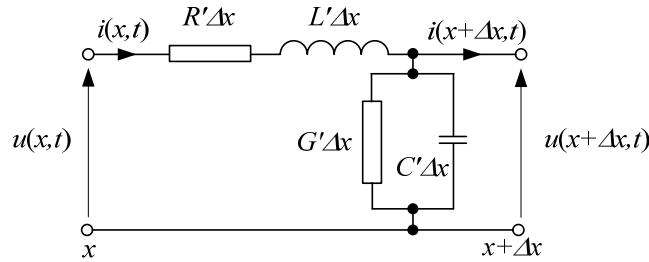


## Model linii długiej

Do przesyłu energii elektrycznej są powszechnie stosowane linie elektroenergetyczne. Dzięki dobrym właściwościom przewodzenia metali, pole elektromagnetyczne może być skupione w przewodzie i niedużej od niego odległości, co w znacznej mierze pozwala pominąć przestrzenny charakter pola elektromagnetycznego. Model fali elektromagnetycznej w takim przypadku można wyprowadzić, posługując się wielkościami odnoszącymi się do obwodu elektrycznego, w którym rozpatruje się tylko jeden wymiar przestrzenny związany z długością linii (model dwuprzewodowej 'jednofazowej' linii długiej – rys. 1).



Rys. 1. Schemat odcinka linii długiej

Wychodząc z bilansu napięć w utworzonym oczku oraz bilansu prądów w węźle, możemy napisać następujące równania:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= R'\Delta x \cdot i(x,t) + L'\Delta x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + u(x+\Delta x,t), \\ i(x,t) &= G'\Delta x \cdot u(x+\Delta x,t) + C'\Delta x \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial t} + i(x+\Delta x,t), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:  $R'$ ,  $G'$ ,  $L'$ ,  $C'$  – jednostkowe parametry obwodu: rezystancja, przewodność, indukcyjność oraz pojemność w odniesieniu do jednostki długości oznaczonej przez  $\Delta x$ .

Po podzieleniu równań (1) przez wielkość  $\Delta x$  i przejściu do granicy:  $\Delta x \rightarrow 0$ , otrzymamy znane równania falowe linii długiej z uwzględnieniem jej stratności:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= R'i(x,t) + L'\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= G'u(x,t) + C'\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

Przez dodatkowe różniczkowanie powyższych równań, odpowiednio, względem czasu  $t$  i względem odległości  $x$ , można wydzielić z nich oddzielne równanie dla prądu i dla napięcia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= R'G'u + (R'C' + G'L')\frac{\partial u}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= R'G'i + (R'C' + G'L')\frac{\partial i}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Jak widać, oba równania mają jednakową strukturę i reprezentują fale: prądową  $i(x,t)$  oraz napięciową  $u(x,t)$ , biegnące wzdłuż linii. W ogólnym przypadku fale te są tłumione w zależności od wartości parametrów  $R'$ ,  $G'$ , rozpraszających energię. Analiza i numeryczne rozwiązywanie równań o postaci, jak w (3) jest dosyć złożone, zwłaszcza jeśli rozpatrywana linia jest elementem większego obwodu. Dąży się zatem do uproszczenia modelu linii, co polega na pominięciu strat:  $R' = 0$ ,  $G' = 0$ . Nie jest to zazwyczaj przesadne uproszczenie, gdyż poprawnie zbudowana linia elektryczna będzie się z

pewnością charakteryzowała dobrą przewodnością podłużną (mała rezystancja  $R'$ ) oraz dobrą izolacją (mała wartość przewodności  $G'$ ). Prowadzi to do równań linii bezstratnej:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= 0,\end{aligned}\tag{4}$$

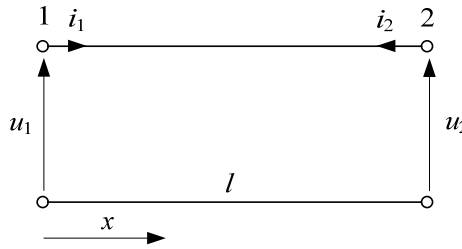
gdzie:  $v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$  jest szybkością rozprzestrzeniania się fali.

Dodatkową zaletą reprezentacji modelu fali w postaci (4) jest prosta, intuicyjna analiza rozchodzenia się fali bez strat. Jeśli założyć, że w dowolnym punkcie linii falę biegnącą  $u(x,t)$  można rozpatrywać w postaci superpozycji dwóch fal poruszających się w przeciwnych kierunkach, to otrzymamy:

$$u(x,t) = u_a(x-vt) + u_b(x+vt),\tag{5}$$

gdzie  $u_a(x-vt)$  ma kierunek dodatni, a  $u_b(x+vt)$  – kierunek ujemny<sup>1</sup>.

Podobna relacja odnosi się także do fali prądowej, przy czym, wygodnie jest przyjąć jednakowe kierunki prądów na obu końcach linii, względem węzłów wyznaczających końce linii (rys. 2).



Rys.2. Oznaczenie zmiennych w modelu linii długiej

Prowadzi to do następującego związku:

$$i(x,t) = i_a(x-vt) - i_b(x+vt) = \frac{1}{Z_f} (u_a(x-vt) - u_b(x+vt)),\tag{6}$$

gdzie  $Z_f$  jest impedancją falową linii.

Wartość impedancji falowej można określić przez podstawienie relacji (6) do podstawowego równania falowego linii bezstratnej, skąd otrzymuje się:

$$Z_f = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\tag{7}$$

Wielkości odnoszące się do obu kierunków fal:  $u_a(x-vt)$  oraz  $u_b(x+vt)$  mogą zostać wyeliminowane, jeśli założymy, że fala wysłana na początku linii o długości  $l$  w chwili  $t-\tau$ ,  $u_a(0-v(t-\tau))$ , osiągnie drugi jej koniec po czasie  $\tau$ :  $u_a(l-vt)$ , skąd:  $u_a(-v(t-\tau)) = u_a(l-vt)$ . Ponadto, na podstawie (5) oraz (6) otrzymamy:

$$u_a(x-vt) = \frac{1}{2} (u(x,t) + Z_f i(x,t)),\tag{8}$$

W praktycznym zastosowaniu rozważanego modelu linii można zrezygnować z ciągłej wartości zmiennej  $x$ , zakładając, że interesuje nas tylko rozwiązanie na obu jej końcach:  $x = 0$  (początek linii, indeks 1) oraz  $x = l$  (koniec linii, indeks 2) – rys. 2. Prowadzi to do następujących równań:

<sup>1</sup> Podejście to jest znane jako metoda charakterystyk.

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= \frac{1}{Z_f} u_1(t) - \frac{1}{Z_f} u_2(t - \tau) - i_2(t - \tau), \\
 i_2(t) &= \frac{1}{Z_f} u_2(t) - \frac{1}{Z_f} u_1(t - \tau) - i_1(t - \tau),
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

gdzie  $\tau = l/v$  – czas przejścia fali przez linię.

Model (9) może być łatwo zapisany w odniesieniu do dyskretnego czasu:  $t_k = kT$  ( $T$  – długość kroku symulacji), co jest przydatne do tworzenia cyfrowych (komputerowych) modeli linii elektrycznej:

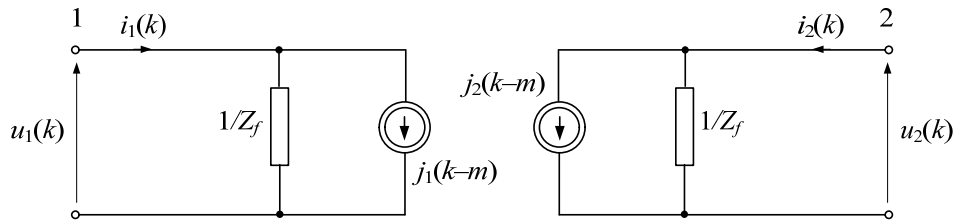
$$\begin{aligned}
 i_1(k) &= \frac{1}{Z_f} u_1(k) - \frac{1}{Z_f} u_2(k - m) - i_2(k - m), \\
 i_2(k) &= \frac{1}{Z_f} u_2(k) - \frac{1}{Z_f} u_1(k - m) - i_1(k - m),
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

gdzie  $m$  – liczba kroków symulacji odpowiadających czasowi  $\tau$  przejścia fali wzdłuż linii:  $m = \tau/T$ .

Modelowi (9) odpowiada schemat elektryczny, jak na rys. 3, gdzie:

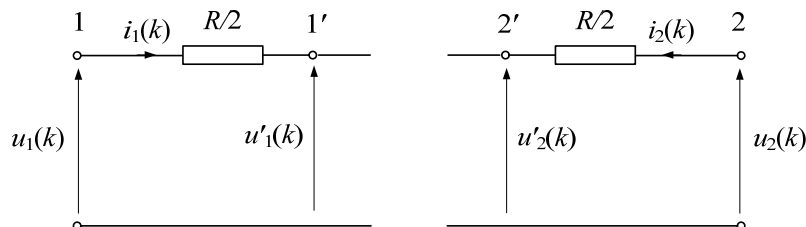
$$\begin{aligned}
 j_1(k - m) &= -\frac{1}{Z_f} u_2(k - m) - i_2(k - m), \\
 j_2(k - m) &= -\frac{1}{Z_f} u_1(k - m) - i_1(k - m),
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

są źródłami prądowymi, reprezentującymi historie stanu przejściowego na przeciwnych końcach linii.



Rys. 3. Schemat zastępczy dyskretnego modelu linii długiej

Łatwo zauważyć, że uzyskany model jednorodnej linii jednofazowej jest niezwykle efektywny numerycznie. Uproszczenie związane z pominięciem rezystancji linii można w dużej mierze w prosty sposób naprawić przez umieszczenie w przedstawionym modelu oporników (model o parametrach skupionych) na obu końcach uzyskanego modelu (rys. 4).



Rys. 4. Sposób uwzględnienia rezystancji w modelu linii długiej

Model z rys. 3 jest tutaj umieszczony pomiędzy węzłami 1' – 2', natomiast dodane oporniki powodują spadki napięć, które łatwo uwzględnić w końcowych równaniach modelu:

$$\begin{aligned} i_1(k) &= G_f u_1(k) + j_1(k-m), \\ i_2(k) &= G_f u_2(k) + j_2(k-m), \end{aligned} \quad (12)$$

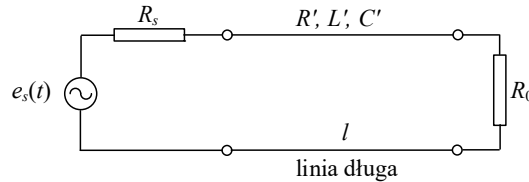
gdzie:

$$\begin{aligned} j_1(k-m) &= -G_f u_2(k-m) - h_f i_2(k-m), \\ j_2(k-m) &= -G_f u_1(k-m) - h_f i_1(k-m), \end{aligned} \quad (13)$$

$$G_f = \frac{1}{Z_f + R/2}, \quad h_f = \frac{2Z_f - R}{2Z_f + R}.$$

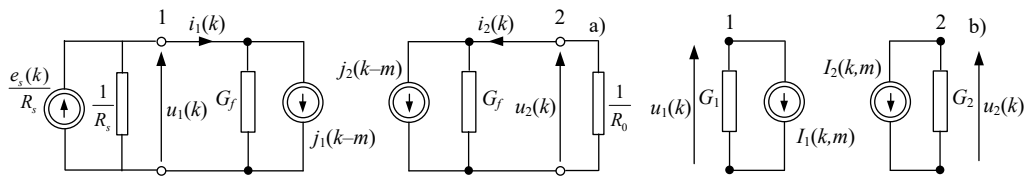
W przypadku konieczności bardziej dokładnej reprezentacji rezystancji w modelu linii (co może być ważne w przypadku bardzo długich linii), omówiona korekta jest rozszerzana na większą liczbę odpowiednio podzielonych rezystancji reprezentowanych modelami skupionymi. Kolejne przykłady ilustrują wykorzystanie tego modelu do symulacji stanów przejściowych w obwodach elektrycznych.

**Przykład 1.** Korzystając z modelu linii długiej (12), (13) przeprowadzić symulację stanu przejściowego w obwodzie z rys. 5 po załączeniu napięcia zasilającego. Przyjąć następujące parametry:  $e_s(t) = 180\sin(100\pi t + \pi/3)\text{kV}$ ,  $R_s = 2,5\Omega$ ,  $R_0 = 250\Omega$ ,  $R' = 0,04\Omega/\text{km}$ ,  $L' = 1,6 \cdot 10^{-3}\text{H}/\text{km}$ ,  $C' = 1,05 \cdot 10^{-8}\text{F}/\text{km}$ ,  $l = 160\text{km}$ .



Rys. 5. Schemat obwodu z linią przesyłową

Rozpatrywany schemat może przedstawiać typowy obwód odnoszący się do składowej zgodnej trójfazowej linii przesyłowej 220kV (co jest reprezentowane linią jednofazową), w którym zastąpiono rzeczywiste impedancje opornikami. Jeśli w dalszej analizie skorzystamy ze schematu zastępczego linii z rys. 4 z uwzględnieniem rys. 3, to schemat zastępczy całego obwodu należy przedstawić w konwencji prądowo-przewodnościowej: rys. 6a).



Rys. 6. Schemat zastępczy rozpatrywanego obwodu z linią długą (a), po uproszczeniu (b)

Schemat ten można łatwo uprościć do postaci, jak na rys. 6b), gdzie:

$$G_1 = G_f + \frac{1}{R_s}, \quad G_2 = G_f + \frac{1}{R_0}, \quad I_1(k,m) = j_1(k-m) - \frac{e_s(k)}{R_s}, \quad I_2(k,m) = j_2(k-m).$$

Na podstawie schematu z rys. 6b) można określić sposób obliczania napięcia na obu końcach linii:

$$\begin{aligned} u_1(k) &= \frac{-I_1(k,m)}{G_1} = \frac{1}{G_1} \left( \frac{e_s(k)}{R_s} - j_1(k-m) \right), \\ u_2(k) &= -\frac{I_2(k,m)}{G_2} = \frac{-j_2(k-m)}{G_2}. \end{aligned}$$

Następnie można obliczyć prądy na obu końcach linii:

$$\begin{aligned} i_1(k) &= j_1(k-m) + G_f u_1(k), \\ i_2(k) &= j_2(k-m) + G_f u_2(k). \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższe równania napięciowe i prądowe w obu węzłach (na obu końcach linii) są wzajemnie uzależnione przez prądy i napięcia przesyłane z przeciwległego końca, w postaci tych właśnie wartości napięć i prądów, przesuniętych w czasie o liczbę próbek  $m$ . Do imitacji tego procesu należy w programie komputerowym zorganizować odpowiednie rejestry przesuwne, które odtwarzają przesuwanie się fali wzdłuż linii. Długość tych rejestrów ( $m$  komórek pamięci) zależy od czasu propagacji  $\tau$  fali wzdłuż linii oraz przyjętego kroku modelowania  $T$ . Jak widać, wybór długości kroku modelowania  $T$  musi być uzgodniony z czasem przejścia fali wzdłuż linii, aby nie wystąpił zbyt duży błąd zaokrąglenia wartości  $m$ :

$$m = \text{round}\left(\frac{\tau}{T}\right) = \text{round}\left(\frac{l}{Tv}\right) = \text{round}\left(\frac{l\sqrt{L'C'}}{T}\right) - \text{liczba całkowita.}$$

Do analizy wyników symulacji z zastosowaniem omawianej procedury został opracowany program Przykład\_4\_5a.m, gdzie można prześledzić szczegóły dokonywanych obliczeń parametrów i prowadzonej symulacji.

Obliczmy podstawowe parametry modelu:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = 2,4398 \cdot 10^5 \text{ m/s,}$$

$$Z_f = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 390,36 \Omega \quad - \text{impedancja falowa linii,}$$

$$R_l = lR = 6,4 \Omega \quad - \text{rezystancja linii,}$$

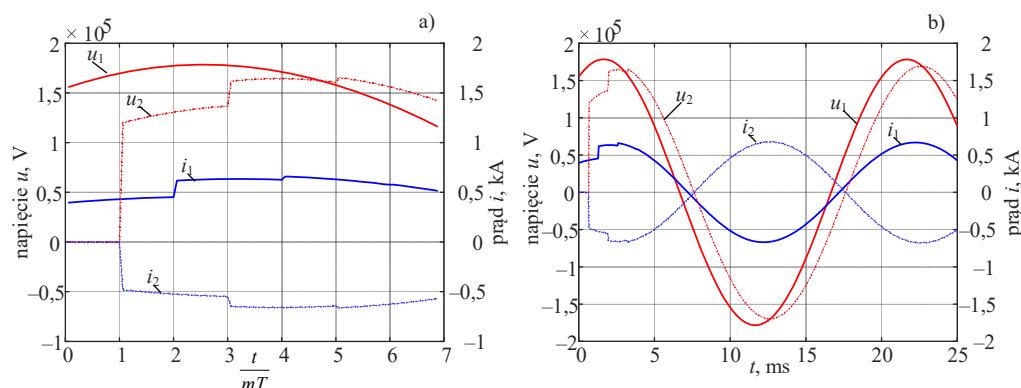
$$G_f = \frac{1}{Z_f + R_l/2} = 0,0025 \text{ S} - \text{przewodność wypadkowa linii,}$$

$$h_f = \frac{2Z_f - R_l}{2Z_f + R_l} = 0,9837 \quad - \text{współczynnik udziału impedancji falowej,}$$

W programie przyjęto  $T = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ , co daje długość rejestrów:  $m = \text{round}\left(\frac{l}{Tv}\right) = 16$  kroków symulacji.

Zakłada się zerowy stan początkowy linii.

Przebiegi prądów i napięć na obu końcach linii są pokazane na rys. 7, przy czym, na rys. 7a) są pokazane przebiegi tuż po załączeniu zasilania względem czasu wyrażonego w okresach propagacji fali wzdłuż linii:  $t/\tau = t/(mT)$ , gdzie  $\tau = 0,66 \text{ ms}$ . Widać efekt transportu sygnałów napięciowych i prądowych: prąd  $i_2$  i napięcie  $u_2$  pojawiają się na końcu linii po jednym okresie propagacji, natomiast oddziaływanie obciążenia na prąd strony pierwotnej  $i_1$  pojawia się dopiero po powrocie odbitej fali na początek linii. Te same przebiegi w nieco dłuższym okresie są pokazane na rys. 7b). Widać, że napięcie  $u_2$  na końcu linii ma trochę mniejszą amplitudę i fazę w stosunku do napięcia  $u_1$ , co wynika ze spadku napięcia na linii wywołanego prądem obciążenia oraz prądem pojemnościowym linii. Prąd  $i_2$  ma przeciwną polaryzację w stosunku do  $i_1$ , co jest związane z przeciwnym kierunkiem strzałek prądu na obu końcach linii (rys. 6).

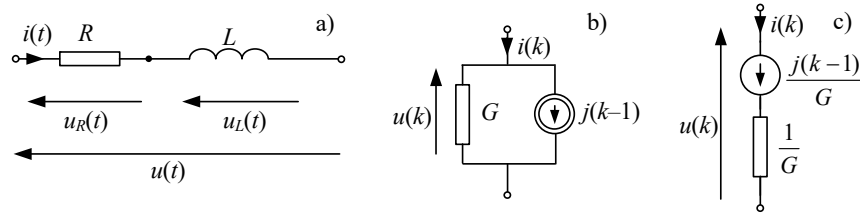


Rys. 7. Przebiegi prądów i napięć w modelu symulacyjnym

Przez zmianę rezystancji obciążenia  $R_0$ , można za pomocą tego modelu analizować warunki pracy linii nieobciążonej (bardzo duża wartość  $R_0$ ) lub zwartej na końcu (mała wartość  $R_0$ ).

Podejście prezentowane w powyższym przykładzie może być łatwo rozszerzone na modele obwodu z elementami reaktancyjnymi. W takim przypadku należy zastosować ich dyskretne modele.

Rozważmy prosty przypadek, gdy obciążenie w przykładzie 1 jest reprezentowane w formie gałęzi RL (rys. 8a)



Rys. 8. Model gałęzi RL: ciągły (a), dyskretny prądowy (b) dyskretny napięciowy (c)

Dla modelu ciągłego napiszemy:

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (14)$$

lub:

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t) = f(t) \quad (15)$$

Numeryczne rozwiązanie powyższego równania może być określone następująco:

$$i(t_k) = i(t_k - T) + \int_{t_k - T}^{t_k} f(\tau) d\tau \quad (16)$$

Jeśli całkę w (16) przybliżyć za pomocą pola trapezu, to otrzymamy:

$$i(t_k) = i(t_k - T) + \frac{T}{2}(f(t_k - T) + f(t_k)) \quad (17)$$

Po zamianie funkcji  $f(t_k)$  zgodnie z (15) oraz wykonaniu prostych przekształceń, uzyskamy dyskretny model gałęzi RL ( $i(t_k) \rightarrow i(k)$ ,  $t_k = Tk \rightarrow k$ ):

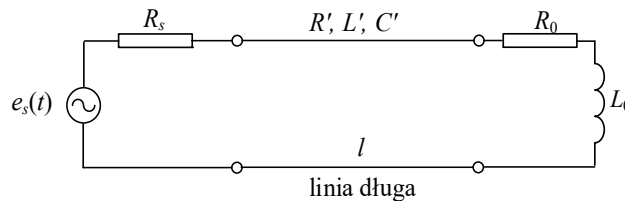
$$i(k) = Gu(k) + j(k-1), \quad (18)$$

gdzie:  $G = \frac{T}{2L + RT}$ ,  $j(k-1) = h_{RL}i(k-1) + Gu(k-1)$ ,  $h_{RL} = \frac{2L - RT}{2L + RT}$ .

Schemat zastępczy obwodu, odpowiadającego zależności (18) jest pokazany na rys. 8b). Jest to model dyskretny prądowy gałęzi RL skojarzony z metodą trapezów. Proste przekształcenie zależności (18) prowadzi do schematu modelu dyskretnego napięciowego - rys. 8c), przy czym, zachowano oznaczenia poszczególnych elementów z rys. 8b). W podobny sposób można uzyskać modele dyskretnie innych gałęzi sieci, również z elementami pojemnościowymi. Sposób wykorzystania tych modeli jest pokazany w kolejnym przykładzie.

### Przykład 2.

Przeprowadzić symulację stanu przejściowego w układzie z przykładu 1, zakładając, że w charakterze obciążenia występuje gałąź RL o następujących parametrach:  $R_0 = 225 \Omega$ ,  $L_0 = 0,3469H$  (rys. 9). Pozostałe parametry – jak w przykładzie 1.



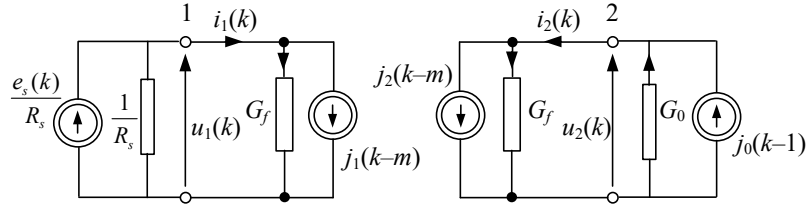
Rys. 9. Schemat obwodu z linią przesyłową i obciążeniem RL

Po uwzględnieniu dyskretnego modelu obciążenia w formie gałęzi RL, otrzymamy schemat zastępczy układu, jak na rys. 10. W kolejnym kroku można uprościć ten schemat do postaci, jak na rys. 6b), przy czym:

$$G_1 = G_f + \frac{1}{R_s}, \quad G_2 = G_f + G_0, \quad G_0 = \frac{T}{2L_0 + R_0 T}, \quad I_1(k, m) = j_1(k - m) - \frac{e_s(k)}{R_s}, \quad I_2(k, m) = j_2(k - m) - j_0(k - 1),$$

$$j_0(k - 1) = h_0 i_2(k - 1) - G_0 u_2(k - 1), \quad h_0 = \frac{2L_0 - R_0 T}{2L_0 + R_0 T}.$$

Pozostałe wielkości są obliczane, jak w przykładzie 1.



Rys. 10. Schemat zastępczy rozpatrywanego obwodu z obciążeniem  $R_0 L_0$

Na podstawie schematu z rys. 6b), z uwzględnieniem szczegółów z rys. 10, można określić sposób obliczania napięcia na obu końcach linii:

$$u_1(k) = \frac{-I_1(k, m)}{G_1} = \frac{1}{G_1} \left( \frac{e_s(k)}{R_s} - j_1(k - m) \right),$$

$$u_2(k) = -\frac{I_2(k, m)}{G_2} = \frac{j_0(k - 1) - j_2(k - m)}{G_2}.$$

Wartość prądu  $j_0(k - 1)$  należy obliczać na podstawie wartości prądu  $i_2(k - 1)$  oraz napięcia  $u_2(k - 1)$  z poprzedniego kroku. Następnie można obliczyć prądy na obu końcach linii:

$$i_1(k) = j_1(k - m) + G_f u_1(k),$$

$$i_2(k) = j_2(k - m) + G_f u_2(k).$$

Pozostałe parametry odnoszące się do modelu linii należy obliczać, jak w przykładzie 1.

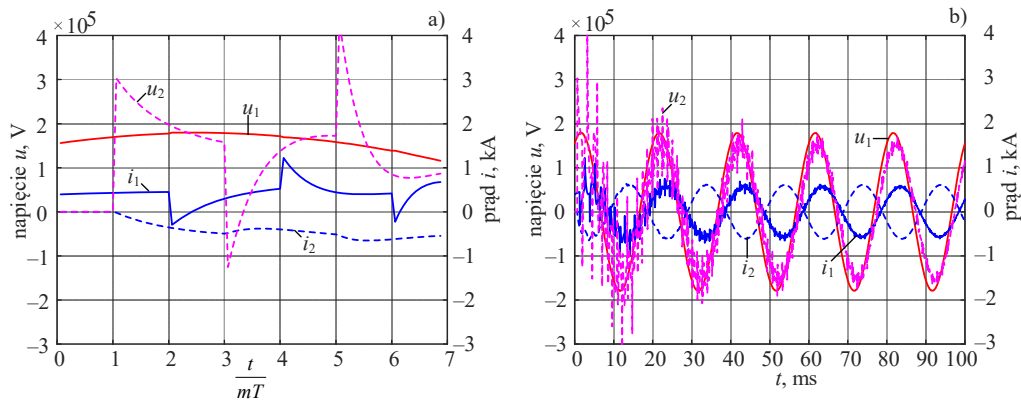
Niektóre wyniki symulacji stanu przejściowego związanego z załączeniem napięcia zasilającego przy zerowych warunkach początkowych są pokazane na kolejnych rysunkach.

Przebiegi napięć i prądów na obu końcach linii bezpośrednio po załączeniu zasilania są pokazane na rys. 11. Można zauważyć istotną zmianę w stosunku do rezultatów uzyskanych w modelu z obciążeniem rezystancyjnym (rys. 7). Widać, że gwałtowne zmiany prądu związane z przejściem fali na drugi koniec linii wywołują duże zmiany napięcia na obciążeniu z udziałem indukcyjności (rys. 11a)). To, w efekcie, wywołuje także gwałtowną zmianę fali powrotnej (prąd  $i_1$ ). Zmiany te są z czasem tłumione i kolejne fale są mniej gwałtowne. Widać to wyraźnie w nieco dłuższym przedziale czasowym stanu przejściowego – rys. 11b).

Można sprawdzić, że intensywność obserwowanych oscylacji i stopień ich tłumienia zależy od udziału indukcyjności w impedancji obciążenia, czego miarą jest współczynnik mocy:

$$\cos(\varphi) = \frac{R_0}{Z_0}, \quad \text{gdzie: } Z_0 = \sqrt{R_0^2 + X_0^2} = \sqrt{R_0^2 + (\omega L_0)^2}, \quad \varphi - \text{kąt pomiędzy prądem i napięciem na obciążeniu, } \omega =$$

$2\pi f = 100\pi$ . Dla przyjętej wartości indukcyjności:  $X_0 = 109\Omega$  oraz  $\cos(\varphi) = 0,9$ .

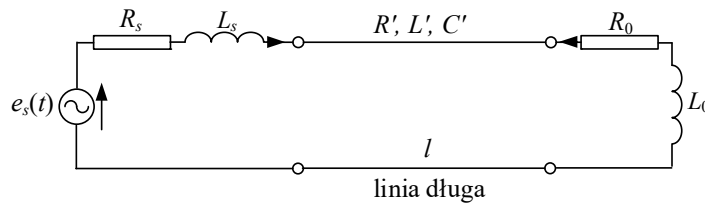


Rys. 11. Przebiegi prądów i napięć w modelu symulacyjnym z obciążeniem  $R_0 L_0$

W rozważanym modelu przyjęto, że wartość impedancji obciążenia  $Z_0$  jest równa rezystancji obciążenia  $R_0$  z przykładu 1, co sprawia, że w obu przypadkach wartość obciążenia (co do amplitudy) jest taka sama. Szczegóły symulacji omawianego układu można prześledzić, korzystając z programu `Przyklad_4_5b.m`, gdzie można łatwo zmieniać parametry obwodu.

Model przedstawiony w powyższym przykładzie można łatwo rozszerzyć przez przyjęcie bardziej realnych warunków, w których rezystancja źródła jest reprezentowana impedancją w postaci gałęzi szeregowo połączonych elementów  $R_s L_s$ . Model takiej gałęzi oraz stosowna modyfikacja programu komputerowego są pokazane w kolejnym przykładzie

**Przykład 3.** Przeprowadzić modyfikację modelu sieci z przykładu 2 przez zamianę rezystancji źródła  $R_s$  na impedancję w postaci szeregowo połączonych elementów  $R_s L_s$  (rys. 12). Przyjąć następujące parametry obwodu:  $R_s = 0,2 \Omega$ ,  $L_s = 0,0127H$ , przy zachowaniu pozostałych wielkości, jak w przykładzie 2. Przeprowadzić symulację stanu przejściowego po załączeniu napięcia zasilającego.



Rys. 12. Schemat obwodu z linią przesyłową, obciążeniem  $R_0 L_0$  i impedancją źródła  $R_s L_s$ .

Model gałęzi obciążenia jest taki sam, jak w przykładzie 2. Również cyfrowy model szeregowej gałęzi  $R_s L_s$  jest taki sam, jak w przypadku obciążenia  $R_0 L_0$ , a więc zgodnie z (18) – rys. 13a):

$$i_1(k) = G_s u_s(k) + j_s(k-1),$$

$$\text{gdzie: } G_s = \frac{T}{2L_s + R_s T}, \quad j_s(k-1) = h_s i_1(k-1) + G_s u_s(k-1), \quad h_s = \frac{2L_s - R_s T}{2L_s + R_s T}.$$

Aby uniknąć umieszczania dodatkowego węzła po stronie zasilania w rozpatrywanym obwodzie, cyfrowy model gałęzi RL można przedstawić w postaci napięciowej, połączyć go z napięciem źródła i zamienić na model gałęzi prądowej. W kolejnych krokach wykonamy następujące przekształcenie:

$$u_s(k) = \frac{1}{G_s} i_1(k) - \frac{1}{G_s} j_s(k-1), \quad \text{przy czym: } u_s(k) = e_s(k) - u_1(k).$$

$$\text{Wobec tego: } i_1(k) = G_s (e_s(k) - u_1(k)) + j_s(k-1),$$

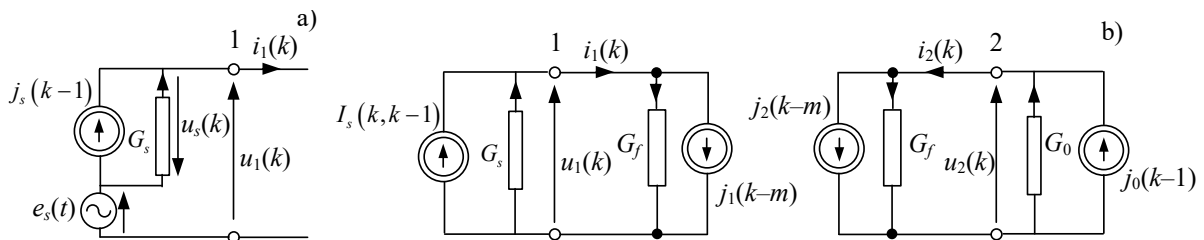
$$\text{przy czym: } j_s(k-1) = h_s i_1(k-1) + G_s (e_s(k-1) - u_1(k-1)).$$

Po uwzględnieniu dyskretnego modelu impedancji źródła w formie gałęzi RL, otrzymamy schemat zastępczy układu, jak na rys. 13b), gdzie:  $I_s(k, k-1) = j_s(k-m) + G_s e_s(k)$ .

W kolejnym kroku można uprościć ten schemat do postaci, jak na rys. 6b), przy czym:

$$G_1 = G_f + G_s, \quad I_1(k, m) = j_1(k-m) - I_s(k, k-1) = j_1(k-m) - j_s(k-1) - G_s e_s(k).$$

Pozostałe wielkości są obliczane, jak w przykładzie 2.



Rys. 13. Schemat zastępczy rozpatrywanego obwodu z obciążeniem  $R_0 L_0$  oraz impedancją źródła RL

Na podstawie schematu z rys. 6b), z uwzględnieniem szczegółów z rys. 13, można określić sposób obliczania napięcia na obu końcach linii:



$$u_1(k) = \frac{-I_1(k, m)}{G_1} = \frac{1}{G_1} (G_s e_s(k) + j_s(k-1) - j_1(k-m)),$$

$$u_2(k) = -\frac{I_2(k, m)}{G_2} = \frac{j_0(k-1) - j_2(k-m)}{G_2}.$$

Wartość prądu  $j_s(k-1)$  należy obliczać na podstawie wartości prądu  $i_1(k-1)$  oraz napięcia  $u_s(k-1)$  z poprzedniego kroku. Następnie można obliczyć prądy na obu końcach linii:

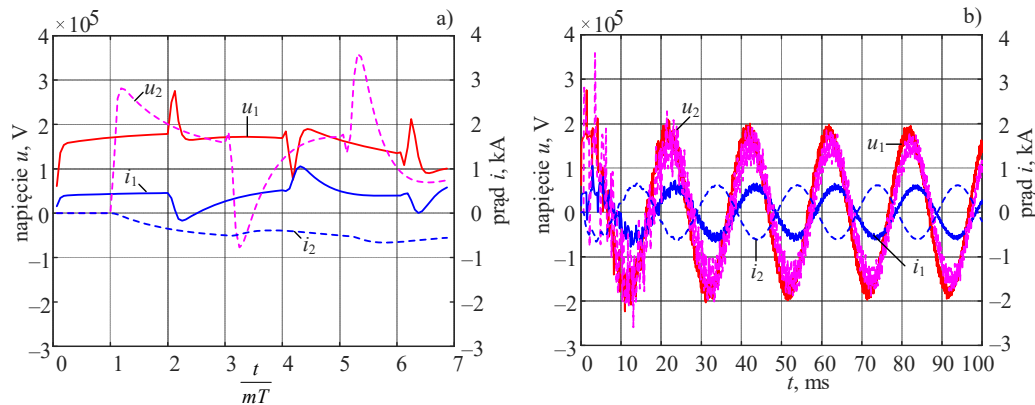
$$i_1(k) = j_1(k-m) + G_f u_1(k),$$

$$i_2(k) = j_2(k-m) + G_f u_2(k).$$

Pozostałe parametry odnoszące się do modelu linii należy obliczać, jak w przykładzie 1.

Na podstawie powyższego wywodu został opracowany program umieszczony w pliku `Przyklad_4_5c.m`. Niektóre wyniki symulacji stanu przejściowego związanego z załączeniem napięcia zasilającego przy zerowych warunkach początkowych są pokazane na kolejnych rysunkach.

Przebiegi napięć i prądów na obu końcach linii bezpośrednio po załączeniu zasilania są pokazane na rys. 11. Widać, że zmiany prądu związane z przejściem fali na drugi koniec linii i jej powrotem wywołują jeszcze intensywniejsze zmiany przebiegów prądu i napięcia. Zmiany te są z czasem tłumione i kolejne fale są mniej gwałtowne. Widać to wyraźnie w nieco dłuższym przedziale czasowym stanu przejściowego – rys. 14b).



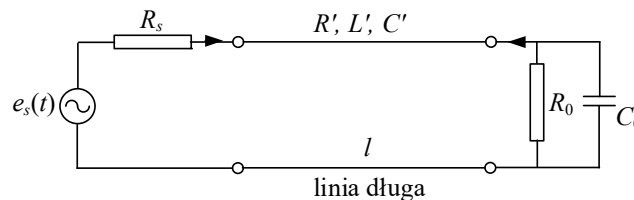
Rys. 14. Przebiegi prądów i napięć w modelu symulacyjnym z obciążeniem  $R_0 L_0$  oraz impedancją źródła

Szczegóły symulacji omawianego układu można prześledzić, korzystając z programu `Przyklad_4_5c.m`, gdzie można łatwo zmieniać parametry obwodu.

Obciążenie na końcu linii przesyłowej może mieć niekiedy także charakter pojemnościowy. Taki przypadek jest ilustrowany w następnym przykładzie.

#### Przykład 4.

Przeprowadzić modyfikację modelu sieci z przykładu 3 przez zamianę obciążenia na gałąź w postaci równolegle połączonych elementów RC (rys. 15). Przyjąć następujące parametry gałęzi obciążenia:  $R_0 = 278 \Omega$ ,  $C_0 = 5,55 \mu\text{F}$ , przy zachowaniu pozostałych wielkości, jak w przykładzie 3. Przeprowadzić symulację stanu przejściowego po załączeniu napięcia zasilającego.



Rys. 15. Schemat obwodu z linią przesyłową, obciążeniem  $R_0 C_0$  i impedancją źródła  $R_s L_s$ .

Cyfrowy model szeregowej gałęzi  $R_s L_s$  jest taki sam, jak w przykładzie 3. Schemat gałęzi obciążenia jest pokazany na rys. 16a). Do wyprowadzenia modelu dyskretnego postępujemy podobnie, jak w procedurze (14)–(18), przy czym, ciągły model pojemności jest określony równaniem:

$$i_c(t) = C \frac{du_0(t)}{dt},$$

skąd, stosując metodę trapezów, otrzymamy następującą zależność dyskretną:

$$u_0(k) = u_0(k-1) + \frac{T}{2C} (i_c(k) + i_c(k-1)).$$

Prąd obciążenia jest sumą prądów w obu gałęziach równoległych:

$$i_0(k) = i_R(k) + i_c(k) = \frac{1}{R_0} u_0(k) + i_c(k), \text{ niezależnie od czasu, skąd: } i_c(k) = i_0(k) - \frac{1}{R_0} u_0(k).$$

Uwzględniając powyższą zależność w dyskretnym modelu pojemności, otrzymamy:

$$u_0(k) = u_0(k-1) + \frac{T}{2C} \left( i_0(k) - \frac{1}{R_0} u_0(k) + i_0(k-1) - \frac{1}{R_0} u_0(k-1) \right).$$

Po uporządkowaniu otrzymamy napięciowy model pojemności skojarzony z metodą trapezów:

$$u_0(k) = \frac{R_0 T}{2CR_0 + T} i_0(k) + \frac{2CR_0 - T}{2CR_0 + T} u_0(k-1) + \frac{R_0 T}{2CR_0 + T} i_0(k-1).$$

Prądowa postać modelu tej gałęzi jest więc następująca:

$$i_0(k) = G_0 u_0(k) + j_0(k-1),$$

$$\text{gdzie: } G_0 = \frac{2CR_0 + T}{R_0 T}, \quad j_0(k-1) = -G_c u_0(k-1) - i_0(k-1), \quad G_c = \frac{2CR_0 - T}{R_0 T}.$$

Zauważmy, że kierunek napięcia  $u_0(k)$  jest przeciwny do kierunku napięcia  $u_2(k)$  (rys. 16), a zatem:

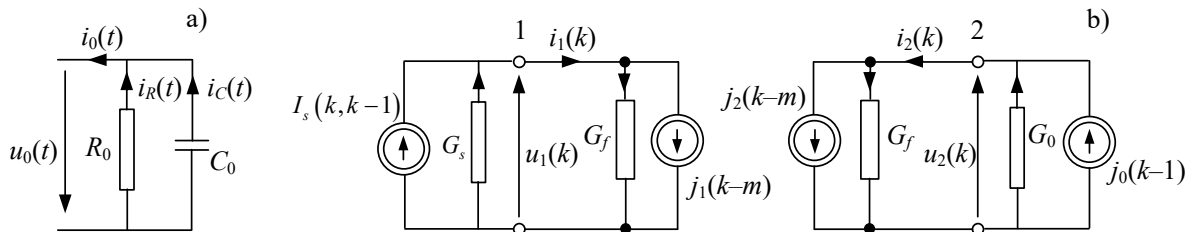
$$i_0(k) = -G_0 u_2(k) + j_0(k-1) = i_2(k)$$

$$\text{oraz: } j_0(k-1) = G_c u_2(k-1) - i_2(k-1).$$

Powyższa zależność ma taką samą strukturę, jak model gałęzi  $R_0 L_0$  w przykładzie 3, co prowadzi do takich samych zależności w odniesieniu do schematu z rys. 6b), przy czym:

$$G_2 = G_f + G_0, \quad I_2(k, m) = j_2(k-m) - j_0(k-1).$$

Pozostałe wielkości są obliczane, jak w przykładzie 3.



Rys. 16. Schemat zastępczy rozpatrywanego obwodu z obciążeniem  $R_0 C_0$  oraz impedancją źródła RL

Na podstawie schematu z rys. 6b), z uwzględnieniem szczegółów z rys. 16, można określić sposób obliczania napięcia na obu końcach linii:

$$u_1(k) = \frac{-I_1(k, m)}{G_1} = \frac{1}{G_1} (G_s e_s(k) + j_s(k-1) - j_1(k-m)),$$

$$u_2(k) = -\frac{I_2(k, m)}{G_2} = \frac{j_0(k-1) - j_2(k-m)}{G_2}.$$

Następnie można obliczyć prądy na obu końcach linii:

$$i_1(k) = j_1(k-m) + G_f u_1(k),$$

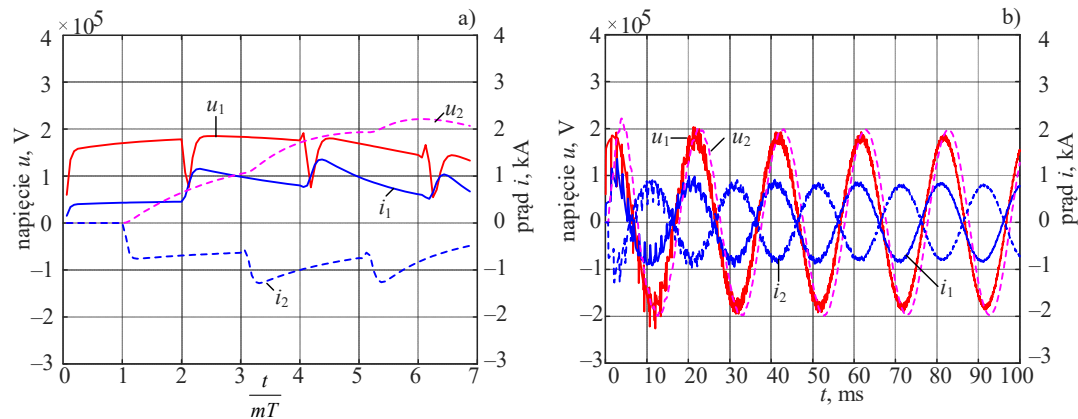
$$i_2(k) = j_2(k-m) + G_f u_2(k).$$

Pozostałe parametry odnoszące się do modelu linii należy obliczać, jak w przykładzie 3.

Na podstawie powyższego wywodu został opracowany program umieszczony w pliku Przyklad\_4\_5d.m. Niektóre wyniki symulacji stanu przejściowego związanego z załączeniem napięcia zasilającego przy zerowych warunkach początkowych są pokazane na kolejnych rysunkach.

Przebiegi napięć i prądów na obu końcach linii bezpośrednio po załączeniu zasilania są pokazane na rys. 17. Widać, że przebiegi prądu i napięcia związane z obciążeniem (na drugim końcu linii) są wyraźnie złagodzone, co jest związane z dolnoprzepustowym charakterem odbiornika z pojemnością. Wpływa to także na charakter

przebiegów po stronie zasilania linii. Widać to wyraźnie w nieco dłuższym przedziale czasowym stanu przejściowego – rys. 17b).



Rys. 17. Przebiegi prądów i napięć w modelu symulacyjnym z obciążeniem  $R_0C_0$  oraz impedancją źródła

Szczegóły symulacji omawianego układu można prześledzić, korzystając z programu `Przyklad_4_5d.m`, gdzie można łatwo zmieniać parametry obwodu.

Charakterystyczną cechą przedstawionego modelu linii długiej jest rozdzielenie całego rozważanego obwodu na dwie części, które są połączone linią z opóźnieniem, co pozwala w każdym kroku modelowania niezależnie rozwiązywać obwody związane ze schematami zastępczymi na obu końcach linii. Dzięki temu można redukować rozmiar zadania, rozumiany jako liczba wzajemnie powiązanych równań modelu. Takie rozwiązania są stosowane również przez umieszczenie fikcyjnej linii długiej z opóźnieniem o jeden krok modelowania w celu rozdzielenia złożonego zadania na mniejsze części lub przez odseparowanie modelu nieliniowego od głównego modelu z elementami liniowymi. W ten sposób, model nieliniowy może być rozwiązywany autonomicznie z zastosowaniem odpowiednio dobranej procedury (na przykład procedury iteracyjnej) bez angażowania równań całego złożonego modelu.