \right)^q$$

$$k_i = 0,001 \text{ A},$$

$$u_{ref} = 48 \text{ V},$$

$$q = 29$$



Równanie obwodu:

$$i = \frac{1}{R} (u - u_w) = k_i \left(\frac{u_w}{u_{ref}} \right)^q$$

Modelowanie sieci nieliniowej

Definicja funkcji występującej w algorytmie Newtona:

$$f(u_w) = u - u_w - Rk_i \left(\frac{u_w}{u_{ref}} \right)^q$$

Należy wyznaczyć u_w przy znanych parametrach obwodu oraz wymuszeniu u .

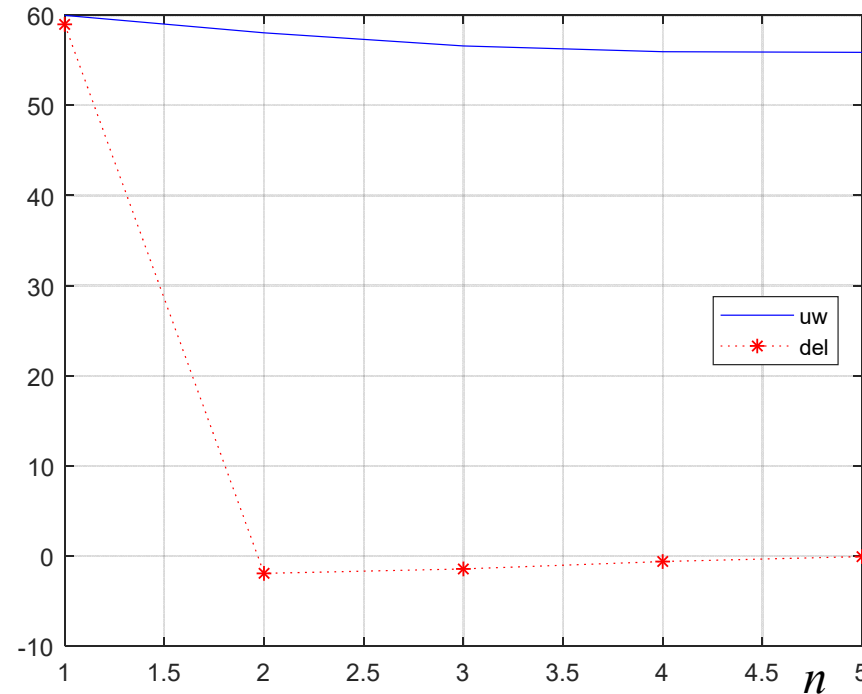
Procedura (należy określić pochodną funkcji $f(u_w)$ względem zmiennej u_w):

$$u_w^n = u_w^{n-1} - \frac{f(u_w^{n-1})}{f'(u_w^{n-1})}, \quad \text{gdzie:}$$
$$f(u_w^{n-1}) = u - Rk_i \left(\frac{u_w^{n-1}}{u_{ref}} \right)^q - u_w^{n-1}$$
$$f'(u_w^{n-1}) = -\frac{qRk_i}{u_{ref}} \left(\frac{u_w^{n-1}}{u_{ref}} \right)^{q-1} - 1$$

$$\Delta = \left| u_w^n - u_w^{n-1} \right| < \varepsilon$$

Modelowanie sieci nieliniowej

Procedura osiąga zbieżność $\varepsilon < 0,001$ po 5 krokach obliczeniowych.



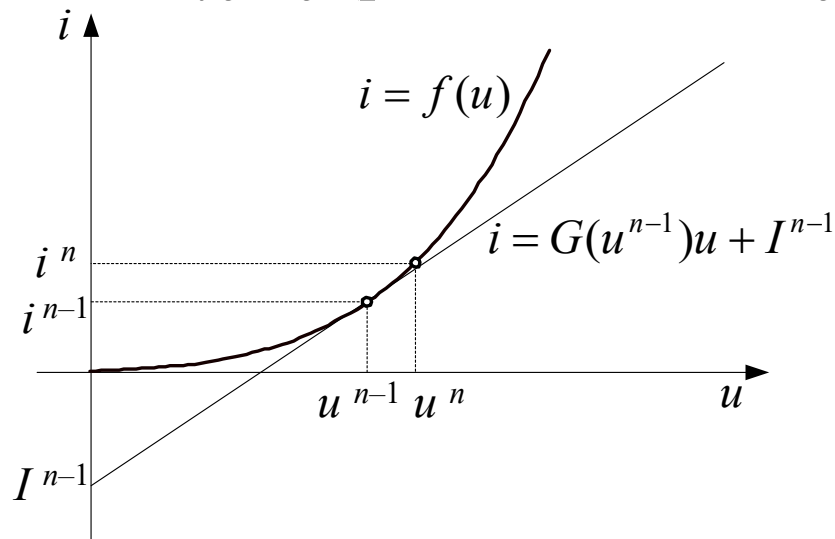
Wartość początkowa: $u_{w(0)} = 1$;

Zadanie:

- opracować powyższą procedurę przy założeniu, że zmienną jest prąd i w miejsce napięcia u_w ,

Modelowanie sieci nieliniowej

W przypadku sieci złożonej wygodnie jest stosować iteracyjne modele nieliniowych elementów R, L, C. W przypadku rezystancji można wyprowadzić odpowiednie zależności na podstawie przebiegu charakterystyki admitancyjnej (przewodnościowej):



Przewodność w punkcie o współrzędnych (u^{n-1}, i^{n-1}) :

$$G(u^{n-1}) = G^{n-1} = \left. \frac{di}{du} \right|_{u=u^{n-1}} = \left. \frac{df(u)}{du} \right|_{u=u^{n-1}}$$

Styczna w tym punkcie jest określona równaniem: $i = G^{n-1}u + I^{n-1}$

Modelowanie sieci nieliniowej

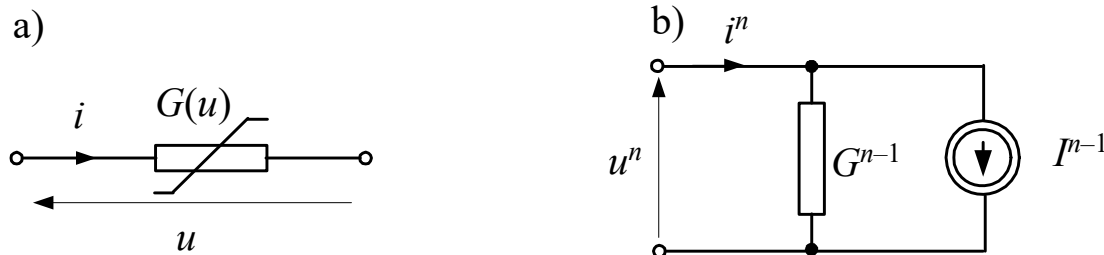
Zakładamy, że charakterystyka elementu jest ciągła i gładka, więc kolejny punkt w procesie iteracyjnym może być określony według tego samego równania:

$$i^n = G^{n-1}u^n + I^{n-1} \quad (*)$$

z nową wartością napięcia u^n , co pozwala określić wartość I^{n-1} :

$$I^{n-1} = i^{n-1} - G^{n-1}u^{n-1}, \quad i^{n-1} = f(u^{n-1}).$$

Równanie (*) przedstawia model iteracyjny przewodności:



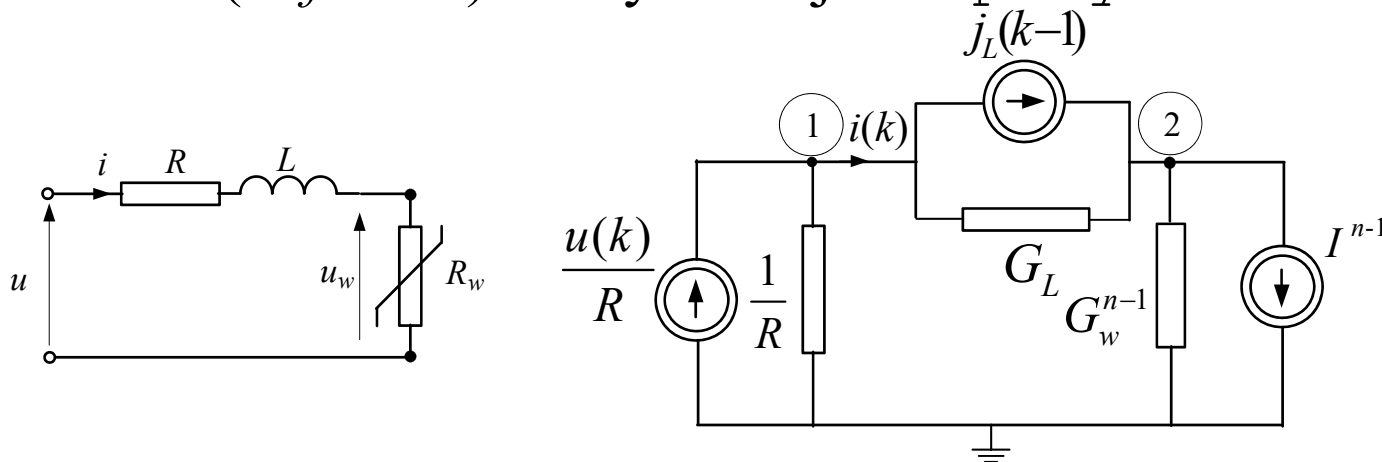
Warunek początkowy iteracji: $I^0 = I(0) = i^0 - G^0u^0$.

W podobny sposób można wyprowadzić modele L , C , które są tylko trochę bardziej złożone.

Modelowanie sieci nieliniowej

W przypadku modelu nieliniowego w stanie przejściowym mamy do czynienia z iteracyjnym rozwiązaniem w każdym kroku czasowym. Problem ten wyjaśnia kolejny przykład.

Przykład nl 2 Zbudować model i przeprowadzić symulację w obwodzie z przykładu_nl_1, gdzie w części liniowej znajduje się gałąź RL: $R = 10\Omega$, $L = 15\text{ mH}$, natomiast napięcie zasilające $u(t) = 75\cos(2\pi ft - \pi/6)$. Warystor – jak w przykładzie_nl_1.



Otrzymaliśmy sieć z trzema źródłami: dwa z nich zmieniają się z krokiem symulacji k , natomiast źródło prądowe I^{n-1} należy ustalić w procesie iteracyjnym.

Modelowanie sieci nieliniowej

Parametry modelu cyfrowego:

$$u(k) = 75 \cos(100\pi T k - \pi/6), \quad G_L = (T/2L),$$

$$G_w^{n-1} = \left. \frac{di}{du_w} \right|_{u_w=u_w^{n-1}} = \frac{q k_i}{u_{ref}} \left(\frac{u_2^{n-1}}{u_{ref}} \right)^{q-1}, \quad G = G_w \quad i(k) = k_i \left(\frac{u_2(k)}{u_{ref}} \right)^q$$

Równanie modelu:

$$\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{21} & g_{22}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_1(k, k-1) \\ I_2^{n-1}(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n(k) \\ u_2^n(k) \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$g_{12} = 1/R + G_L, \quad g_{12} = -G_L = g_{21}, \quad g_{22}^{n-1} = G_L + G^{n-1}$$

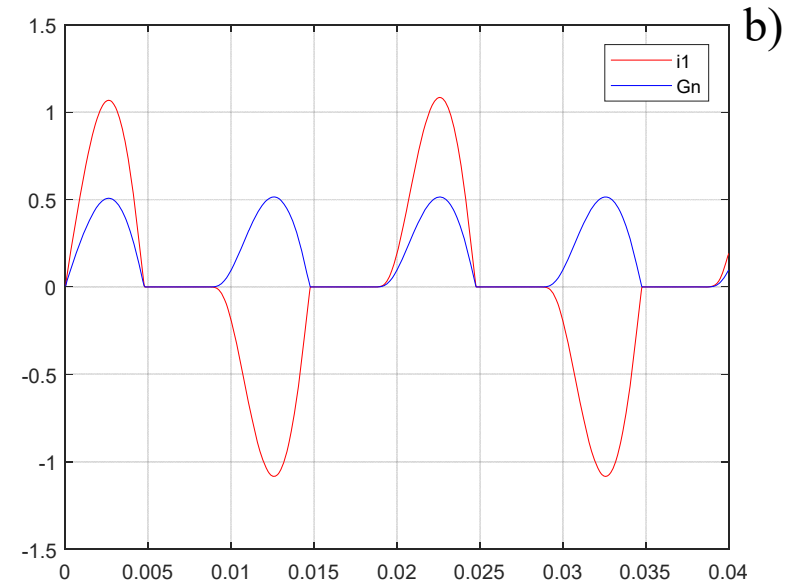
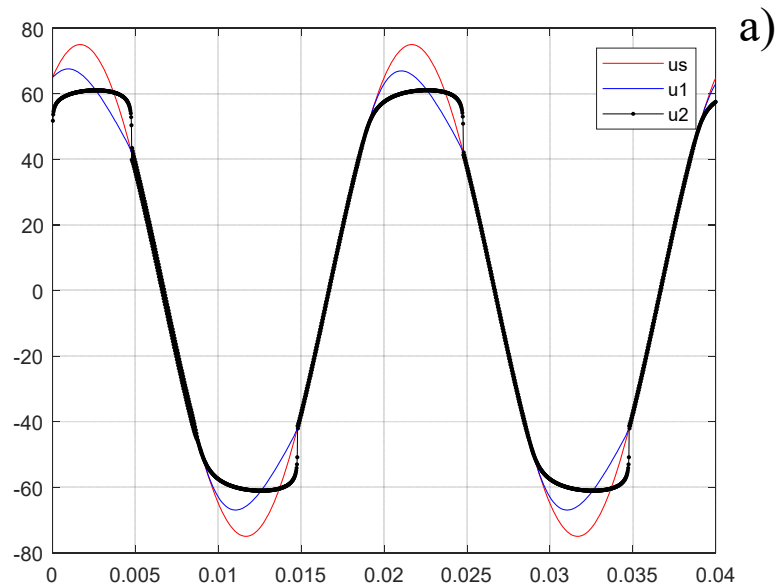
$$I_1(k, k-1) = u(k)/R - j_L(k-1) \quad j_L(k-1) = i(k-1) + G_L(u_1(k-1) - u_2(k-1))$$

$$I_2^{n-1}(k, k-1) = j_L(k-1) - I^{n-1} \quad I^{n-1} = i^{n-1} - G^{n-1} u_2^{n-1}$$

Jak widać, prąd źródłowy I_2^{n-1} zmienia się w każdym kroku iteracji n (w bieżącym kroku czasowym k) oraz zależy od poprzedniego kroku symulacji $k-1$.

Modelowanie sieci nieliniowej

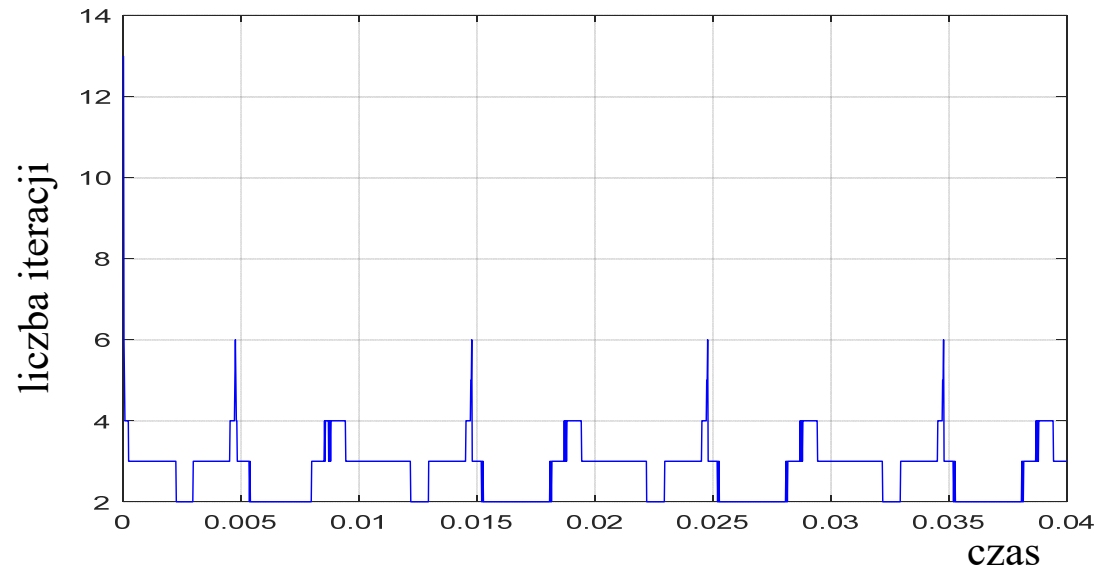
Procedura napisana w języku Matlab jest umieszczona w pliku
Przykład_nl_3.m.



Rysunek a) przedstawia przebiegi napięć: zasilającego u_s oraz w węzłach u_1 , u_2 . Widać, że warystor pełni rolę ogranicznika (dyskryminatora) napięcia. Na rysunku b) pokazany jest przebieg prądu i_1 oraz przewodności warystora G_n . Przy małej wartości napięcia przewodność gwałtownie spada, co może powodować oscylacje numeryczne ze względu na obecność indukcyjności.

Modelowanie sieci nieliniowej

Szczegóły dotyczące procedury obliczeniowej można analizować w załączonym programie. Przyjęto krok modelowania $T = 0,02$ ms, a granica zbieżności procesu iteracyjnego wynosi $\varepsilon = 1,0e-5$. Liczba iteracji potrzebnych do uzyskania zbieżności jest prezentowana na poniższym rysunku.



Można zauważyć, że wykonanie pierwszego kroku czasowego wymaga wykonania 13 iteracji. Liczba następnych iteracji zależy od stopnia nieliniowości w kolejnych obszarach wykonywanej procedury.

